FRANCISCI à SCHOOTEN
EXERCITATIONUM
MATHEMATICARUM
LIBRI QUINQUE

I. Propositionum Arithmeticarum et Geometricarum centuria.

II. Constructio Problematum Simplicium Geometricorum.

III. Apollonii Pergæi Loca Plana restituta.

IV. Organica Conicarum Sectionum in plano descriptio.

V. Sectiones Miscellaneæ triginta.

Quibus accedit Christiani Hugenii Tractatus, de Ratiociniis in Aleæ Ludo.

FRANCISCI à SCHOOTEN

LEYDENSIS
In Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris,

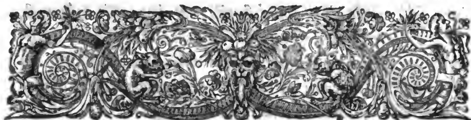
EXERCITATIONVM MATHEMATICARUM

LIBER PRIMUS.

CONTINENS

PROPOSITIONUM ARITHMETICARVM ET GEOMETRICARVM CENTURIAM.

LVGD. BATAV.
Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII,
Academiæ Typographi.
cIↄ Iↄc XVII.



Nobilissimis, Potentissimisq; Dominis,

D. D. PRÆSIDI ac SENATORIBUS CURIÆ HOLLANDIÆ, ZEELANDIÆ, & WEST-FRISIÆ,

Studiorum Mathematicorum Patronis, summè colendis.

Nobilissimi, Potentissimique Domini

VM inter res cunctas, quas universi hujus autor Deus, pro immensa sua tum sapientia tum bonitate, in terris produxit, nil mente humanâ, inveniatur præstabilius, dolendum meritò est divino hoc munere, per quod conditoris nostri gerimus imaginem, nos adeò frequenter & tam turpiter abuti. Etenim, quoties, voluptati pravisque affectibus serviendo, insuper habito rectæ rationis ductu, meliorem nostri partem negligimus, toties, originis nostræ immemores, à recto tramite miserè admodum aberramus. Ne itaque pecudum ritu vitam transigamus, cum quibus corpus ejusque motus habemus commu-

† 3 *nes,*

nes, solâ mente ab iisdem distincti, omni ope enitendum est, ut, relictis sensuum corporisque illecebris, hanc, quâ excellimus, præcipuè excolamus divinæ auræ particulam, & eam veritatis indagationi, à cujus cognitione omnis ejus dependet perfectio, continuè assuefaciamus.

Inter omnes autem mentis exercitationes, quæ huc conducere possunt, nullæ æquè utiles reperiuntur ac Mathematicæ; quæ sicut cæteras certitudinis evidentiâ antecellunt, ita apud eruditos & quoslibet ingenio præstantes viros summam adeptæ sunt dignitatem. Enimverò cum sensuum suffragium, quod sæpissime nos fallit, in exercitationibus hisce nullam mereatur fidem, sed mens sola circa illas versetur: fit ut eadem exercitatione hâc simile quid acquirat quod corpus multifariâ membrorum agitatione; promptitudinem scilicet in exequendis iis, in quibus se exercuit. Adeò ut mens hâc ratione accommodata planè aptáque reddatur ad verè ac solidè judicandum, & res quaslibet, non tantùm in Mathematicis, sed etiam Philosophicis quibusvis, ut & in civili vita, cum certitudine inquirendas & perspiciendas.

Quapropter cum ex omnibus Mathematicis Exercitationibus, quæ præcipuè huc spectant atque censentur utiles, nullæ ita puræ deprehendantur, quàm quæ Arithmeticæ & Geometriæ subjiciuntur, indeque Mathesis puræ nomine veniant, jure meritoque Arithmetica & Geometria ante reliquas omnes Mathematicæ scientiæ partes, quæ sanè complures sunt, addiscuntur, ipsisque primus inter illas locus assignatur. Quibus dum reliquæ ceu fulcimentis innituntur,

accidit

accidit ut mens humana iiſdem imbuta, velut per gradus quoſdam à minorum conſideratione ad majorum, à naturalium ad divinorum, & à corruptibilium ad æternorum manuducatur cognitionem. Harum beneficio mens noſtra, ut divinus teſtatur Plato, humo tollitur & tanquam binis alis in cœlum ſubvehitur; adeoque à terrenis hiſce atque caducis omnibus abducitur ad cœleſtium contemplationem. Vnde diſcit, aſſueſcitque ſupra ſortem ſuam ac conditionem ſe erigere, veritati fidem habere, & Deum Opt. Max. cunctarum rerum creatorem, ex immenſis ac infinitis ejus operibus hâc viâ rectè cognoſcere, atque ad eum ſolùm, ſi Sacrarum Literarum ſtudium jungas, quibus ſolis ſalutis noſtræ comprehenditur ratio, omnem laudem, omnemque gratitudinem ac reverentiam referre.

Hæ binæ artes ſeu ſcientiæ, cum per ſe ſubſiſtant nec aliarum egeant demonſtratione auxiliòve, utpote quæ contra ex illis ſuam nanciſcuntur firmitudinem, meritò à Philone reliquarum artium omnium Metropolis, & Philoſophiæ Anſæ à Xenocrate appellatæ ſunt. Quinimò, ſi pro rei dignitate loqui velimus, non ineptè Scientiarum Ianua ac Myſteriorum Reſeratio dici poſſunt: quippe quæ, theſauros ſuos aperientes, reſolvunt, pandunt, atque manifeſtant quicquid ante menti obſcurum occultumque videbatur. Hæc igitur fuit cauſa, cur Veteres, ut ſtudiis ſuis optimè conſulerent, & tyrones recti firmique judicii capaces redderent, eas ante omnia didicerint atque docuerint, ipſæque inde artes ſeu ſcientiæ Mathemata, id eſt, Diſciplinæ dictæ fuerint. Hoc autem

vel

vel inde liquet; quòd Plato, cujus temporibus hæ maximè floruére, illas Viam ad Eruditionem Compendiariam, unicumque tramitem; quo quis rectâ ad perfectam rerum omnium cognitionem pervenire potest, vocaverit. Unde etiam eos, qui in Arithmetica jam versati erant, ad discendas investigandasque artes quaslibet aptos solertesque pronunciavit, & Geometriæ ignaros è Schola sua eliminavit. Imò eousque Geometriam extulit, ut vel ipsam à Deo semper exerceri, ejusdémve interventu cuncta dirigi dicere solitus fuerit. Hoc utique indicare volens, eum, qui à teneris in Disciplinis hisce se exercuerit, Deo quasi assimilari, ipsiusque ingenium formari ad verè ac infallibiliter de re qualibet judicandum. Quod ipsum in discendis aliis artibus ac scientiis apprimè utile est ad veritatem, quæ cujusque scientiæ finis est, ab ejus contrario discernendam; atque ad dubitationem omnem, præjudicium, & temeritatem evitandam. Cui sententiæ adstipulatur etiam Athenæus, existimans unumquemque per disciplinas hasce perfici, modò jam inde à puero vitam ad virtutes componere studeat: quandoquidem ipsæ, dum minimè existunt contentiosæ, sedatos quoque animos gignunt; atque hoc item præ cæteris omnibus disciplinis sibi vendicant, quòd nullo fuco aut verborum lenocinio, quibus aliquis facilè seduci potest, ornari se patiantur; sed contentæ sint simpliciter doceri, & suos amatores summâ animi tranquillitate ac jucunditate persusos dimittere.

Præter verò tot tantasque harum disciplinarum utilitates, est etiam, Nobilissimi atque Potentissimi Viri, *quod*

Vos

Vos ſpeciatim concernit, quippe qui earum uſum in componendis litibus, in decidendis cauſis, in defendendo jure tuendiſque legibus, & in injuria vindicanda aſſiduè deprehenditis. Quin etiam experientiâ edocti eſtis, Arithmeticam eſſe quæ expendit ac recipit, quæ emit ac vendit, nec ſine eâ ulla hominum negotia expediri, eorumque controverſias dirimi poſſe. Idem locum obtinet in Geometria, quâ figuræ qualibet agrorum, ſaltuum, ſtagnorum, paludum, prædiorum, ac fundorum menſurantur, delineantur, dividuntur, illorumque damnum & jactura æſtimantur atque compenſantur; adeò ut ejuſdem beneficio diſſidia quævis menſurationis & diviſionis componantur, falſi limites indicentur, verique reſtituantur, injuriæ obviam eatur, confuſio evitetur, paxque inter diſſidentes concilietur. E quibus omnibus, dum nihil ſine Arithmetica & Geometrica proportione perficitur, atque hæc præmia & pœnas ratione perſonarum ac dignitatum diſtribuat; illa autem circa permutationes verſetur, liquidò conſtat, quanta ſit cum Arithmeticæ tum Geometriæ neceſſitas in quotidiana hominum converſatione, ac præſertim in cauſis forenſibus, & quam ob cauſam Iuſtitia in commutativam & diſtributivam apud Iuriſconſultos diviſa fuerit. His adde, quòd abſque illarum adminiculo plurimæ Romanæ Leges, de hæreditatum diviſione, agrorum accremento, fluviorum curſus mutatione, partiendis fructibus aliorum fundorum, ſimilibuſque rebus agentes, quarum in jure civili ſæpe mentio fit, non rectè intelligi queant; at verò in ſtatuendis pretiis, in computandis debitis, in æſtimanda noxa eaque

reſtituenda, in perpendendis delictis, ac ferè omnibus, quæ inter mortales quotidie accidunt, ſemper habendam eſſe rationem temporis & loci, quando ac ubi, ut & quanti aliquid ſit venditum, locatum, permutatum, tranſactum, oppignoratum atque redemptum; nec non quâ conditione hæc emptio, locatio, permutatio, tranſactio, oppignoratio juxta & redemptio facta ſit. Quæ omnia luculenter ſatis oſtendunt, binas haſce artes in edito judicii loco ac ipſo Tribunali conſediſſe, atque à Themide deſtinatas ad quodvis Juſtitiæ pondus æquæ lancis examine expendendum, & unicuique ſuum adjudicandum.

Quocirca cum per eas, uti dictum eſt, reliquæ omnes ſcientiæ ac artes faciliùs rectiùſque addiſcantur, atque ipſæ unicum vinculum ſint, quo ſubſiſtant, & in omnibus porrò commerciis, negotiationibus, ut & opificiis ritè dirigendis tam multas præbeant commoditates; haud immeritò creditur, nullam bene conſtitutam Rempublicam ſine iis conſiſtere poſſe, ſed earum exercitio bene ac fœliciter geri, ſimúlque ſcientias omnes, bonas artes, & opificia quævis in ea quàm maximè florere. Teſtis eſt ſagax atque prudens harum provinciarum regimen, ubi hæ diſciplinæ, ut uſui publico inſerviant, magno ipſarum commodo, publicè atque vernaculâ linguâ docentur. Vbi etiam Vos, Nobiliſſimi, Potentiſſimiq; Viri, quò prædictæ artes, Arithmetica nempe & Geometria in dignitate ſua conſerventur, ſuaque evidentia ac certitudine quotidie exerceantur, & in omni negotio atque adminiſtratione ſacra ſint anchora & amuſſis, optimâ ratione judicatis

dicatis

dicatis Geodætarum ſolertiam in ſupputando, menſurando, dividendo, aliiſque eò ſpectantibus, priuſquam munus ſuum obire poſſint, juſto examini eſſe ſubjiciendam, neque alium admittitis, quàm qui certa earundem artium ediderit ſpecimina, ſuaque infallibili demonſtratione noverit confirmare.

Vnde conſideratâ ſingulari hac veſtrâ curâ, non abs re fore judicavi, ſi Exercitationes haſce Arithmeticas pariter atque Geometricas ſacras Vobis facerem. In quibus variæ, jucundæ, quotidiéque occurrentes quæſtiones ſive propoſitiones pertractantur: docentes, quo pacto plures calculi, ad quos abſolvendos quilibet hactenus ſpecialibus regulis, ſine ullâ earum cauſæ aut ortus cognitione uſus eſt, per vulgares regulas, unicuique fermè cognitas, expediri poſſint; ut & quibus modis plures dimenſiones atque diviſiones, quæ ante tædioſo ac prolixo calculo perficiebantur, per multò expeditiorem artificiosè præſtentur; ac denique quâ viâ plures incognitæ vel quæſitæ lineæ breviter ſeu compendiosè inveniantur. Idque tam ad tyronum introductionem & exercitationem, quàm ad eoſdem harúmque artium ſtudioſos, quò ad altiora contendant, cum invitandos tum excitandos.

Quibus omnibus bene perſpectis, futurum confido, Nobiliſſimi Potentiſſimiq; Domini, *ut hunc meum laborem, qui veſtris dignitatibus ſingulari obſervantiâ à me offertur ac conſecratur, æquo benevoloque animo ſitis accepturi, & veſtram in clientelam lubentes admiſſuri. Præ-*

sertim cum hæ exercitationes charissimæ meæ patriæ bono in publicam lucem proferantur, earúmque etiam fructus in Justitia administranda ad Vos redundare possit. Finiam itaque, D. O. M. precibus humillimis obsecrans, ut vestra consilia omnia prosperè evenire faciat ad Reipublicæ nostræ salutem, Vosque quàm diutissimè servet incolumes.

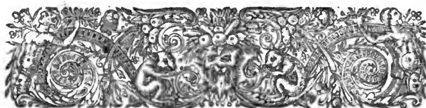
Nobilissimi, Potentissimiq; Domini

Vester devotissimus cliens

Lugd. Bat. Idibus Septemb. Anno cIↃ IↃC LVI.

FR. à SCHOOTEN.

EXER-



EXERCITATIONES MATHEMATICÆ, AC PRIMUM DE ARITHMETICIS PROPOSITIONIBUS.

I.

Quatuor personæ conducunt currum, quo vehantur Leydâ Amstelodamum, 9 florenis, & 10 stufris, hâc conditione, ut, si in via adhuc alii advenerint, id in ipsarum cedat emolumentum. Jam postquam Aelsmeriam pervenerunt, tribus Amstelodamo milliaribus, contingit adhuc duas ascendere, promittentes se pro ratione aliarum soluturas. Quæritur, quantum singulæ tum priorum tum posteriorum solvere debeant, si Leyda distet Amstelodamo 8 milliaribus?

Operatio fiat, ut sequitur.

perſ. milliar.

4 — 8 | 32 9 flor. 10 ſtufr. ſtufri ſolvendi

2 — 3 | 6 20

38 — 190 ſtufr. — { 32, 6 } fit { 160 à 4 primis, quod diviſum per 4, dat 40 ſtufros, pro ſingulis; 30 à 2 reliquis, quod diviſum per 2, dat 15 ſtufros, pro ſingulis. }

Vel ſic:

Quoniam ſingulæ priorum pro ratione duarum reliquarum ſolvere debent, ut 8 ad 3 (pro ratione nempe milliarium, quæ profectæ ſunt) & priores duplæ ſint poſteriorum, ſequitur rationem pecuniæ 4 priorum ad pecuniam 2^{rum} poſteriorum eſſe compoſitam ex ratione 8 ad 3, & ex ratione 2 ad 1. Unde tota ſumma 9 fl. 10 ſt. dividenda eſt in duas partes, quæ inter ſe ſint ut 16 ad 3. Omnino ut ſequens indicat calculus.

8 — 3

2 — 1 ſtufri ſolvendi

16 — 3 9 fl. 10 ſtufr. { 16

3 20

19 — 190 ſtufr. — { 16, 3 } fit { 160 à 4^{or} primis, quod diviſum per 4, dat 40 ſtufr. pro ſingulis; 30 à 2^{bus} reliquis, quod diviſum per 2, dat 15 ſtufr. pro ſingulis. }

ut ſupra.

II.

Si 27 ulnæ Amſtelodami valent 16 ulnas Lugduni, & 3 ulnæ Lugdunenſes valent 5 ulnas Antverpienſes, & 4 ulnæ Antverpienſes ſint æquales 5 ulnis Colonienſibus: invenire quot ulnæ Amſtelodamenſes contineantur in 200 ulnis Colonienſibus.

Inſpi-

Inſpiciatur ſequens operatio.

27—16
3—5 2 facit
4—5 64800 { 162, ulnæ Amſtelodamenſes continentur
200 400 { in 200 ulnis Colonienſibus.
64800—400

III.

Cùm 7 ℔ ſacchari valent 2 ℔ gariophillorum, & 3 ℔ garioph. tanti conſtant quanti 13 ℔ piperis, & 1 ℔ pip. conſtet 12 ſtufris: Invenire quanti conſtet ciſta ſacchari pendens 476 ℔.

7—2
3—13 facit
1—12 148512 { 7072 ſtufris, vel 353 flor. & 12 ſtufr.
476 21 {
21—148512

IV.

Duo ſtudioſi proficiſcuntur in Italiam, quorum unus 7 diebus priùs diſcedit altero, conficiens ſingulis diebus 9 milliaria: Quæritur, ſi alter quotidie emetiatur 12 milliaria, quanto temporis ſpatio primum ſit aſſequuturus?

Vide ſequentem operationem.

Prior præcedit 7 diebus
Conficiens quotidie 9 milliaria
Præcessit ergo prior 63 milliaribus.

Ex 12 milliaribus, quæ posterior quotidie est emensus
Subtr. 9 milliaria, à priore confecta
Restant 3 milliaria, quæ à posteriore quotidie conficiuntur ultra milliaria prioris.

Fiat itaque

milliar. Diem milliar.
3 ——— 1 ——— 63 | facit 21 diebus.

Examen

Mult. 21 dies, quibus 2^dus est profectus per 12 milliaria
42
21
Et fiunt 252 milliaria, à 2^do confecta.

Ad 21 dies, quibus 2^dus est profectus adde 7 dies, quibus 1^mus præcessit,
fiunt 28 dies, quibus 1^mus est profectus per 9 milliaria
fiuntque 252 milliaria, à 1^mo confecta, cùm 2^dus eum assecutus est.

V.

Insula in ambitu est 36 milliarium. Si jam eodem tempore, & ex eodem loco duo proficiscuntur tabellarii, invicem sequentes, quorum unus quotidie conficit 9, & alter 7 milliaria: Invenire, quanto temporis spatio iterum sint conventuri, ut & quot milliaria & ambitus uterque absolverit.

milliaria
Subt. { 9
17 Die milliaria
2 ——— 1 ——— 36 | facit 18 diebus.

Mult. 18 dies
per 9 mill.
fiunt 162 mill. quæ prior confecit

Multipl. 18 dies
per 7 mill.
fiunt 126 mill. quæ posterior confecit;

(18
divid. 162 { $4\frac{1}{2}$ ambitus, quos
per 36 { prior absolvit.

(18
divid. 126 { $3\frac{1}{2}$ ambitus, quos
per 36 { posterior absolvit.

VI. Si

VI.

SI Nurenberga distet Româ 140 milliaribus, & eodem tempore ex utraque urbe decedat tabellarius, quorum unus quotidie absolvit 8, & alter 6 milliaria. Quæritur, intra quot dies sibi invicem obviam sint venturi, ut & quot milliaria quisque confecerit?

Fiat ut sequitur.

mill.
Add. { 8 à primo quotidie confecta
{ 6 à 2do quotidie confecta

summa 14 milliaria, quæ uterque simul quotidie conficiunt

Tum fiat

mill. diem mill. dies
14 —— 1 —— 140 | facit 10, intra quos sibi mutuò occurrent.

Mult. 10 dies
per 8 mill.
fiunt 80 mill. quæ prior absolvit

Mult. 10 dies
per 6 mill.
fiunt 60 mill. quæ posterior absolvit.

VII.

Duæ civitates distant à se invicem 100 milliaria. Jam ex utraque eodem tempore decedit tabellarius, quorum unus quotidie $2\frac{1}{2}$ milliaria plus conficit quam alter: Quæritur, si post 8 dies sibi mutuò obviam veniant, quot milliaria uterque perfecerit?

Dies milliaria Dies milliaria
1 —— $2\frac{1}{2}$ —— 8 | facit 20, unus plus confecit quàm alter. Quæ ex 100 mill. subducta, relinquunt 80 milliaria, quorum semissis est 40 mill^{ria}, quæ posterior confecit. Unde prior confecit 60 milliaria.

Ut autem inveniatur, quot milliaria singuli quotidie confecerint, fiat Dies milliaria Dies milliaria
8 —— 40 —— 1 | facit 5, quotidie confecit posterior. Unde prior quotidie confecit $7\frac{1}{2}$ milliaria.

VIII.

Emit aliquis agrum 450 perticarum, jugerum 1000 florenis; hâc conditione, ut prætium duobus persolvat temporibus, & primo quidem tempore 350 florenos plus quàm secundo: Quæritur, quantum singulis temporibus solvere debeat?

Jugerum flor. pert. flor.
pert. 600 —— 1000 —— 450 | facit 750 pretium agri

Adde { 375 semissem
175 semissi ipsius 350

summa 550 flor. primo tempore solvendi

subt. { 375
175

Relinq. 200 flor. 2do tempore solvendi

IX.

Emit lanio 50 boves, jam quæritur, si singulis septimanis 2 boves mactare velit, donec omnes post 25 septimanas mactati sint, quot boves per idem temporis spatium eodem pretio alere possit?

Facit 26 boves eodem pretio per 25 septimanas alere potest, quo 50 boves, si singulis septimanis duos mactet. Quod ut inveniatur, adde 50 & 2, eritque 26, semissis summæ 52, numerus bôum quæsitus.

X.

Duo studiosi A & B simul Leydâ discedunt in Gallias, quorum A quotidie conficit 6 milliaria, & B primo quidem die 1 milliare, secundo 2, tertio 3 milliaria, & sic deinceps, sequenti die unum semper milliare plus conficiens. Quæritur, quanto tempore primum sit assequuturus?

Facit 11 diebus.

Ad

Ad quod inveniendum, sumatur duplum ipsius 6, quod est 12, à quo si auferatur 1, relinquetur 11, numerus quæsitus.

XI.

Frumentarius duplex habet frumentum, utpote triticum & siliginem, vendit autem tritici modium 7 flor. 10 stufr. & 8 den: Quæritur, si tres modii tritici ipsi tanti constent quanti 4 modii siliginis, quo pretio modium siliginis vendere debeat?

NOTA. *Hæc quæstis solvi potest per rationem compositam ad modum propositionis secundæ, sicut hic vidêre est.*

```
                              flor. stufr. den.
4——3                           7...10...8
1— 2408 den.                   20
4—7224                         150 stufr.
                               16
        (1                     908
5       244  (1                15
7224{ 1806 | 11 | 2            2408 den.
4       16 |
     facit 5 flor. 12 stufr. & 14 den.
```

XII.

Si 1 ℔ aromatis Amstelodami emitur 12 solidis, 6 gro., quanti constabit 1 ℔ Antverpiensis, cùm 19 ℔ Amstelodamenses æquantur 20 Antverpiensibus?

Facit 11 sol. 10 gr. 12 m.

Instituа-

Instituatur operatio per rationem compositam, ut sequitur.

Sol. gro.
20—19 12...6
1—150 12
20—2850 24
(1 126
(1 20 150 gr.
2850 { 142 { 11.
20 12

Aliter, per Regulam Proportionum conversam, hoc pacto:

℔ Amst. Sol. gr. ℔ Antv.
19———12..6———20
12
24
126
150 gr. (1
19 (1 20
1350 2850 { 142 { 11.
15 20 12
2850

XIII.

Cerevisiarius habet ahenum cerevisiæ, 45 vasorum, cujus vas ipsi constat 4 flor. 16 stufr.: Quæritur, ad quot vasa decoquere debeat, ut vas ei constet 6 flor. Facit ad 36 vasa.

Operare juxta Regulam Proportionum inversam, ut sequitur.

flor. stufr. vasa flor.
4 ... 16———45———6
20 20
96 stufr. 120 stufr.
45
480 7
384 4320 { 36.
4320 120

Ut au-

Ut autem cognoſcatur, poſtquam numeri vulgari modo ſunt collocati, num juxta directam an verò inverſam proportionum regulam, ſit operandum: Notari debet, num quæſtio ſit ejus naturæ, ut, ſi tertius numerus, in regula, major ſit primo, tum quoque quartus ſeu quæſitus major requiratur ſecundo; vel, ſi tertius primo minor ſit, tum etiam quartus minor requiratur ſecundo, hoc enim ſi contingat, operatio inſtituenda erit ſecundùm regulam directam, multiplicando ſcilicet ſecundum per tertium numerum, & productum dividendo per primum; Contrario verò contingentè, operandum erit juxta regulam inverſam, multiplicando nempe primum per ſecundum numerum, & productum dividendo per tertium.

XIV.

Si 1 ℔ cinamomi conſtat 3 flor., 1 ℔ gariophillorum 4 flor. 10 ſtufr., 1 ℔ nucum muſc. 3 flor. 15 ſtufr., 1 ℔ piperis 16 ſtuf., & 1 ℔ zingiberis 15 ſtufris. Quæritur, ſi ſingulorum aromatum idem numerus librarum expetatur, & in totum expendere velimus 1600 flor. quot libræ cujuſque ſpeciei ſint recipiendæ?

flor. ſtufr.
3 .... 0 . Cinam.
4 ... 10 . Garioph.
3 ... 15 : Nucum
16 . Pip.
15 . Zing. cujuſque aromatis flor.
12 ... 16 ———— 1 ℔ ———— 1600 | facit 125 ℔, cujuſque ſpeciei.

*Eodem modo invenietur, ſi 10 * nummi aurei commutandi ſint in ducatones, imperiales, ſolidos, & ſtufros, ita ut cujuſque ſpeciei idem ſumendus ſit numerus, ſingulorum recipiendos eſſe 12 nummos.*

* rijders

XV.

Aromatopola Leydensis petit Amstelodamum, ad emenda aromata, videlicet: piper, gariophillos, & zingiber; ubi 1 ℔ piperis ipsi offertur pro 16 stufr., 1 ℔ garioph. pro 4 flor. 10 stuf., & 1 ℔ zing. pro 15 stufris: Quæritur, si in totum expendere velit 229 florenos, & sumendo 13 ℔ piperis, accipiat 2 ℔ garioph.; & sumendo 3 ℔ garioph. accipiat 7 ℔ zingib., quot ℔ singularum specierum recipere debeat?

```
13 —— 2 ╲╱ 3 —— 7
3.... 3 ╱╲ 2..... 2
―――――――――――――――――――
39 ——— 6 ——— 14
```

```
℔      stufr.
39 —— 16 | 624
 6 —— 90 | 540      229 flor.               stufr.
14 —— 15 | 210       20       ⎧624⎫      ⎧ 2080, quod div. per 16, fiunt 130 ℔ Pip.
    1374 ——— 4580 stufr       ⎨540⎬facit⎨ 1800, quod div. per 90, fiunt 20 ℔ Garioph.
      3 ————— 10              ⎩210⎭      ⎩ 700, quod div. per 15, fiunt 46 2/3 ℔ Zing.
```

* een g. gul. hoc est, 28 stufr.

*Eodem modo invenitur, si permutandi sint 189 aurei Gallici, in patacones, *aureos, & solidos, & duplo plures patacones expetantur quàm solidi, recipiendos esse 264 patac. 132 aur. & 44 solidos.*

XVI.

Sex prædiati A, B, C, D, E, & F aggere prædia sua cingere cupiunt, in ambitu continente 1270 pedes; hâc conditione, ut illi, qui, priusquam aggerem extruere possunt, fossam suam implere debent, 14 pedes ejusdem aggeris minus perficiendos habeant. Quæritur, si prædium ipsius A sit 30, B 20, C 45 D 40, E 36, & F 50 perticarum, & ipsis A, C, E, & F fossas implere obtingat, quot pedes singulis ex ambitu sint adjudicandi?

perticæ

perticæ
A.30.
B.20
C.45.
D.40
E.36.
F.50.
221

Mult. 14 pedes
per 4
fiunt 56 pedes

pedes
Ambitus 1270
adde 56
1326

perticæ		pedes	pedes	In examen adde singulorum pedes
A.30.	fit	A.180, subtr. 14	fiuntque perticæ ex ambitu pro	A.166
B.20		B.120		B.120
C.45.		C.270, subtr. 14		C.256
D.40		D.240		D.240
E.36.		E.216, subtr. 14		E.202
F.50.		F.300, subtr. 14		F.286

fiuntque 1270 pedes, ambitus, ut requirebatur.

XVII.

Tres, societate initâ, contribuunt, nimirum, A & B simul 540 flor., B & C 360 flor., & A & C 450 flor.; peracto autem negotio lucrati sunt 150 flor.: Quæritur, quid unusquisque contribuerit atque lucratus sit?

	flor.	
A & B	540	
B & C	360	
A & C	450	
summa	1350	duplum eorum pecuniæ.
semissis	675	pecunia ipsorum A, B, & C.
subtr.	360	pecuniam ipsorum B & C.
rel.	315	pecunia ipsius A. Quæ si auferatur ex 540 fl. pecuniâ ipsorum A & B, relinquetur 225 flor., pecunia ipsius B. Hinc cum B & C simul contribuunt 360 flor., sequitur C contribuisse 135 florenos.

Lucrum singulorum sic invenies

Summa totius pecuniæ	totum lucrum	singulorum pecunia		singulorum lucrum.
675	150	A.315	facit	A.70 fl.
		B.225		B.50 fl.
		C.135		C.30 fl.

B 2 XVIII. Si

XVIII.

Si 125 ℔ piperis plus 4 florenis valeant 60 florenos plus 13 ℔: Quæritur, quantum persolvi debeat pro sacco, pendente 512 ℔?

℔ flor. flor. ℔
Ex 125 + 4 æquale 60 + 13
Subtrah. utrinque 13 ℔ ..... & .... 4 fl.
Remanent 112 ℔ æqual. 56 flor.
Tum fiat
℔ flor. ℔
112 —— 56 —— 512 | facit 256 flor.

XIX.

Si 100 ℔ sacchari minus 3 flor. tantum valent quantum 36 floreni plus 5 ℔: Quanti constabit cista, pendens 475 ℔?

℔ flor. flor. ℔
Ad 100 — 3 æqual. 36 + 5
Adde utrinque 3. flor. minus 5 ℔. — 5 ℔ + 3 flor.
fiuntque 95 ℔ æqual. 39 flor.
Tum fiat,
℔ flor. ℔
95 — 39 — 475 | facit 195 flor.

XX.

Si 3 ulnæ panni veneunt 6 aureis Gallicis & 12 stufris; & eâdem ratione pro 25 ulnis solvantur 51 aurei Gallici & 12 stufri: Quæritur, quot stufros aureus valuerit?

3 ulnæ

3 ulnæ æqual. 6 aur. + 12 ſtuf.
hoc eſt, 1 ulna æqual. 2 aur. + 4 ſtuf.
& 25 ulnæ æqual. 50 aur. + 100 ſtuf.

Unde 51 aur. + 12 ſtuf æquantur 50 aur. + 100 ſtuf.
Subt. utrinque 50 aur. & 12 ſtufr. 50 aur. + 12 ſtuf. 50 aur. + 12 ſtuf.
relinq. 1 aur. .... æqualis .... 88 ſtuf.
hoc eſt, 1 aureus valet 4 fl. & 8 ſtufr.

XXI.

Si 12 poma & 15 pira emantur 3 ſtufris, & eâdem ratione 10 poma & 50 pira 5 ſtufris, quot igitur ſingulorum uno ſtufro ementur?

ſtufr. poma pira ſtufr. poma pira pomis piris
3 —— 12 & 15 —— 5 | facit 20 & 25 æqual. 10 & 50
3,
1 —— 4 & 5
Subtr. utrinque 10 poma, & 25 pira. 10 pom. 25 pir.
& relinq. 10 poma æqual. 25 pir.
5,
vel 2 pom. æqual. 5 pir.
3,
& 6 pom. æqual. 15 pir.

Jam ad inveniendum, quot poma & pira ſeorſim pro ſtufro emantur, ita fiat

Ad 12 poma
ſtufr. adde 6 poma, vel 15 pira ſtufr.
3 —— 18 pom. —— 1 | facit 6 poma pro 1 ſtufro.

Hinc ſi 6 poma tantundem valeant ac 15 pira, & 9 poma emantur 1 ſtufro; ſequitur 15 pira pro 1 ſtufro emi poſſe.

XXII.

Si 3 ℔ gariophillorum, 2 ℔ piperis, & 1 ℔ zingiberis simul constent 186 stufris: atque 3 ℔ pip. 2 ℔ zing. & 1 ℔ garioph. simul 116 stufris: itemque 3 ℔ zing. 2 ℔ garioph. & 1 ℔ pip. simul 142 stufris: Quæritur, quantum 1 ℔ cujusque constiterit?

stufr.
facit 1 ℔ Garioph. 48.
Pip. 16.
Zing. 10.

Id quod sequenti modo invenitur.

Add. 3 G. 2 P. 1 Z ... 186 ...... subtr.. 3 G. 2 P. 1 Z ... 186
1 G. 3 P. 2 Z ... 116
2 G. 1 P. 3 Z ... 142
summa 6 G. 6 P. 6 Z .. 444
semissis 3 G. 3 P. 3 Z ... 222
triens 2 G. 2 P. 2 Z 148

Ex 3 G. 3 P. 3 Z ... 222
subtr.. 3 G. 2 P. 1 Z ... 186
Reliq. 1 P. 2 Z ... 36

Ex 2 G. 2 P. 2 Z 148
subtr. 1 P. 2 Z 36
Reliq. 2 G. 1 P 112

Ex 2 G. 1 P. 3 Z ... 142
subtr. 2 G. 1 P 112
Reliq ..... 3 Z 30

Hoc est, 1 Z .. 10, & 2 Z ... 20, id quod subductum ex 1 P. 2 Z .... 36, relinquit 1 P ... 16. Et hoc rursus ex 2 G. 1 P .... 112, remanet 2 G .... 96, hoc est, 1 G ..... 48.

XXIII.

Si milites 24 singulis diebus fodiant 16 virgas, & 18 alii quotidie 15 virgas; Quæritur, quanto tempore simul perficient vallum 4650 virgarum?

Virg.

Virg.

Add. $\begin{cases} 16. \\ 15. \end{cases}$

31

Fiat itaque: 31 virgæ perficiuntur 1 die (intellige ab omnibus simul militibus), quot diebus perficientur 4650 virgæ? facit 150 diebus.

XXIV.

Si boves aliquot intra 8 dies depascunt 5 jugera, & aliquot alii intra 7 dies 3 jugera; Quæritur, quanto temporis spatio agrum depascent $126\frac{3}{7}$ jugerum?

Dies Jugera Dies Jugera

8 — 5 — 7 | facit $4\frac{3}{8}$

add. 3 jug.

dies jug.

$7\frac{3}{8}$ jug. — 7 — $126\frac{3}{7}$ | facit 120 diebus.

XXV.

Insula ambitum habet 134 milliarium. Jam verò eodem tempore ex eodem loco duo tabellarii tendunt ad diversas partes, quorum unus 2 diebus conficit 11 milliaria, & alter 3 diebus 17 milliaria: Quæritur, quanto temporis spatio sibi invicem sint obviam venturi, ut & quot milliaria uterque absolverit?

dies mill. dies milliar

2 — 11 — 3 | $16\frac{1}{2}$

add. 17 milliar. dies milliar.

$33\frac{1}{2}$ milliar. — 3 — 134 | facit 12 diebus.

Milliaria à singulis confecta, invenies hoc modo:

dies milliar. dies milliar.

2 — 11 — 12 | 66 à 1mo perfecta

3 — 17 — 12 | 68 à 2do perfecta.

XXVI. Qui-

XXVI.

Quidam volens molere 215 modios tritici, adit molitorem 3 habentem molas, quarum primâ singulis horis molit 2 modios, secundâ 2^{bus} horis 5 modios, & tertiâ 3^{bus} horis 8 modios: Quæritur, quanto tempore totum triticum moletur, si omnibus molis imponatur, & quantum tritici singulis molis sit imponendum?

Ad evitandas fractiones, inveniatur, per 38 prop. lib. 7. Elem: Euclidis, minimus numerus, qui per 1, 2, & 3 dividi potest absque reliquo, qui est 6; instituaturque operatio, ut sequitur.

horæ modii horæ mod.
1 — 2 — 6 | facit 12
2 — 5 — 6 | facit 15
3 — 8 — 6 | facit 16 hor. mod.
summa 43 — 6 — 215 | facit 30 horis, totum triticum moletur.

Modii autem, singulis molis imponendi, sic invenientur. modii

$$43 — 215 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 15 \\ 16 \end{matrix} \right\} \text{facit} \left\{ \begin{matrix} 60 & 1^{mæ} \text{ molæ} \\ 75 & 2^{dæ} \text{ molæ} \\ 80 & 3^{tiæ} \text{ molæ.} \end{matrix} \right.$$

XXVII.

Quatuor mercenarii opus aliquod perficere possunt, videlicet,

A bis 3 septimanis
B ter 4 septimanis
C quinquies 6 septimanis
& D novies 8 septimanis. Quæritur, quanto tempore id ipsum simul laborantes, absolvent?

Sep-

Septim. vicibus. Septim. vicibus

3 — 2 — 24	facit 16
4 — 3 — 24	facit 18
6 — 5 — 24	facit 20
8 — 9 — 24	facit 27

summa 81 vicibus, simul perficiunt opus 24 septimanis.

vices Septim. vicis

81 — 24 — 1 | facit $\frac{8}{27}$ Septimanis, hoc est, 2 diebus, & $1\frac{7}{9}$ horis opus hoc simul perficere possunt.

XXVIII.

Fons aliquis habet 4 epistomia A, B, C, D, infra quæ labrum existit, quod per A impletur 8 horis, per B 9, per C 12, & per D 18 horis. Labrum autem hoc cum habeat 4 foramina E, F, G, H, & evacuetur per E 7, per F 6, per G 4, & per H 3 horis : Quæritur, si labrum aquâ plenum sit, & omnia simul epistomia, foraminàque aperiantur, quanto temporis spatio labrum evacuabitur?

hor. vice hor. vicibus

8 — 1 — 72	facit 9
9 — 1 — 72	facit 8
12 — 1 — 72	facit 6
18 — 1 — 72	facit 4

Hoc est, simul 27 vicibus, labrum impletur 72 horis.

vic. hor. vic.

27 — 72 — 1 | facit $\frac{8}{3}$ horis, labrum semel impletur per omnia epistomia.

hor. vice hor. vicibus

7 — 1 — 84	facit 12
6 — 1 — 84	facit 14
4 — 1 — 84	facit 21
3 — 1 — 84	facit 28

Hoc est, simul 75 vicibus, labrum evacuatur 84 horis.

vic. hor. vice

75 — 84 — 1 | facit $\frac{28}{25}$ horis, labrum semel evacuatur per omnia foramina. Quare cum interim per epistomia $\frac{21}{50}$ aquæ pars totius labri influxerit (nimirum, quantum oritur dividendo $\frac{28}{25}$ per $\frac{8}{3}$): sequitur $\frac{28}{25}$ horarum spatio reliquum duntaxat, utpote $\frac{29}{50}$ aquæ totius labri partem, per impletionem & evacuationem, elapsam esse. Unde si fiat, $\frac{29}{50}$ pars aquæ ipsius labri effluit $\frac{28}{25}$ horis, quot horis effluet 1, aqua sc. totius labri? fietque $1\frac{27}{29}$ horis.

XXIX.

Civis Leydensis emit bovem 18 libris Flandricis, erogans arrhæ nomine 8 stufros, servoque donans 12 stufros; expendit autem pro vectigali nummum septimum, id est, 15 flor. 8 stufr. & 9 den. & insuper pro impositione urbana nummum quadragesimum, id est, 2 flor. 14 stufr. dein pellem vendens, accipit 10 flor., eique contingunt 95 ℔ adipis, ℔ à $4\frac{1}{2}$ stufr. Postremò, lanei expensis iisque, quæ ipsi ulteriùs in emolumentum cedere possunt, compensatis, deprehendit, nudam carnem pendere 605 ℔. Quæritur, quanti constet 1 ℔? facit 5 stufr. $2\frac{1}{2}$ den. circiter.

18 libræ Flandricæ — 6 — 108000 ③ { 15428 ③ (division by 7)

Add.	108	flor. bovis empti	
	4	. . arrhæ	
	6	. . pecuniæ donatæ	
	15	4 2 8. nummi 7^{mi}	
	2	7 . . nummi 40^{mi}	
summa	127	1 2 8	flor. in toto expensi
subtr.	31	3 7 5	flor. iterum recepti .... 31 | 375
relinq.	95	7 5 3	flor. pro nuda carne dati

1080 ① { 27 ① (division by 40)

$4\frac{1}{2}$ stufr. { 1 ℔ adipis; 9000 ③ { 225 ③ stufr.; 40 × 95 = 1125, 2025

add. { 10 | . . . flor. pellis; 21 | 375 flor. adipis .... 21375 ③

℔	flor.	℔
605 ——	95753 ③ ——	1
	1	
	95753 ③	

95753 ③ { 158 ③ flor. (division by 605)

	158 ③ flor.
	20
vel stufr. 3	160
	16
	96
1	6
& den. 2	56

XXX.

Si quis singulis septimanis lucretur 5 flor. 8 stufr. & quotidie expendat 10 stufr. 8 den : Quæritur, quantum anni spatio superlucrabitur, assumpto anno 52 septimanarum?

Septim.	flor.	Septim.		flor.	
1 ——	54 ① ——	52	facit	280	8, lucratur in anno
dies	flor.	7	facit	191	1, expendit in anno
1 —	525 ③ —	dieb. 364	Relinq.	89	7, hoc est, 89 flor. & 14 stufr. anni spatio superlucrabitur.

XXXI.

Si quis singulis septimanis lucretur 5 flor. 8 stufr., Invenire, quantum quotidie expendere debeat, ut 89 flor. & 14 stufr. anni spatio superlucretur.

Septim. flor. Septim. flor.
1 — 54① — 52 | facit 280|8 lucratur in anno
subtr. 89|7
relinq. 191|1 anni spatio consumendum.

dies flor. dies flor.
364 — 1911① — 1 | facit 525③, hoc est, 10 stufr. & 8 den. quotidie debet expendere.

1
982
191100 ③{525 ③
364 20
10|500③

XXXII.

Si quis quotannis superlucretur 89 flor. 14 stufr. quantum superlucrabitur 13 annis, & 7 mensibus? Facit 1218 flor. 8 stufr. & 8 denarios.

897① 12 mens. superlucr.
13 anni
269|1
897|
44|85 ..6 mens. superlucr.
7|475..1 mens. superlucr.
flor. 1218|425
2
stufr. 8|50
16
3|00
5|0
den. 8|00

XXXIII. Ali-

XXXIII.

Aliquis conducit mercenarium hâc conditione, ut, si operetur, quotidie pro mercede recipiat 12 stufr., si autem ferietur, sit quotidie soluturus 8 stufros. Quæritur, quot diebus operari & feriari debeat, ut anno, 365 dierum, elapso, neuter alteri existat debitor?

stufr. dies stufr. dies

12 — 1 — 24 | facit 2 operari debet, ad 24 stufr. lucrandos.

8 — 1 — 24 | facit 3 feriari debet, ad assumptos 24 stufr. consumendos.

5 summa dierum profestorum & feriatorum, ad tantum lucrandum quantum expendendum.

Tum fiat

$5 - 365 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right\}$ facit $\left\{ \begin{matrix} 146 \text{ dies profestos} \\ 219 \text{ dies feriatos} \end{matrix} \right.$

Aliter.

NOTA, Quoniam dies, quibus operatur, multiplicati per 12 tantum producere debent, quantum reliqui multiplicati per 8: sequitur * 12 stufros ad 8 stufros eam rationem habere debere, quam dies feriati ad profestos. Sed, 4^or numeris in eadem ratione existentibus, ut se habet summa duorum priorum ad secundum, ita quoque se habet summa duorum posteriorum ad quartum, * Erit inde:

** per 19 prop. 7 libri Elem. Eucl.*

** Vide Clavium ad prop. 22 libri 7 Elem. Euclidis.*

stufr.

Add. $\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 8 \end{matrix} \right.$ stufr. summa dierum profest. & feriat.

summa 20 — 8 ———— 365 | ad 146 dies profestos, qui subducti ex 365 diebus, relinquunt 219 dies feriatos.

XXXIV.

Duo opifices opus aliquod perficiendum habent, quorum A illud perficere suscipit 30, & B 20 diebus; Quæritur, si simul operentur, quanto temporis spatio illud absolvent?

dies opus dies opera
30 — 1 — 60 | facit 2
20 — 1 — 60 | facit 3
summa 5 opera A & B simul perficiunt 60 diebus, hoc est, quinquies illud opus eodem tempore simul absolvunt.

opera dies opus
5 — 60 — 1 | facit 12 diebus A & B idem opus simul conficiunt.

Aliter.

Quoniam A prædictum opus solus perficere potest 30, & B 20 diebus; patet, si simul operantes illud aliquo tempore absolvant, dies ipsius A ad dies ipsius B, eam rationem habere, quam pars à B confecta ad partem ab A confectam; & consequenter * summam dierum A & B esse ad dies ipsius B, sicut summa duarum partium ab A & B confectarum (hoc est, totum opus) ad partem ipsius A.

* *Vt in antecedenti quæstione.*

Quare operatio instituenda est, ut sequitur.

dies
A. 30
B. 20 B dies Opus
summa dierũ A & B. 50 — 20 — 1 | facit $\frac{2}{5}$ partes operis, quas confecit A. Unde B reliquas $\frac{3}{5}$ partes confecit.

Jam fiat, A absolvit totum opus, hoc est, 1, diebus 30, quanto tempore absolvet igitur $\frac{2}{5}$ partes ipsius operis? facit 12 diebus. Unde A & B simul absolvunt opus 12 diebus, ut supra.

Adhuc aliter.

A. 30
B. 20 B A
summa. 50 — 20 — 30 | facit 12 diebus, ut ante.

XXXV.

Si Mars perficiat cursum suum 2 annis, & Jupiter 12 annis, & sint simul in primo gradu Arietis; Quæritur tempus primæ conjunctionis, ut & gradus Zodiaci, in quo illa contingat?

Con-

Conjunctionis tempus quære, ut sequitur.

Anni gradus Annus gradus
2 — 360 — 1 | facit 180
12 — 360 — 1 | facit 30 Ann. gradus
reliq. 150 — 1 — 360 | facit $\frac{12}{5}$ annis.

Vel breviùs, hoc modo:

Quoniam Jupiter cursum suum absolvit 12 annis, & Mars 2 annis: sequitur, si simul sint in primo gradu Arietis, & aliquando iterum conjungantur, annos Jovis ad annos Martis eam rationem habere, quam gradus à Marte interim confecti ad gradus Jovis: & consequenter *, differentiam annorum Jovis & Martis ad annos Martis eandem habere rationem, quam differentia graduum Martis & Jovis, hoc est, 360 gr. vel 1 periodus, ad gradus Jovis.

* *Vide Clavium 22 prop. 7. libr. Euclidis.*

Unde operatio sic se habet.

Anni
12 Jovis
2 Martis. Anni Martis. periodus seu 360 gr.
differ. 10 ——— 1 ——— 1 | facit $\frac{1}{5}$ partem periodi seu 72 gr. conficit Jupiter intra tempus 1mæ conjunctionis. Quare incidet illa in 12 gradû Geminorû.

Jam fiat, Jupiter cursum suum absolvit 12 annis, quanto tempore absolvet $\frac{1}{5}$ partem periodi seu cursus sui? facit $\frac{12}{5}$ annis. Unde Jupiter & mars $\frac{12}{5}$ annis, ut supra, conjungentur.

Adhuc aliter.

Jupiter 12
Mars 2 Mars Jupiter
differ. 10 — 2 — 12 | facit $\frac{12}{5}$ seu $2\frac{2}{5}$ annis, ut ante.

Eâdem ratione, si in horologio sint 2 indices, quorum unus bis circumagitur 1 die, & alter semel 30 diebus, atque simul, indicantes idem punctum, moveri incipiant, invenietur eosdem rursus conjunctum iri $12\frac{12}{59}$ *horis.*

XXXVI. Ali-

XXXVI.

Aliquis conducit servum, cui in anno pollicetur se daturum 30 flor. & vestem; jam verò, peractis 7 mensibus, cum inter se dissentirent, servus missionem petit, pro mercede recipiens dictam vestem & adhuc 5 flor. Quæritur, quanti prædicta vestis ipsi æstimata fuerit?

Mens. flor.
In 12 .. meretur .. 30, cum veste
subt. in 7 .. meretur .. 5, cum veste mensibus flor.
Relinq. in 5 mensibus meretur 25 flor. quot meretur in 7? | facit 35
subtr. 5 recept.
relinq. 30 flor. pro veste.

Ejusdem farinæ.

XXXVII.

Mercator 2 naves vino oneravit, in quarum 1ma sunt 150, & in 2da 240 dolia. Locum autem prætervectus, in quo vectigal solvere tenebatur, pendit pro 1ma navi unum dolium & recipit 6 flor., pro secunda verò dolium solvit & insuper 18 flor.: Quæritur, quanti dolium æstimatum fuerit?

Subtr. Subtr.
pro 240 doliis solvit 1 dol. & 18 flor.
pro 150 doliis solvit 1 dol. minus 6 flor. doliis
Relinq. pro 90 doliis ... solvit ... 24 flor. quot igitur solvit pro 150?
flor.
facit 40 pro 1ma.
add. 6 flor. receptos
fiuntque 46 flor. pro dolii pretio.

NOTA, *hasce duas quæstiones solvi etiam posse ad modum quæstionum* 18 & 19.

XXXVIII.

Aliquis debet 787 flor., quos solvere cupit dato tritico siligi

filigine, & hordeo, tritici verò modius ipsi constat 7 flor. 15 stufr., filiginis 5 flor. 5 stufr., & hordei 3 flor. 10 stufr.: Quæritur, si, sumptis 3 modiis tritici, petantur 2 modii filiginis, & sumendo 5 modios filiginis requirantur 4 modii hordei, quot modii singulorum sint recipiendi?

3 — 2
5 — 4 : 7 flor. 15 stufr. 5 flor. 5 stufr. 3 flor. 10 stufr.

15 — 10 — 8

7 flor. 15 stufr.	5 flor. 5 stufr.	3 flor. 10 stufr.
20	20	20
155 stufr.	105 stufr.	70 stufr.

155 105 70
775 1050 560
155
2325
1050 787 flor.
560 20
3935 — 15740 stufr.
1 — 4

$\begin{Bmatrix} 2325 \\ 1050 \\ 560 \end{Bmatrix}$ fit $\begin{Bmatrix} 9300, \text{quod div. per } 155 \\ 4200, \text{quod div. per } 105 \\ 2240, \text{quod div. per } 70 \end{Bmatrix}$ facit modios $\begin{Bmatrix} 60 \text{ tritici} \\ 40 \text{ filiginis} \\ 32 \text{ hordei.} \end{Bmatrix}$

XXXIX.

Dividere 14830 in 4^or partes, ita ut $\frac{2}{3}$ primæ partis sint æquales $\frac{3}{4}$ secundæ, & $\frac{5}{6}$ secundæ æquales $\frac{7}{8}$ tertiæ, & $\frac{9}{10}$ tertiæ æquales $\frac{11}{12}$ quartæ.

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ — 9.....8

$\frac{5}{6} \times \frac{7}{8}$ — 42...40; 2, 21... 20

$\frac{9}{10} \times \frac{11}{12}$ — 110.... 108; 2, 55 54

9 — 8
21 — 20
189 — 168 — 160
55 — 54
10395 — 9240 — 8800 — 8640
5, 2079 — 1848 — 1760 — 1728
1848
1760
1728
7415 — 14830 {2079, 1848, 1760, 1728} facit sing. partes {A. 4158, B. 3696, C. 4520, D. 3456}
1 — 2

21	21	8	
9	8	20	
189	168	160	160
55	55	55	54
945	840	800	640
945	840	80	80
10395	9240	8800	8640

XL.

Tres personæ dividere debent 170 flor., hâc ratione, ut $\frac{1}{2}$ partis A, $\frac{3}{4}$ partis B, & $\frac{5}{6}$ partis C omnes inter se sint æquales. Invenire singularum partes.

1 — 3 — 5
2 — 4 — 6
30 — 20 — 18
2, 15 — 10 — 9
10
9
34 — 170 flor. {15, 10, 9} facit sing. partes {A. 75 fl., B. 50 fl., C. 45 fl.}
1 — 5

2	1	1
3	4	3
6	4	3
5	5	6
30	20	18

XLI.

Quinque laniones simul conducunt agrum, cui A immittit 30 boves, pro 4 mensibus. Quæritur, quanto tempore B 40, C 24, D 20, & E 15 boves illi immittere debeant, ut tandem æqualem mercedis partem persolvant?

A. 30

A. 30 boves	boves		menses
per 4 menses	B. 40		B. 3
Divid. 120 ...per..	C. 24	fiuntque	C. 5
	D. 20		D. 6
	E. 15		E. 8

Ejusdem farinæ.

XLII.

5 Mercatores conducunt unà currum, cui A imponit 600 pondo 20 milliaribus vehenda; Quæritur, quot pondo B eidem 15, C 12, D 10, & E 8 miliaribus vehenda imponere debeant, ut æquales mercedis partes persolvant?

A. 600 ℔	milliaria		singulorum pondo
per 20 mill.	B. 15		B. 800
Divid. 12000.. per..	C. 12	fiuntque	C. 1000
	D. 10		D. 1200
	E. 8		E. 1500

XLIII.

Mercator convenit cum auriga ut vehat 2000 ℔ milliaribus 25, hâc conditione, ut pro 100 ℔, singulis milliaribus ei solvat 2 stufros. Qui, postquam 10 milliaria confecit, propter viam salebrosam, 800 ℔ exonerare fuit coactus, & cum reliquis perrexit ad locum propositũ. Quæritur, quantum pro mercede auriga recipere debeat?

℔ stufr. ℔
100 —— 2 —— 2000 | facit 40 stufr. pro 2000 ℔ uno milliari vehendis.
Milliar. stufr. Milliar.
1 —— 40 —— 10 | facit 400 stufr. pro 2000 ℔ decẽ milliaribus vehendis.

2000 ℔
℔ stufr. Subt. 800 ℔
100 —— 2 —— 1200 ℔ | facit 24 stufr. pro 1200 ℔ uno milliari vehendis.

25 mill.
milliar. stufr. Subt. 10 mill.
1 —— 24 —— 15 mill. | facit 360 stufr. pro 1200 ℔ quindecim milliaribus vehendis.
add. 400 stufr. pro 2000 ℔ decem milliaribus vehendis.
fit summa 760 stufr. seu 38 floreni, ab auriga pro mercede recipiendi.

XLIV:

Oenopola duplex habet vinum, nimirum 8 stufr. & 14 stufrorum cantharus. Vult autem mixtionem facere, ita ut dolium vini vendere possit 35 florenis. Quæritur, quot cantharos utriusque ad hanc mixtionem faciendam sumere debeat?

Mult. 35 flor.
Mult. 80 Canth. seu dolii. per 20 stufr.
per 8 stufr. fiuntque 700 stufr. constat dolium plenum vino 8 & 14 stufrorum.
fiunt 640 stufr. .... 640 subtr.
constat dolium plenum vino 8 stufrorum. Relinq. 60 stufri, quibus dolium plus constat impletum vino 8 stufr. & 14 stufrorum, quàm plenum solo vino 8 stufrorum: vel etiam, quibus canthari 14 stufrorum in dolio contenti cariores sunt cantharis 8 stufrorum, illorum loco sumptis.

stufr.
Ex 14
subt. 8 Canth. subtr. 80 Canth. dolii
6 stufr. —— 1 —— 60 stufr. | facit 10 canth. 14 stufrorum
differentia pretii unius canthari. differentia pretii cantharorum in dolio. rel. 70 canth. 8 stufrorum.

Eodem modo invenitur, si monetarius duplex habeat argentum, utpote 10 *den.*, *&* 8 *denariorum in selibra, illudq́; miscere velit, ita ut libra contineat* 19 *denarios, sumendas ipsi esse* $1\frac{1}{2}$ *selibras* 10 *den.*, *&* $\frac{1}{2}$ *selibr.* 8 *denariorum.*

Ejus.

Ejusdem farinæ.

XLV.

22 Personæ, nimirum, viri & mulieres, in symposio expenderunt 16 flor., & 16 stufr.: Quæritur, si quilibet virorum solvat 18, & quælibet mulierum 12 stufros, quot viri fuerint & mulieres.

Mult. 22 personas
per 12 stufr.
44
22
fiunt 264 stufri; .... 264 subtr.
à 22 mulieribus
expensi.

Mult. 16 flor. 16 stufr.
per 20
fiuntque 336 stufri, à viris & mulieribus unà expensi.
264 subtr.
reliq. 72 stufri, plus expensi à viris simul & mulieribus, quàm si omnes mulieres fuissent: vel etiam stufri, quos viri plus expenderunt quàm æquè multæ mulieres.

stufr.
Ex 18
subtr. 12 — vir. — stufr. — Subtr. 22 Personæ
reliq. 6 —— 1 —— 72 | facit 12 viros
reliq. 10 mulieres.

XLVI.

Ancilla forum petit, habens $9\frac{1}{2}$ stufros; ut iis poma & pira emat; ubi veniens, 10 poma ipsi offeruntur 1 stufr. & 25 pira 2 stufris. Quæritur, si utriusque fructus simul 100 habere velit, quot poma & pira seorsim accipere debeat?

poma stufr. poma
10. — 1 —. 25 | facit $2\frac{1}{2}$ stufr. constant 25 poma.
subtr. 2 stufr. pretium 25 pirorum
Reliq. $\frac{1}{2}$ stufr. quo 25 poma cariora sunt 25 piris.

Subtr.
pira stufr. pira 9½ stufr. constant 100 poma & pira simul.
25 — 2 — 100 | facit 8 stufr. constant 100 pira
relinq. 1½ stufri, quibus 100 poma & pira simul cariora sunt 100 piris, vel etiam, quibus poma in centenario contenta cariora sunt piris eorum loco sumptis.
stufr. differ. poma stufr. differ. 100
½ ——— 25 ——— 1½ | facit 75 poma
& 25 pira.

XLVII.

Quo pacto ARCHIMEDES portionem argenti, coronæ aureæ permixtam deprehenderit.

Vide Vitruvium *cap 3. lib 9.*

Rex HIERO, cum auream coronam votivam diis suis in fano quodam constituisset ponendam, immani pretio faciendam locavit, & auri certam quantitatem appendit redemptori. Qui subtiliter opus confectum Regi restituit, pondus coronæ visus præstitisse. Postea verò cum indicium factum esset, dempto auro tantundem argenti coronæ admixtum esse: Indignatus HIERO se contemptum, neque inveniens, quâ ratione id furtum, salvâ coronâ (quæ artificiosè erat confecta) deprehenderet, ARCHIMEDEM rogavit, ut in se sumeret de eo cogitationem. Is cum casu veniret in balneum, ibique, in solium descendens, animadverteret, quantum corporis sui in eo insideret, tantum aquæ extra solium effluere, duas fecisse dicitur massas æquo pondere, quo fuerat corona, unam ex auro, alteram ex argento. Cum ita fecisset, vas amplum ad summa labra implevit aquâ, in quo demisit argenteam massam, cujus quanta magnitudo in vase depressa est, tantum aquæ effluxit. Ita, exemptâ massâ, quanto minus factum fuerat, refudit, sextario mensus, ut eodem modo, quo priùs fuerat, ad labra æquaretur. Ita ex eo invenit, quantum ad certum pondus argenti certa aquæ mensura responderet. Cum id expertus esset, tum auream massam similiter pleno vase demisit, & eâ exemptâ, eâdem ratione mensurâ additâ, invenit ex aqua non tantum defluxisse, sed tantum minus, quantum minus magno corpore eodem pondere auri massa esset quàm argenti. Postea verò repleto vase in eadem aqua ipsâ

ipsâ coronâ demissâ, invenit plus aquæ defluxisse in coronam quàm in auream eodem pondere massam: & ita ex eo, quòd plus defluxerat aquæ in corona quàm in massa, ratiocinatus deprehendit argenti in auro mixtionem, & manifestum furtum redemptoris.

Cum autem VITRUVIUS de auri quantitate coronæ nullam faciat mentionem, neque etiam quâ ratiocinatione ARCHIMEDES exactam quantitatem argenti coronæ permixti invenerit, poterit Quæstio, posito pondere coronæ 10. selibrarum, & pondere aquæ effluxæ aureæ massæ 1 ℔, argenteæ verò massæ $1\frac{1}{2}$ ℔, & denique coronæ $1\frac{2}{9}$ ℔, solvi, ut sequitur.

℔

Ex $1\frac{1}{2}$, aqua effluxa argenteæ massæ.

subtr. 1, aquam effluxam aureæ massæ.

relinq. $\frac{1}{2}$ ℔, aqua plus effluxa ab argentea massa (pendente 10 selibras), quàm ab aurea massa (ejusdem ponderis).

℔

Rursus ex $1\frac{2}{9}$, aqua effluxa coronæ, sive massæ 10 selibrarum ex auro & argento conflatæ.

subtr. 1, aquam effluxam aureæ massæ ejusdem ponderis.

relinq. $\frac{2}{9}$ ℔, aqua plus effluxa à corona, ex auro & argento conflatâ, quàm si ex solo auro constitisset; vel etiam, differentia aquæ, ab argenti portione in corona plus effluxæ, quàm si ejusdem portionis loco aurum assumptum fuisset.

Tum fiat,

℔ *aquæ* dant *Selibr. arg.* quid ℔ *aquæ*? *Selibr. argenti* in corona.

$\frac{1}{2}$ ——— 10 ——— $\frac{2}{9}$ | facit $2\frac{2}{9}$, quod subductum ex 10, relinquit $7\frac{7}{9}$ *selibras auri* in corona.

Notandum autem, quòd, etiamsi satis fuisset in explorato habere pondus aquæ unius selibræ cum auri tum argenti, quoniam inde facilè aqua defluxa plurium selibrarum inveniri potuisset, ARCHIMEDES tamen duas massas ejusdem ponderis atque coronæ fecerit, ut eò certiùs quæsitum obtineret, nec parva aquæ differentia, quæ in unius selibræ pondere explorando fuerit commissa, per multitudinem selibrarum multiplicata, plus quàm par erat excresceret.

Ali-

Aliter.

Si 31 ℔ argenti ponderent 3 ℔ minus in aqua quàm in aëre, & 19 ℔ auri 1 ℔ minus in aqua quàm in aëre, ponendo coronam, ut supra, in aëre pendisse 10 selibras, at verò in aqua $9\frac{1991}{5301}$ selibras, invenie-mus argenti portionem in corona etiam hâc arte:

℔ *argenti in aëre*, pendent 28, ℔ *in aqua*, quid 19. ℔ *arg. in aëre?*

31 ——— 28 ——— 19 | facit $17\frac{5}{31}$ ℔ *in aqua*, pendent 19 ℔ argenti.

Subtr. 18 ℔ *in aqua*, pendent 19 ℔ auri.

reliqu. $\frac{26}{31}$ ℔ differentia, quâ 19 ℔ auri plus pendent in *aqua* quàm 19 ℔ argenti.

℔ *auri in aëre*, pendent 18, ℔ *in aquâ*, quid 10 *selibr. pondus cor. in aëre?*

19 ——— 18 ——— 10 | facit .... $9\frac{9}{19}$ *selibr.* pendet corona ex solo auro in *aqua*.

subtr. $9\frac{1991}{5301}$ *selibr.* pendet corona ex auro & argento permixtum in *aqua*.

Reliqu $\frac{420}{5301}$ *selibr.* differentia; quâ corona ex solo auro plus pendet in *aqua* quàm ex auro & argento conflata; vel etiam differentia, qua detractum aurum plus pendit in aqua quàm additum argentum.

Tum fiat

℔ diff. $\frac{26}{31}$ — ℔ *argent.* 19 ——— *selibr.* diff. $\frac{520}{5301}$ | facit $2\frac{2}{9}$ *selibr. argenti* in corona.

subtr. 10 *selibr. auri & argenti* in corona.

& $7\frac{7}{9}$ *selibr. auri* in corona, ut ante.

Et tantùm de Arithmeticis Quæstionibus atque Problematîs simplicibus, hoc est, quæ absque ulla radicum extractione solvi possunt. Earum autem, quæ sequuntur, prima est Plana Quæstio, cum ad quæsiti inventionem extrahi debeat √Q; *quæ verò duæ reliquæ, Solidæ sunt, cum ad illas solvendas opus sit extrahere* √C.

XLVIII.

Aliquis debet post 12 menses 17579 flor., 12 stuf., & 8 den. convenit autem cum creditore suo de eodem debito persolvendo finitis 6 mensibus, remittendo usuram u-

suræ

ſuræ denarii 20 in anno: Quæritur, quantum dicto tempore perſolvere teneatur?

NOTA: Cum 17579 flor. 12 ſtufr. & 8 den., vel 17579625③ ſolvendum poſt 12 menſes ad 17155957③ ſolvendum poſt 6 menſes eandem rationem habere debeat, quam 17155957③ ſolvendum poſt 6 menſes ad 16742500③ paratâ pecuniâ ſolvendum; patet, 17155957③ medium eſſe proportionalem numerum inter 17579625③ & 16742500③. Ad quem obtinendum, multiplicari debet 17579625③ per 16742500③, & ex eo quod fit extrahi √Q. & habebitur 17155957③.

Inſpice ſequentem operationem.

12 ſtufr. 8 den.

20 ſtufr. flor. 16

$\frac{16}{320}$ den. — 1 — $\frac{128}{200}$ den., facit $\frac{200}{320}$ vel $\frac{5}{8}$ flor. hoc eſt, in decimalibus 625③

24

Utpote dividendo 5000③ {625③.

per ... 8

Solv. poſt 12 menſ. Solv. parat. pec. Solv. poſt 12 menſ.

21 ——— 20 ——— 17579625③

20

351592500③

1 1

145850 17579625 ... ③ ſolv[dum] poſt 12 menſes.

3815925000③ { 16742500③ ſolv[dum] paratâ pecuniâ.

21 8789812500

35159250

70318500

123057375

105477750

17579625

2|94|32|68|71|56|25|00⑥

facit 1| 7| 1| 5| 5| 9| 5| 7③ Solv[dum] poſt 6 menſes, hoc eſt, 17155 flor. 19 ſtufr. & 2 den. circiter.

flor. 17155|957

20

ſtufr. 19|14

16

84

1|4

den. 2|24

XLIX.

Aliquis debet post 12 menses 17579625 (3), convenit autem cum creditore suo de eodem debito solvendo finitis 4 mensibus: Quæritur, quantum dicto tempore persolvere teneatur, si remittatur usura usuræ denarii 20 in anno? facit 17017 flor. 0 stufr. & 5 denarios.

Post 12 mens.	Parat. pec.	Post 12 mens.	Parat. pec.
21	20	17579625 (3)	facit 16742500 (3)

```
                              16742500(3)
                              8371250000
                             334850
                            669700
                          1171975
                         1004550
flor.17017|106           167425
          |  20          ______________
stufr. 0  |32            28031130625000 (6)
          |16              17579625     (3)
       1  |92            140155653125000
       3  |2              56062261250
den.5     |12            168186783750
                       252280175625
                      196217914375
                     140155653125
                    196217914375
                   28031130625
                   4|927|767|647|135|156|250|000 (9)
             facit 1| 7| 0| 1| 7| 0| 1| 6 (3)
```

post 4 menses, hoc est, 17017 flor. 0 stufr. & 5 den. circiter.

L.

Aliquis solvere debet paratâ pecuniâ 16742 flor. & 10 stufr. convenit autem cum creditore suo de eodem debito per-

persolvendo finitis 8 mensibus: Quæritur, quantum dicto tempore persolvere teneatur, habendo rationem lucri usuræ ad denarium 20 in anno?

NOTA: Cum 17579625 (3), solvendum post 12 menses, ad 17296033 (3), solvendum post 8 menses, eandem habeat rationem, quam 17296033 (3), solvendum post 8 menses, ad 17017016 (3), solvendum post 4 menses; & eandem quoque quam 17017016 (3), solvendum post 4 menses, ad 16742500 (3), solvendum paratâ pecuniâ: patet, 17017016 (3) & 17296033 (3) esse duos medios proportionales numeros inter 16742500 (3) & 17579625 (3). Ad quos inveniendos, si multiplicetur quadratum ex 16742500 (3) per 17579625 (3), & quadratum ex 17579625 (3) per 16742500 (3), & ex productis numeris extrahatur √C: fient 17017016 (3) & 17296033 (3), quæsiti numeri.

Solv. paratâ pec. Solv. post 12 menses Solv. paratâ pec. Solv. post 12 menses
20 ——— 21 ——— 16742500 (3) | facit 17579625 (3)

```
                 17579625 (3)
                 17579625 (3)
                 ------------
                 87898125
                35159250
               105477750
              158216625
             123057375
            87898125
           123057375
          17579625
          ----------------
          309043215140625 (6)
                 16742500 (3)
          ----------------------
          1545216075703 12500
         618086430281250
        1236172860562500
       2163302505984375
      1854259290843750
      309043215140625
      ---------------------------------
      5|174|156|029|491|914|062|500 (9)
facit 1|  7|  2|  9|  6|  0|  3|  3 (3)
```

post 8 menses, hoc est, 17296 flor. o stufr. & 10 den. circiter.

```
flor. 17296 | 033
            |  20
stufr.    0 |  66
            |  16
          3 |  96
          6 |   6
den.     10 |  56
```

Quo pacto hæ, aliæq; similes usuræ quæstiones compendiosè per Logarithmorum Tabulas solvendæ sint, vide cap. 17. Arithmeticæ Logarithmicæ Doctissimi Briggii.

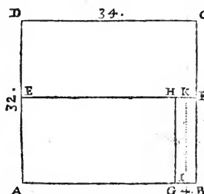
Sequuntur PROPOSITIONES GEOMETRICÆ.

PRO-

PROPOSITIONES GEOMETRICÆ.

I.

AReam quadrilateram A B C D, cujus longitudo A B vel D C est 34, & latitudo A D vel B C 32 pedum, dividere; ita ut, dempto communi angiportu G B F H, latitudinis G B, 4, pedum, parallelogramma A G H E & E F C D sint inter se æqualia.



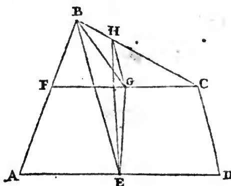
Quod ut fiat, ducatur I K ex I, medio ipsius G B, parallela G H vel B F: eritque G I vel I B 2, & A I 32. Deinde multiplicatâ A B 34 per B C 32, fit 1088, area A B C D. Cujus semissis 544, erit area gnomonis E D C B I K vel parallelogrammi A I K E. Quæ divisa per longitudinem A I 32, dabit latitudinem I K vel A E 17. indicans, quot pedes mensurandi sint ab A ad E, vel à B ad F.

II.

Trapezium A B C D dividere bifariam, rectâ E H, ductâ ex E, puncto medio lateris A D.

Constructio.

Ductâ C F parallelâ D A, junctâque EB; ex G, medio ipsius CF, agatur G H parallela E B, dico rectam E H fore quæsitam.



Demonstratio.

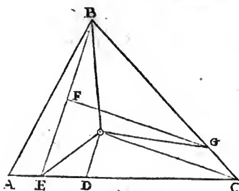
Junctis E G, G B, patet eas quadrilaterum A F C D nec non triangulum FB C dividere bifariam, & propterea segmentum A B G E semissem esse trapezii A B C D. Hinc cum A B G E compositum sit ex binis triangulis A B E, E B G; & E B G per 37 prop. lib 1. Elem. Eucl. sit æquale E B H: erit quoque ABHE (compositum ex ABE & E B H) semissis trapezii A B C D, adeoque E H linea quæsita.

III.

Triangulum A B C dividere trifariam, rectis prodeuntibus ex O puncto intra figuram, inchoatâ divisione à linea B O.

Con-

Constructio.



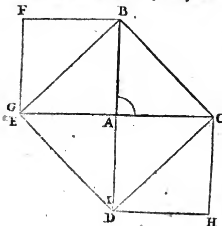
Ex O, ducatur ad D, $\frac{1}{3}$ partem ipsius AC, recta O D, & eidem ex B parallela B E, tum O E, resecans partem ABOE, tertiam totius ABC. Deinde ad distinguendas reliquas partes, ductâ O C ex F medio ipsius EB agatur ei parallela FG, & denique O G, quæ reliquas duas partes distinguit. Cujus demonstratio ex 37 prop. lib 1^{mi} Elem. Euclidis est manifesta.

IV.

In rectangulis triangulis ABC quadratum BCDE, quod à latere BC rectum angulum A subtendente describitur, æquale est quadratis ABFG, ACHI, laterum circa rectum AB, AC.

Hæc est 47 prop. libr. 1^{mi} Elem. Euclidis, alio modo demonstrata.

1^{mus} *Casus, ubi A B, A C æquales sunt*

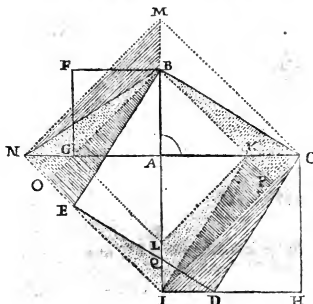


Primùm si A B sit æqualis AC, quoniam □^{tum} ABFG æquale est Δ^{lo} BED, & □^{tum} A C H I æquale Δ^{lo} BCD, atque hæc bina triangula simul constituunt □^{tum} BCDE: patet, □^{tum} BCDE æquale esse binis □^{tis} ABFG, A C H I.

Si verò AB, AC inæquales sint, sumptis A K, A L singulis æqualibus ipsi AB, jungantur BK, KL, LG, & GB.

2. Ca-

2^{dus} Casus, in quo A B, A C inæquales sunt.



Deinde sumptis A M, A N singulis æqualibus ipsi A C, agantur C M, M N, N I, & I C. Denique junctis B N, I K, productisque B G, B K ad O & P, in rectis N I, C I; secetur E D ab A I in Q.

Quibus positis, patet, ut ante, $\square^{tum}$ ABFG æquale esse Δ^{lo} BGL vel B K L, & $\square^{tum}$ ACHI æquale Δ^{lo} M C I vel MNI: ac proinde bina hæc quadrata æqualia esse plano KBMNILK. Quare, cum dicantur hæc $\square^{ta}$ æqualia esse $\square^{to}$ B C D E, ostendendum est, partes planum KBMNILK constituentes, contineri quoque in $\square^{to}$ BCDE. Quod hoc modo fit manifestum.

Figura KBEQLK utrique est communis, hoc est, simul in plano KBMNILK & in $\square^{to}$ BCDE continetur. Deinde bina Δ^{la} ENO, OBE, contenta in plano KBMNILK, æqualia sunt binis Δ^{lis} BCP, P K I, contentis in $\square^{to}$ B C D E. Similiter quoque bina reliqua Δ^{la} N M B, E D I, in plano K B M N I L K contenta, æqualia sunt binis reliquis I C D, I L K, contentis in $\square^{to}$ B C D E. Unde, cum omnes partes jam dictæ, quæ continentur in plano K B M N I L K, contineantur etiam in $\square^{to}$ BCDE, & utrobique redundet commune Δ^{lum}

IQD,

IQD, sequitur planum KBMNILK, hoc est, duo □ta ABFG & ACHI simul sumpta æqualia esse □to BCDE.

Supplementum seu demonstratio plenior.

Quoniam autem dubitare quis posset de æqualitate dictorum triangulorum, Sciendum est, in 1mo casu descriptis super AB & AC □tis ABFG & ACHI, lineas GAC & BAI [a] rectas esse: itemque, GA, AB, AC, & AI omnibus inter se æqualibus existentibus, & angulis ad A rectis, adeoque æqualibus, angulos quoque AGB, ABG, ABC, ACB, ACI, AIC, AIG, & AGI omnes [b] inter se æquales esse, & propterea [c] semirectos: ut & lineas GB, BC, CI, & IG omnes [d] inter se æquales. Id quod ostendit, junctis GB, CI, & IG, figuram GBCI esse quadratam, cujus nimirum anguli recti sunt & latera inter se æqualia ostensa. vel etiam, quòd □tum BCDE, super BC descriptum, idem sit atque illud, quod comprehenditur 4or lineis GB, BC, CI, & IG.

a p 14 Primi Elem. Eucl.
b p 5 Primi Elem. Eucl.
c p 32 Primi Elem. Eucl.
d p 4 Primi Elem. Eucl.

Eodem modo in 2do casu erunt quadratæ, figuræ MCIN & BKLG.

Quod ad 2dum casum attinet, in quo angulis BCD & ACH rectis existentibus, ab iisque subducto communi angulo ACD, relinquitur angulus BCA æqualis angulo DCH: patet, Quoniam anguli ad A & C Δli ABC æquales sunt angulis ad H & C Δli HDC; & latus AC, propter □tum ACHI, æquale lateri CH, latus quoque BC ipsi CD [e]; latusque AB ipsi DH æquale esse. Unde liquet, cum CD ducta sit ad angulos rectos ipsi CB, donec occurrat ipsi IH in D, eandem quoque ipsi BC æqualem fore: adeoque □ti BCDE angulum D cadere in rectam IH. Porrò, cum rectangulorum Δlorum NAB & BAC latus NA sit æquale lateri AC, latusque AB utrique commune: erit etiam [f] angulus ANB ipsi BCA, & angulus NBA ipsi ABC, latusque NB ipsi BC vel CD æquale. Eodem modo in Δlis AKI & ABC æqualia erunt latera IK & BC. Quoniam itaque anguli NBA & ABC æquales sunt ostensi, erunt quoque ab iisdem subductis æqualibus seu semirectis GBA & ABK, reliqui NBO & PBC æquales. Similiter, cum anguli ANB & BCA sint æquales, si ipsis addantur æquales seu semirecti INA & ACI, erunt & anguli ONB & BCP æquales. Hinc, cum Δlorum ONB & BCP anguli ad N & B sint angulis ad C & B æquales, latusque NB æquale lateri BC, erunt quoque [g] latera NO & OB lateribus

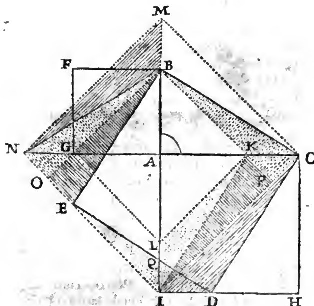
e p 26 Primi Elem. Eucl.
f p 4 Primi Elem. Eucl.
g p 26 Primi Elem. Eucl.

h p 15 Primi Elem. Eucl. Cp & PB æqualia, angulusque N O B ipsi BPC, nec non Δ^{lum} NOB ipsi Δ^{lo} BPC. Quare, angulo GNO ut & OGN, hoc est, [h] AGB, semirecto existente, adeoque [i] angulo NOG vel NOB & consequenter [k] BOE recto, angulus etiam BPC rectus erit. Ideo, quoniã anguli OBP & EBC recti sunt, & ab iisdem subducto communi EBP, anguli OBE & P B C relinquuntur æquales, & proinde bini anguli ad O & B Δ^{li} OB E æquales sunt binis ad P & B Δ^{li} PBC; latusque O B æquale BP (ut ostensum est): erit quoque latus [l] O E ipsi P C, latusque E B ipsi

i p 32 Primi Elem. Eucl.

k p 13 Primi Elem. Eucl.

l p 26 Primi Elem. Eucl.



B C æquale: adeò ut B E perpendiculari existente ipsi B C usque ad N I, illa quoque æqualis sit futura ipsi B C, ac proinde □[ti] B C D E angulus E cadet in rectam N I. Præterea, cum A M ipsi A C, hoc est, [m] ipsi I H æqualis sit, & AB ipsi DH (ut supra ostensum): erit & reliqua M B reliquæ I D æqualis. Eodem modo L I æqualis erit I D. Hinc, quoniam Δ^{li} NMB singula latera æqualia sunt singulis lateribus Δ^{li} I C D, erit quoque [n] Δ^{lum} NMB ipsi Δ^{lo} ICD æquale. Item, cum NI æqualis sit IC, & NO æqualis P C: erit reliqua OI, hoc est, [o] OB, reli-

m p Constructionem.

n p 8 Primi Elem. Eucl.

o p 6 Primi Elem. Eucl.

reliquæ IP æqualis. Est autem & OE æqualis ostensa ipsi PC, hoc est, [p] PK; & EB, hoc est, BC, æqualis ipsi IK. Quare $\triangle^{lum}$ OBE ipsi $\triangle^{lo}$ IKP [q] æquale erit. Deniq; quoniam NO, OE utraque æqualis est ostensa ipsi PC, & propterea ipsæ inter se æquales sunt; & NO [r] ipsi OG: erit etiam OE ipsi OG æqualis; quæ si auferantur ex æqualibus OI, OB, relinquunt EI æqualem GB, hoc est, LK. Unde cum IE ipsi LK, ED vel BC ipsi KI, & ID ipsi IL æqualis sit: erit itidem [s] $\triangle^{lum}$ EID ipsi $\triangle^{lo}$ ILK æquale.

p p 6 Primi Elem. Eucl.
q p 8 Primi Elem. Eucl.
r p 6 Primi Elem. Eucl.
s p 8 Primi Elem. Eucl.

SCHOLIUM.

Ex hac propositione constat, si duo $\triangle^{li}$ rectanguli latera utcunque cognita sint, quo pacto tertium latus incognitum inveniendum sit. Etenim, si ex. gr. AB sit 3, & AC 4, ad inveniendum BC: addatur 9, $\square^{tum}$ ex AB ad 16, $\square^{tum}$ ex AC, & fit 25, $\square^{tum}$ ex BC. Cujus $\sqrt{}$, utpote 5, dabit quæsitum latus BC.

Cognitis autem AB & BC, ad inveniendum AC, subducatur 9, $\square^{tum}$ ex AB, à 25, $\square^{to}$ ex BC, & relinquitur 16, pro $\square^{to}$ ex AC, cujus radix 4, est AC. Eodem modo, cognitis BC & AC, ut inveniatur AB, subtrahendum erit 16, $\square^{tum}$ ex AB, à 25, $\square^{to}$ ex BC, & ex reliquo 9, $\sqrt{}$, quæ est 3, erit latus AB.

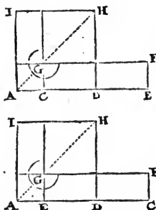
Similiter liquet, quâ ratione $\square^{tum}$ fieri possit, ut puta BCDE, quod sit æquale duobus datis $\square^{ris}$ ABFG & ACHI simul sumptis: nimirum ponendo AB latus unius ad rectos angulos ipsi AC lateri alterius. Quemadmodum etiam ex hac propositione manifestum est, quo pacto $\square^{torum}$ latera collocanda sint, ad unum $\square^{tum}$ ex altero $\square^{to}$ tollendum, & ostendendum reliquum $\square^{tum}$.

V.

Si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales AD, DC, & super utraque describatur quadratum: excedet quadratum AH majoris AD quadratum GH minoris CD vel DE rectangulo AF, contento sub aggregato & differentia earundem rectarum.

F 2 De-

Demonstratio.



Quoniam enim 3 ▭^{la} IG, GD, & DF æqualia sunt, quippe ejusdem longitudinis & latitudinis: patet, si ex gnomone IGD auferatur ▭^{lum} IG, & ejus loco addatur ▭^{lum} DF, quòd ▭^{lum} AF sit æquale gnomoni IGD. Quare cum hic gnomon sit differētia, quâ □^{tum} AH superat □^{tum} GH: excedet □^{tum} AH quadratū GH rectangulo AF, contento sub aggregato & differentia ipsarum AD, DC. Id quod cum eo convenit, quod ab Euclide in prop^{ne} 6ta libri 2^{di} Elementorum demonstratum est, ubi docet: si CD & DE sunt æquales, ▭^{lum} CAE unà cum □^{to} ex CD vel DE æquale esse □^{to} ex AD.

VI.

Si ex angulo B cujuscunque trianguli ABC in latus oppositum AC, ceu basin, demittatur perpendicularis BD, cadens extra vel intra triangulum ABC: erit differentia quadratorum, laterum AB, BC circa angulum B, æqualis differentiæ quadratorum à segmentis AD, DC, inter perpendicularem BD & basis terminos A & C comprehensis.

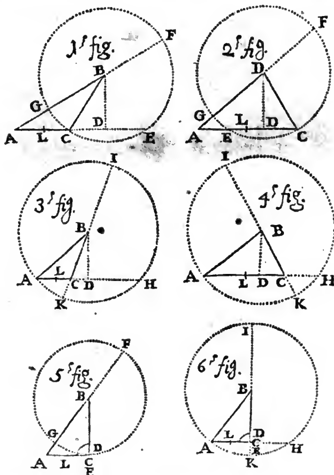
Demonstratio.

a 4 hujus, vel 47 Primi Elem. Eucl. Quoniam enim [a] □^{tum} ex AB æquale est □^{tis} ex AD & DB, & □^{tum} ex BC æquale □^{tis} ex CD & DB: tantum excedet □^{tum} ex AB ipsum □^{tum} ex BC, quantum bina □^{ta} ex AD, DB excedunt bina ex CD, DB. Sed bina □^{ta} ex AD, DB superant bina □^{ta} ex CD, DB, in quantum □^{tum} ex AD superat □^{tum} ex CD. Quare & □^{tum} ex AB tantum excedet □^{tum} ex BC, quantum □^{tum} ex AD excedit □^{tum} ex CD. Quod erat demonstrandum.

I Co-

1 Corollarium.

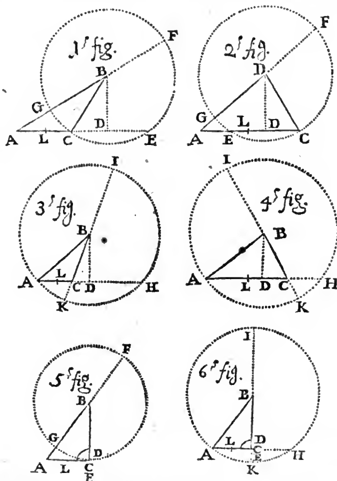
Hinc ſequitur, ſi E D ſumatur æqualis D C, quoniam [b] □tum ex AD ſuperat □tum ex D C, rectangulo CAE, contento ſub aggregato *b ꝑ præcedente prop.*



& differentiâ ipſarum A D, DC; atque etiam □tum ex A B excedat □tum ex B C rectangulo, comprehenſo ſub aggregato & differentiâ laterum A B, B C: Rectangulum C A E huic ▭lo eſſe æquale.

2 Corollarium.

Unde ulteriùs liquet, ſi ex B intervallo B C deſcribatur circulus, ſecans A B in G, eamque productam in F, quoniam tum A F ſumma



eſt, & A G differentia ipſarum A B, B C, idemque circulus tranſeat quoque per E: Quòd ▭^{lum} F A G ipſi ▭^{lo} C A E ſit æquale. Et ſi Δ^{lum} A B C fuerit rectangulum in C, quòd ▭^{lum} F A G æquale ſit □^{to} ex A C. Id quod ab Euclide etiam eſt oſtenſum 36ta prop^{ne} libr. 3^{tii} Elementorum.

3 Co-

3 Corollarium.

Similiter patet, si ex B intervallo B A circulus describatur, & A C, C B usque ad circumferentiam producantur in H, I, & K, quoniam rursus I C summa est, & C K differentia ipsarum A B, B C; atque etjam ▭^{lum} A C K, ut supra, (propter æqualitatem rectarum A D, D H) contentum sub summa & differentia ipsarum AD, DC: Quòd ▭^{lum} I C K sit æquale ▭^{lo} A C H.

Et si △^{lum} A B C sit rectangulum in C, quòd ▭^{lum} I C K sit æquale □^{to} ex A C. Id quod Euclides quoque demonstravit 14^{tâ} prop^{ne} 2^{di} libri & 35 prop. 3 libri Elementorum.

4 Corollarium.

Unde tandem manifestum fit, divisâ A C bifariam in L, quoniam tum A C dupla est A L, & A E dupla L D, adeoque ▭^{lum} C A E quadruplum ▭^{li} A L D: Quòd differentia □^{torum} ex AB BC, hoc est, ▭^{lum} FAG vel ICK sit quadruplum ▭^{li} ALD. Id quod & à Pappo demonstratum est prop^{ne} 120 libri 7 Collectionum Mathematicarum.

SCHOLIUM.

Ex hac propositione constat, quo pacto, cognitis tribus lateribus △^{li} ABC, inveniri possint segmenta basis A D, D C, & perpendicularis B D. Etenim si BD cadat extra ABC, & AB sit, ex:gr:, 20, BC 13, & AC 11: ut inveniantur AD, DC, multiplicanda erit AF 33 per A G 7, & productum 231, hoc est, ▭ FAG vel CAE, dividendum per AC 11, & habebitur AE 21. Ex qua subductâ A C 11, restabit CE 10, hoc est, 5, pro ED vel DC. Cui si addatur AC 11, fiet AD 16. *Inspice 1 figuram.*

Vel etiam hoc modo: multiplicando scilicet IC 33 per CK 7, & productum 231, hoc est, aream ▭^{li} I C K vel A C H, dividendo per A C 11, orieturq; C H 21. Cui addendo A C 11, fiet A H 32. Hujus semißis 16, erit A D vel DH. Ex qua subductâ AC 11, relinquitur C D 5. *Inspice 3 figuram.*

At verò perpendiculari B D cadente intra A B C, si A B sit, verb: gr: 15, B C 13, & AC 14: ad inveniendas A D & DC multiplicetur AF 28 per AG 2, & fit 56, ▭ FAG vel CAE. Quod divisum per AC 14, dat AE 4. Hæc autem ex AC 14 subducta, relinquit EC 10, hoc est, 5, pro ED vel DC. Quæ ex AC 14 sublatâ, restabit AD 9. *Inspice 2 figuram.*

Vel etiam sic: Multiplicetur I C 28 per CK 2, & fit ▭ ICK vel A C H 56. Quod

Inspice 4 figuram. *56. Quod divisum per A C 14, dat C H 4. Huic si addatur A C 14, fiet A H 18, cujus semissis 9 erit ipsa A D vel D H. Quæ ex A C 14 subducta relinquit D C 5.*

E quibus facilè porrò perpendicularis B D inveniri potest, quemadmodum in scholio prop^nis 4 hujus est ostensum, vel breviùs, hoc modo: Quoniam differentia quadratorum ex C D, C B, per præced. prop. est æqualis rectangulo contento sub aggregato & differentia ipsarum C D, C B; atque etiam subducto □ C D à □ C B per 4^tam hujus relinquatur □ BD: Erit ▭^lum comprehensum sub aggregato & differentia ipsarum C D, C B æquale □^to ex B D. Quare si multiplicetur 18, summa ipsarum C D, C B, per 8, earundem differentiam, erit 12, √ nimirum producti 144, ipsa longitudo BD.

Hìc quoque non ineptè ostendi potest, si △^li rectanguli A B C cognoscatur unum latus circa rectum, ut AC, & aggregatum aut differentia alterius lateris B C & Hypotenusæ A B, Quo pacto latera A B, B C seorsim sint invenienda.

Si enim A C sit, ex: gr:, 8, & summa ipsarum AB, BC, hoc est, AF vel I C 32: Dividatur 64, □ A C, hoc est, ▭ F A G vel ICK, per A F vel IC 32, orieturq; AG vel CK 2, differentia ipsarum A B, BC. Hinc si ex AF 32 auferatur AG 2, relinquetur GF 30. Cujus semissis 15 est ipsa GB, BF, vel B C. Huic si addatur AG 2, fit AB 7. Vel etiam ipsi IC 32 addendo CK 2, & habetur I K 34, cujus semissis IB vel B K 17 erit ipsa A B. E qua subducta CK 2 relinquit C B 15. *2 & 3 Corollarium.*

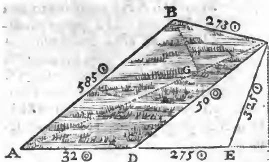
At verò existente A C 8, & A G vel C K 2, ut inveniantur A B & B C: dividatur rursus 64, □ AC, hoc est, ▭ F A G vel ICK, per A G vel CK 2, orieturq; AF vel IC 32. E qua subductâ A G 2, restabit GF 30. Cujus semissis 15, erit ipsa G B, B F, vel BC. Huic si addatur AG 2, fiet AB 17.

Vel etiam ipsi IC 32 addendo C K 2, erit summa I K 34, cujus semissis 17 erit ipsa I B, B K, vel A B. E qua sublatâ C K 2, remanet 15 pro B C.

VII.

Paludis vel stagni quadrilateri A B C D cognitis lateribus A B 58, 5①, B C 27, 3①, C D 50⓪, & A D 32⓪; productóque latere A D ad E; ita ut D E sit 27, 5①, & EC 32, 5①: invenire aream ABCD.

Quæ-

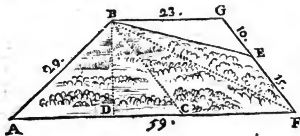


Quæratur, ut in præcedenti propositione est ostensum, ex tribus $\triangle^{li}$ D C E cognitis lateribus, segmentum externum E F, ut & perpendicularis CF. Fitque EF 12,5①, & F C 30⓪. Tum junctâ A C, multiplicetur A D 32⓪ per 15⓪, semissem nempe ipsius FC: & prodibit [a] 480⓪, area $\triangle^{li}$ A C D. Deinde additis A D 32⓪, D E 27,5①, & E F 12,5①, fit summa A F 72⓪: cujus □^{to}, utpote 5184⓪, si addatur 900⓪, □ FC, habebitur 6084⓪, [b] □ AC. Unde radix, ut 78⓪, erit ipsa A C. Jam quæratur [c] per tria latera $\triangle^{li}$ A B C perpendicularis B G, fitque B G 16, 38②. Cujus semissis ut 8, 19② si multiplicetur per AC 78⓪, exsurget 638, 82②, area $\triangle^{li}$ A B C. Quæ addita ad 480⓪, aream sc. $\triangle^{li}$ A C D, dabit 1118,82②, aream totius quadrilateri ABCD, utputa 1118 □ decempedarum, & 82 □ pedum. Quæ erat invenienda.

a p vulgarem regulam, inveniendi areā trianguli.
b p 4 hujus, vel p 47 Primi Elem. Eucl.
c ut in præced. prop. est ostensum.

VIII.

Latifundii quadrilateri A B E F, mensuranti invii, cognitis lateribus A B 29, AF 59, & FE 15 perticarum, productóque latere FE ad G, ita ut BG æquidistet ipsi AF, invenire aream ABEF, si EG sit 10, & BG 23 perticarum.



Ductâ B C parallelâ G F, erit B G [a] æqualis C F. Quare, si BG 23 auferatur ex A F 59, restabit C A 36, cumque B C sit æqualis G F 25: patet, si, ut in 6ta propositione per 3^{a} latera $\triangle^{li}$ A B C quæratur perpendicularis B D, ipsam fore 20. Cujus semissis 10 si multiplicetur

a p 34 Primi Elem. Eucl.

per 82, summam laterum parallelorum BG, A F, [b] prodibit 820, area trapezii ABGF. Tum junctâ BF, multiplicetur CF 23 per 10, semissem ipsius BD, & [c] fit 230, area △[li] CBF vel FBG. Porrò cum △[la] FBG & EBG ejusdem sint altitudinis, seu in eisdem sint parallelis CB, FG, ac proinde [d] inter se ut bases F G & E G: Hinc si fiat, ut FG 25 ad EG 10, sic 230 area △[li] FBG, ad 92 aream △[li] EBG: quâ subductâ ex tota area ABGF 820, relinquitur 728, area trapezii ABEF. Quæ erat invenienda. Idem fieri quoque potest, ut in prop[ne] sequenti 10[ma] est ostensum.

b p vulgarem regulam inveniendi aream trapezii cũ duobus lateribus parallelis.

c p vulgarem regulam inveniendi aream trianguli.

d p 1 Sexti Elem. Eucl.

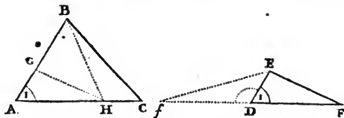
IX.

Triangula A B C, D E F æqualem angulum 1 habentia inter se sunt, ut rectangula BAC, EDF, contenta sub lateribus B A, A C & E D, D C circa æqualem angulum.

Demonstratio.

Sumptis enim AG, AH æqualibus D E, D F, agantur G H, HB, eritque [a] △ AGH æquale △[lo] DEF. Est autem ratio △[li] ABC ad △ AGH composita ex ratione △[li] ABC ad △ ABH, & ex ratione △[li]

a p 4 Primi Elem. Eucl.



ABH ad △ A G H [b]. Quare cum [c] ABC sit ad ABH, ut AC ad AH; & A B H ad A G H, ut AB ad A G: erit ratio △[li] A B C ad △ AGH composita ex ratione A C ad A H, & ex ratione A B ad A G. Sed & ratio ▭[li] B A C ad ▭ GAH [d] composita est ex ratione BA ad AG, & ex ratione A C ad A H. Erit itaque △ A B C ad △ A G H, hoc est, DEF, ut ▭ BAC ad ▭ G A H vel EDF. Quod erat demonstrandum.

b Est enim ratio extremorum cõposita ex rationibus intermediis.

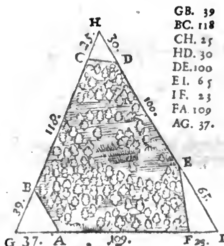
c p 1 Sexti Elem. Eucl.

d p 23 Sexti Elem. Eucl.

Idem patet in △[lis] A B C, D E*f*, quorum anguli ad A & D duobus simul

simul rectis sunt æquales: quoniam, fD æquali assumptâ & in directum ipsi DF, △ fDE ipsi △ DEF est æquale, ut & ▭ fDE ipsi ▭ EDF. e p 38 Primi Elem. Eucl.

SCHOLIUM.



Hinc liquet, quâ ratione inveniri queat area saltus aut stagni, quod triangulo includi potest. Ut ex: gr: ad inveniendam aream hexagoni ABCDEF, triangulo GHI inclusi, cujus omnes lineæ, in margine notatæ, cognitæ sunt. Quæratur 1mum *per tria latera* f *area △*li *GHI 14196. Tum fiat, ut 30758, ▭ HGI, ad 1443, ▭ BGA, ita 14196, ad 666, aream △*li *GBA. Rursus fiat, ut 35490, ▭ GHI ad 750, ▭ CHD, ita 14196 ad 300, aream △*li *CHD; ac denique ut 32955, ▭ GIH ad 1495, ▭ FIE, ita 14196 ad 644, aream △*li *FEI. Unde additis 666, 300, & 644, summa 1610 subtrahatur ex 14196, & relinquetur 12586, area hexagoni ABCDEF.* f ut in 7 prop. hujus.

X.

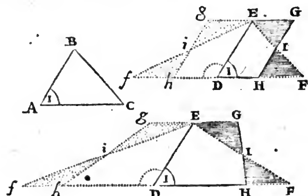
Si triangulum ABC & quadrilaterum DEGH æqualem habeant angulum 1, lateráque DH, EG sint parallela: erit triangulum ABC ad quadrilaterum DEGH, sicut rectangulum sub AC, AB ad rectangulum sub DH, EG & DE.

Demonstratio.

Sumptâ HF æquali EG in directum ipsi DH, jungatur EF, secans HG in I: eritque △ DEF æquale quadrilatero DEGH, propter æqualia △la EGI & HFI a. Hinc, cum DF sit summa ipsarum DH, a p 29 & 26 Primi Elem. Eucl.

 EG,

EG, & per præcedentem propositionem △ ABC sit ad △ DEF, hoc est, ad quadrilaterum DEGH, sicut ▭ CAB ad ▭ FDE: patet,

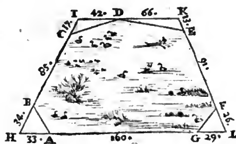


△ ABC esse ad quadrilaterum DEGH, ut ▭ sub AG, AB ad ▭ sub DH, EG & DE. Quod erat demonstrandum.

Idem similiter patet in △lo ABC & quadrilatero DEgh, quorum anguli ad A & D simul sumpti æquales sunt duobus rectis.

SCHOLIVM.

Hinc manifestum est, quo pacto area saltus stagnivé inveniri queat, quod quadrilatero includi potest, habente duo latera parallela. Si enim, verbi gr.,



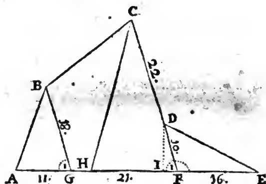
HB. 34
BC. 85
CI. 17.
ID. 42
DK. 66
KE. 13
EF. 91
FL. 26
LG. 29
GA. 160
AH. 33.

invenienda sit area heptagoni ABCDEFG, comprehensi quadrilatero HIKL, cujus latera IK, HL sunt parallela, & segmenta, ut in margine, cognita: qua-

quaratur primò, ut in 8va propne est ostensum, area trapezii HIKL 19800. Tum fiat, ut 44880, ▭ sub HL, IK & HI, ad 1122, ▭ sub HA, HB, ita 19800 ad 495, aream △li HBA. Deinde, ut 44880, ▭ sub HL, IK & HI, ad 714, ▭ sub CI, ID, ita 19800 ad 315, aream △li CID. Rursus, ut 42900, ▭ sub HL, IK & LK, ad 858, ▭ sub DK, KE, ita 19800 ad 396, aream △li DKE. Et denique ut 42900, ▭ sub HL, IK & LK, ad 754, ▭ sub GL, LF, ita 19800 ad 348, aream △li GFL. Unde additis 495, 315, 396, & 348, si summa 1554 subducatur ex 19800, relinquetur 18246, area heptagoni ABCDEFG, quæsita.

XI.

Latifundium ABCDE dividere bifariam rectâ CH, prodeunte ex angulo C; productâ CD ad F, ductâque BG parallelâ CF: datis autem AG 11, GB 18, GF 21, FD 10, DC 22, & FC 16 decempedarum.



Constructio.

Ex 1248, summâ rectangulorum AGB ex BG, CF & GF, subtrahatur 160, ▭ DFE, ac reliqui 1088 semissis 544 dividatur per CF 32, orietur HF 17 decempedarum.

Demonstratio.

Per prop. præced. areæ ABG, GBCF, FDE, ut & area HCF inter se sunt, ut ▭^{la} sub AG, CB, sub BG, CF & GF, sub DF, FE, & sub HF, FC. Hinc si CH dividat aream ABCDE bifariam, erunt bina rectangula sub HF, FC & sub DF, FE dimidium trium prædictorum sub AG, GB, sub BG, CF & GF, & sub DF, FE, hoc est, æqualia erunt semissi ▭^{li} sub AG, GB, semissi ▭^{li} sub BG, CF & GF, & semissi ▭^{li} sub DF, FE. A quibus si utrinque auferatur ▭ sub DF, FE, erit reliquum ▭ sub HF, FC æquale semissi rectangulorum sub AG, GB, & sub BG, CF & GF, dempto ex eisdem dimidio ▭^{lo} sub DF, FE. E quibus patet, additis ▭^{lis} sub AG, GB, & sub BG, FC & GF, si ex summa auferatur ▭ sub DF, FE, semissem reliqui fore ▭ sub HF, FC. Id quod divisum per CF, unum latus, dat alterum HF. Quod quærebatur.

SCHOLIUM.

Porrò si quæratur area ABCDE, mensuranda erit aliqua perpendicularium ex B, C, vel D in AE demissarum, ut ex: gr: DI. Quæ & per calculum obtineri potest juxta prop. 6 hujus, explorata primum longitudine DE. Quare, si, verb. gr., DI sit 9 perticarum, fiat ut FD 10, ad DI 9, ita 1408, summa 3^{um} ▭^{lorum} sub AG, GB, sub BG, CF & GF, & sub DF, FE, ad 4^{tum} 12672(1), cujus dimidium 6336(1), dabit aream ABCDE.

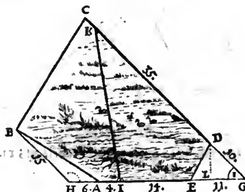
XII.

Area ABCDE mensuranti invia, inclusa trapezio HBCG, cujus latera HB & GC sunt parallela, dividenda est bifariam, rectâ IK, prodeunte ex dato puncto I in latere AE. Jam quæritur, si BH sit 15, HA 6, AI 4, IE 14, EG 11, GD 10, & DC 35 pertic. seu decempedarum, quanta sit futura CK?

Con-

Constructio.

Subducto 90, ▭^{lo} BHA, ex 2210, summâ ▭^{lorum} EGD, & sub BH, CG & HG, reliqui 2120 semissis 1060 si dividatur per IG 25,



orietur GK $42\frac{2}{5}$ seu 424①. Quæ ex tota GC 45⓪ ablata, relinquit CD 26①. Cujus demonstratio fit ad modum prop^{nis} proximè præcedentis.

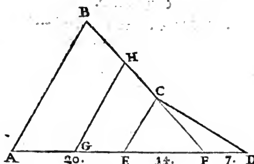
SCHOLIUM.

Porrò ad inveniendam aream ABCDE, metienda erit una perpendicularium ex B vel D, ut, ex: gr:, DL. quæ & per calculum obtineri potest, ut in 6ta propositione est ostensum, exploratâ priùs longitudine ED. Hinc, si DL sit ex: gr: 6 pertiarum: fiat ut GD 10 ad DL 6, ita 1900, differentia, quâ ▭ sub BH, CG & HG excedit bina ▭^{la} BHA, EGD, ad 4^{tum} 1140. Cujus semissis 570, erit area ABCDE.

XIII.

Latifundium quadrangulum ABCD, cujus latus BC est productum ad F, in eoque ducta CE parallela ipsi AB, dividendum est bifariam rectâ GH ipsi AB parallelâ: Quæritur punctum G, ubi illa incidet in rectam AD, si AE sit 20, EF 14, & FD 7 perticarum?

Con-



Constructio.

Ex 1156, □ A F, subducto 98, ▭ E F D: erit 23, radix ex 529, semisse reliqui, longitudo G F.

Demonstratio.

[a] 1 Sexti Elem. Eucl.
[b] 22 Quinti Elem. Eucl.
[c] 19 Sexti Elem. Eucl.

Per 19 prop: 6[ti] lib: Elem. Euclidis △ A B F est ad △ E C F, ut □ AF ad □ EF. Est autem [a] △ E C F ad △ FCD, ut EF ad F D, hoc est, assumptâ communi altitudine E F, ut □ ex EF ad ▭ EFD. Unde & [b] △ ABF ad △ FCD erit, ut □ ex A F ad ▭ EFD. Porrò [c] △ A B F est quoque ad △ G H F, ut □ ex A F ad □ ex G F. Quare △[la] A B F, G H F, & F C D inter se erunt, ut □[ta] ex AF, GF, & ▭ EFD inter se. Est autem per constructionē □ ex GF dimidium differentiæ, quâ □ ex AF excedit ▭ EFD. Unde & △ G H F dimidium erit differentiæ, quâ △ ABF excedit △ FCD. Quare si illîc semel & hîc bis addatur △ FCD, erunt △[la] GHF & FCD simul sumpta, hoc est, area G H C D, dimidium △[lorum] A B F, & F C D simul sumptorum, hoc est, dimidium quadranguli A B C D; adeóque recta G H dividens ABCD bifariam. Quod erat faciendum.

Corollarium.

Ex ostensis patet, △ A B F esse ad △ FCD, ut □ A F ad ▭ EFD.

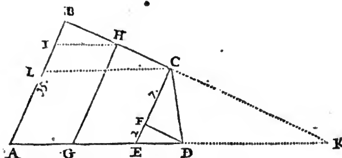
XIV.

Fundus quadrangulus ABCD, in quo CE parallela ducta est

est ipsi AB, & DF ipsi BC, dividendus est bifariam rectâ GH ipsi AB parallelâ. Quæritur, quâ ratione id fieri debeat, ut & quanta futura sit longitudo lineæ GH, si AB sit 15, EF 2, & FC 7 perticarum.

Constructio.

Additis 225, □ AB, & 63, ▭ ECF, erit 12, √ ex semisse summæ, longitudo lineæ GH. Hinc si ab A ad I mensurentur 12 perticæ, &



ducatur IH ipsi AD parallela, donec occurrat ipsi BC in H: erit HG, ducta ex H ipsi AB parallela, secans quæsita.

Demonstratio.

Etenim productis AD, BC donec concurrant in K, erit [a] △ ABK ad △ ECK, ut □ AB ad □ EC. Est autem [b] △ ECK ad △ DCK, ut EK ad DK, vel EC ad CF, hoc est, assumptâ communi altitudine EC, ut □ EC ad ▭ ECF. Erit igitur [c] △ ABK ad △ DCK, ut □ AB ad ▭ ECF. Sed ut △ ABK est ad △ GHK, ita quoque [d] est □ AB ad □ GH. Unde △la ABK, GHK, & DCK inter se erunt, sicut □ta ex AB, GH, & ▭ ECF inter se. At verò per constr. □ GH dimidium est □ti AB & ▭li ECF. Quare etiam △ GHK dimidium erit △lorum ABK & DCK. Jam cum bina hæc bis contineant △ DCK & semel quadrangulum ABCD, sed GHK semel tantùm idem △ DCK unà cum trapezio GHCD: patet △ DCK semel, unà cum trapezio GHCD, dimidium esse ejusdem △li DCK bis sumpti, unà cum quadrangulo ABCD; adeóque si illîc semel & hîc bis auferatur

a p 19 Sexti Elem. Eucl.
b p 1 Sexti Elem. Eucl.
c p 22 Quinti Elem. Eucl.
d p 19 Sexti Elem. Eucl.

△ D C K, reliquum prius GHCD dimidium esse reliqui posterioris ABCD: ac proinde lineam GH secare quadrangulum ABCD bifariam. Quod erat faciendum.

Corollarium.

Ex demonstratis patet: △ ABK esse ad △ DCK, ut □ AB ad ▭ ECF.

SCHOLIVM.

Porrò, ut inveniatur, ubinam GH cadat in AD, exploranda priùs erit E D, quæ si, verb: gr:, sit 6 pert.; erit [e] propter similitudinem △lorum EFD, I B H, ut F E 2 ad E D 6, sic B I 3 ad IH vel AG 9. Ostendens perticas, quibus secans GH distare intelligitur à puncto A versus D in rectâ AD.

e p 4 Sexti Elem. Eucl.

Denique, AB parallelâ existente ipsi C D, hoc est, C D eâdem existente quæ C E, quia tum ▭ E C F idem est ac □ E C, ad dividendum trapezium A B C E bifariam, addemus □ta ex AB & E C: erit enim, ut ante, √ ex semisse summæ longitudo secantis GH. Vt si AB fuerit 31, & EC 17 pert., invenietur G H 25 perticarum.

Cæterùm ut constet, ubi hæc incidat in AE, explorata prius A E, quæ sit, verb: gr:, 21 pert.; subtrahemus G H, hoc est, AI 25, ex AB 31, & restabit I B 6; nec non EC, hoc est, A L 17, ex A B 31, & restabit L B 14. Tum fiat propter △la similia B L C & B I H, ut BL 14 ad L C, hoc est, AE 21, sic BI 6 ad IH vel AG 9. Eodem modo si GH dividat ABCE, ut ante, erit □ ex GK semissis □torum ex A K & E K.

XV.

Agrum quadrangulum ABCD, in quo BE, CF perpendiculares sunt ipsi A D, & B C producta ad G, dividere bifariam rectâ H I ad A D perpendiculari, & invenire in quod punctum ipsius A D incidat, si A E sit 13, EF 9, F G 5, & GD 8 perticarum.

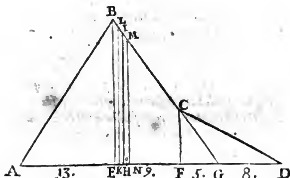
Constructio.

Subducto 40, ▭ F G D, ex 378, ▭ AGE: erit 13, √ ex 169, semisse reliqui, longitudo HG.

De-

Demonstratio.

Per 1^{mam} prop. 6 lib. Elem. Eucl. △ ABG est ad △ EBG, ut AG ad EG, hoc est, assumptâ communi altitudine EG, ut ▭ AGE ad □ EG. Est autem [a] △ EBG ad △ HIG, ut □ EG ad □ HG. Quare *a p 19 Sexti Elem. Eucl*



[b] & △ ABG ad △ HIG erit, ut ▭ AGE ad □ HG. Sed ut △ HIG est ad △ GCD, ita est, per coroll. 13^{tiæ} prop^{nis} hujus, □ HG ad ▭ FGD. Unde constat △^{la} ABG, HIG, & GCD inter se esse, sicut ▭ AGE, □ HG, & ▭ FGD inter se sunt. Jam verò per constructionem □ HG est semissis differentiæ, quâ ▭ AGE superat ▭ FGD. Quare & △ HIG semissis erit differentiæ; quâ △ ABG superat △ GCD. Hinc si illîc semel & hîc bis addatur △ BCD, erunt bina △^{la} HIG, GCD, hoc est, area HICD, semissis binorum △^{rum} ABG, GCD, hoc est, semissis quadranguli ABCD: ac proinde linea HI secans ABCD bifariam. Quod erat faciendum. *b p 22 Quinti Elem. Eucl.*

Corollarium.

Ex demonstratis patet: △ ABG esse ad △ HIG, ut ▭ AGE ad □ HG: itemque [c] ABG ad GCD, ut ▭ AGE ad ▭ FGD, *c p 22 Quinti Elem. Eucl.*

SCHOLIUM.

Quoniam in his regionibus fossis communiter agri distingui solent, hinc si ad distinguendas prædictas æquales partes, fossa communis fodienda sit, puta, KL MN datæ latitudinis, verb: gr:, 1 perticæ seu decempedæ; ita ut abscissæ

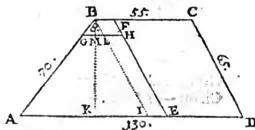
 partes

partes A B L K, & NMCD sint æquales: Sciendum est, quòd, subductis hisce partibus æqualibus ex æqualibus ABIH & H I C D, reliquæ partes KLIH & HIMN quoque sint æquales, idcirco etiam ut in Coroll. præced. prop. □ HG dimidium sit futurum □torum K G & N G. Quare, si ad inveniendas K H & H N, K N in O bifariam secetur, ac inde quoque [e] □ta KO & OG simul sint dimidium □torum KG & N G: constat bina □ta K O & O G æqualia esse □to HG, adeóque valere 169. Est autem KI 1, & K O $\frac{1}{2}$, adeóque □ KO $\frac{1}{4}$. Hoc ergo si auferatur ex 169, relinquetur □ OG 168 $\frac{3}{4}$, hoc est, OG $\sqrt{}$ 168 $\frac{3}{4}$. paulò plus quàm 1299 (2). Cui si addatur KO $\frac{1}{2}$ seu 5 (1), fit K G 1349 (2). Ex hac subductâ H G 13 (0), relinquitur K H, paulò plus quàm 49 (2): itemque ex O G 1299 (2) subductâ ON 5 (1), remanet N G 1294 (2). Hæc autem ex HG 13 (0), relinquetur paulò minus quàm 51 (2), pro HN. Ex quibus liquet, quòd, cum differentia ne unum quidem pollicem conficiat, si lineæ KL, NM ducuntur ex veris suis locis vel ex æquali utrinque latitudine à recta H I, in praxi idcirco Geodætica sit usitatum, inventâ rectâ H I, rectas K L, N M ad utramque ejus partem æqualiter sumere, siquidem tam exigua differentia nullius ibi considerationis est.

[e] p 10 Secundi Elem. Eucl.

XVI.

Trapezium ABCD, cujus latera BC & AD sunt parallela, dividere, ita ut, dempto communi itinere GBFH latitudinis BM 8 pedum, parallelogrammum EFCD sit æquale trapezio AGHE; & invenire AE vel ED, distantiam secantis FE ab angulo A vel D, si AB sit 70, BC 55, CD 65, & AD 130 pedum.



Ductâ BI parallelâ CD, quæratur ut in 8va prop. hujus latitudo BK 56. Tum fiat, ut BK 56 ad A 175, ita BM 8 ad GL 10 $\frac{5}{7}$. Quæ addita summæ ipsarum BC, AD, 185, dat 195 $\frac{5}{7}$, summam ipsarum GH, FC, & AD. Hinc, cum partes AGHE & EFCD ponantur æquales, ac proinde BK 56, latitudo partis EFCD, sit ad MK 48, latitudinem partis AGHE, sicut summa ipsarum GH, AE

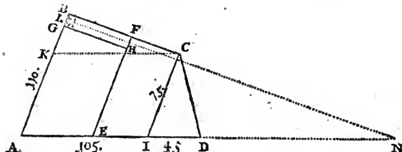
ad

ad ſummam ipſarum F C, E D: patet, ſi fiat ut 104, ſumma ipſarum B K, MK, ad MK 48, ita 195 $\frac{5}{7}$ ad 90 $\frac{3}{91}$, ſummam ipſarum F C, E D. Unde F C vel E D erit 45 $\frac{15}{91}$ pedum, adeóque A E 84 $\frac{76}{91}$ pedum. Quod erat inveniendum.

XVII.

Trapezium ABCD, in quo CI ducta eſt parallela lateri A B, dividere; ita ut, dempto communi itinere ſeu parallelogrammo GBFH, cujus latus G B ſit 10 pedum, partes AGHE & EFCD ſint æquales, & invenire punctum E in recta A D, in quod incidit recta ſecans E F ipſi A B parallela, ſi A B ſit 110, A I 105, I C 75, & I D 45 pedum.

Ad quod inveniendum operatio inſtituenda eſt, ut ſequitur.



Add. { AB. 110
IC. 75
ſumma. 185
per AI. 105
925
185
ABCI. 19425
add. ICD. 3375
ſumma ABCD. 22800
ſemiſſis ALME. 11400

Mult. IC. 75
per ID. 45
375
300
ICD. 3375

Ex A B. 110
ſubtr. IG vel AK. 75
rel KB. 35 —— KC vel AI 105 —— ſubt. { AB. 110, LB. 5 } AL. 105 | AN. 315

per AL. 105
1575
315
ALN. 33075
ſubt. ALME. 11400
EMN. 21675

Mult. KC 105
per K B. 35
525
315
KBC. 3675

KC. 105
105
525
105
□ KC. 11025

vel, KB. 35 —— KC. 105 —— EMN. 21675 | □ EN. 65025

Unde

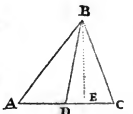
Unde extractâ radice, invenietur EN 255. Quæ subducta ex AN 315, relinquit AE 60. Ostendens quot pedes secans EF cadit à puncto A versus punctum D, super latere AD.

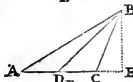
XVIII.

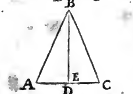
122 prop. 7 libri Pappi Alexandrini.

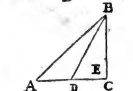
Si ex angulo B cujuscunque trianguli ABC ad punctum medium D lateris oppositi AC recta linea ducatur BD, erunt quadrata laterum AB, BC circa angulum B dupla quadratorum, quorum unum super ducta BD, & alterum super AD vel DC semisse oppositi lateris AC describitur.

Demonstratio.









a p 4 hujus vel 47 Primi Elem. Eucl.
b p 9 aut 10 Secundi Elem. Eucl.
c p 4 hujus, vel 47 Primi Elem. Eucl.
d p 12 Secundi Elem. Eucl.

Demissâ ex B super AC vel productâ AE perpendiculari BE, erunt [a] $\square^{ta}$ ex AB, BC æqualia $\square^{tis}$ ex AE, EC unà cum $\square^{to}$ ex EB, bis sumpto. Sunt autem [b] $\square^{ta}$ ex AE, EC dupla $\square^{torum}$ ex AD, DE. Dupla igitur sunt $\square^{ta}$ ex AB, BC $\square^{torum}$ ex AD, DE unà cum $\square^{to}$ ex EB. Hinc cum $\square^{ta}$ ex DE & EB [c] æqualia sint $\square^{to}$ ex DB, ac proinde eorum duplum æquale duplo $\square^{to}$ ex DB: patet, $\square^{ta}$ ex AB, BC quadratorum ex AD, DB esse dupla. Quod erat propositum.

Idem intellige, si latera AB, BC sint æqualia, & perpendicularis BE cadat in punctum D: quandoquidem $\square^{a}$ ex AD, DC tum æqualia sunt, & eadem, ut dictum est, unà cum $\square^{to}$ ex DB bis sumpto æqualia $\square^{tis}$ ex AB, BC, adeoque hæc dupla $\square^{torum}$ ex AD, DB.

Simile fit, si perpendicularis BE cadit in punctum A vel C. Quo casu $\square^{tum}$ ex AB [d] æquale erit $\square^{tis}$ ex AD, DB unà cum duplo ▭lo ADC, hoc est, duplo $\square^{to}$ ex DC. Quibus si utrinque addatur commune $\square^{tum}$

□^{tum} ex BC: erunt □^{ta} ex A B, B C æqualia 3^{bus} □^{tis} ex A D, DB, & BC, unà cum duplo □^{to} ex DC. Sunt autem □^{ta} ex BC, DC [e] æqualia □^{to} ex D B. Quocirca □^{ta} ex AB, BC æqualia erunt □^{tis} ex A D, DC, hoc est, duplo □^{to} ex A D vel D C, unà cum duplo □^{to} ex D B. Ut erat propositum. Hinc si ex angulo B, &c. Quod erat demonstrandum.

[e] *e 4 hujus, vel 47 Primi Elem. Eucl.*

SCHOLIUM.

Hinc manifestum est, si tria latera △^{li} A B C cognita fuerint, quo pacto recta BD inveniri possit. Si enim AB, ex.gr., sit 19, BC 17, & AC 20, addatur 361, □ AB, ad 289, □ BC, & summæ 650 dimidium 325 erit summa □^{torum} ex AD & DB. E qua subducto 100, □AD vel DC, restabit 225, □BD. Unde BD erit 15.

Eodem modo, si AB, BD, & BC cognita sint, & quæratur AC: addantur 361 & 289, □^{ta} AB & BC, & ex 325, semisse summæ, subducatur 225, □ BD, & relinquetur 100, □ AD vel DC. Unde AD vel DC erit 10, adeóque AC 20. Quæ quærebatur.

XIX.

Sit ABC triangulum quodcunque, cujus angulus B rectâ BD bifariam sit divisus, & ex C, alterutro angulorum A vel C descripto, intervallo CD vel AD, circulo DEF, secante rectam BD vel productam in E: dico BD ad BE esse, sicut AD ad DC, vel AB ad BC.

Demonstratio.

Si AB, BC æqualia sint, patet BD, latus AC bifariam & ad rectos angulos secare; itemque circulum DEF tangi à recta BD in puncto D: adeoque BD hoc casu sumendam esse pro duabus rectis æqualibus.

At verò AB, BC inæqualibus existentibus, demittatur ex C super BD vel productam perpendicularis CH, quæ producta occurrat ipsi AB vel productæ in I, jungaturque IE.

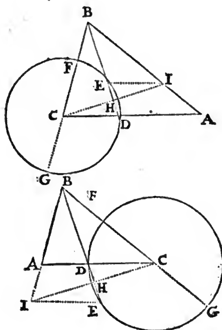
Quoniam itaque ex hypothesi anguli ad B △^{lorum} CBH & IBH sunt æquales, & anguli ad H ex constructione recti, itemque latus BH utrique △^{lo} commune: [a] erunt & reliqua latera BC, CH reli-

[a] *a 26 Primi Elem. Eucl.*

quis

b p 15 Primi Elem. Eucl.
c p 3 Tertii Elem. Eucl.

quis BI, IH æqualia. Hinc cum [b] anguli DHC & EHI △lorum DCH & IEH sint æquales, & CH æqualis HI, itemque DH [c] æqualis HE,



d p 4 Primi Elem. Eucl.
e p 27 Primi Elem. Eucl.
f p 4 Sexti Elem. Eucl.
g p 16 Quinti Elem. Eucl.

erit quoque [d] D C æqualis IE, & angulus D C H angulo EIH æqualis, ac proinde [e] IE ipsi AC parallela, adeoque △ BEI simile △ BDA. Unde erit [f] ut B E ad E I, hoc est, C D, ita B D ad DA: nec non BE ad BI, hoc est, CB, ita BD ad B A; hoc est, permutando [g] B E ad B D, sicut C D ad DA, vel ut CB ad B A. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Hinc patet, cognitis CB, BD, & CD, facilè inveniri B A & AD.

Si enim, verb. gr., C B sit 42, B D 45, & C D 39: Addatur C D vel CG 39 ad CB 42, & fit GB 81; Deinde subductâ CD vel CF 39 ex CB 42, reliqua F B 3 multiplicetur per G B 81, fietq; 243, ▭ G B F vel DBE. Quod divisum per D B 45 dat B E $5\frac{2}{5}$. Hinc fiat ut B E $5\frac{2}{5}$ ad B D 45, ita CD 39 ad DA 325, & CB 42 ad B A 350.

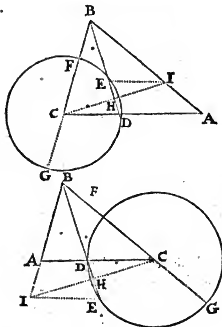
No-

NOTA, eodem modo hic procedi, ac si per tria latera △li CBD, ut in 6ta hujus, quæratur BE, quæ summa est vel differentia segmentorum basis BH, HD; ac tum fieret, ut BE $5\frac{2}{5}$ ad EI vel CD 39, ita BD 45 ad DA 325; ac rursus ut BE $5\frac{2}{5}$ ad BI vel BC 42, ita BD 45 ad BA 350.

XX.

Si ex angulo B trianguli cujuscunque ABC ad latus oppositum AC ducatur recta linea BD, angulum B bifariam secans: erit rectangulum sub lateribus AB, BC, dictum angulum B comprehendentibus, æquale rectangulo sub segmentis AD, DC oppositi lateris AC unà cum quadrato secantis BD.

Demonstratio.



Per præced. prop. EB est ad BD, sicut CD ad DA, vel CB ad BA. Sed ut EB ad BD, ita quoque est [a] assumptâ communi altitudine BD,

a 1 Sexti Elem. Eucl.

BD, ▭ EBD, hoc est, ▭ GBF ad □ BD. Similiter etiam CD est ad DA, sumendo CD communem altitudinem, ut □ CD ad ▭ CDA. Quocirca erit ut ▭ GBF ad □ BD, ita □ CD ad ▭ CDA: adeoque per 12 prop. 5ti Elem. Eucl: ut ▭ GBF unà cum □ CD vel CF, hoc est [b], □ CB, ad □ BD unà cum ▭ CDA, ita □ CD ad ▭ CDA, hoc est (ut dictum fuit) ut CD ad DA, vel CB ad BA. Sed ut CB ad BA, ita quoque est [c], assumptâ communi altitudine CB, □ CB ad ▭ CBA. Unde erit, ut □ CB ad □ BD unà cum ▭ CDA, ita idem □ CB ad ▭ CBA. Æquale igitur est [d] □ BD unà cum ▭ CDA ipsi ▭ CBA. Quod erat demonstrandum.

b p 6 Secundi Elem. Eucl.

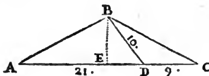
c p 1 Sexti Elem. Eucl.

d p 9 Quinti Elem. Eucl.

SCHOLIUM.

Hinc liquet, cognitis tribus △li ABC lateribus, quâ ratione inveniri possit longitudo recta BD. Etenim si AB sit 45, BC 80, & AC 100; & AC 100 dividatur in ratione AB ad BC seu 9 ad 16: fiet AD 36, & DC 64, adeóque ▭ ADC 2304. Quod subductum ex 3600, ▭ ABC, relinquit 1296, □ BD. Quare BD erit 36.

Non ineptè hîc subjungi potest, si duo latera AB, BC trianguli ABC æqualia fuerint, & ex angulo ab iisdem contento B ad basin AC utcunque ducatur recta linea BD: ▭lum ABC, sub æqualibus lateribus AB, BC comprehensum æquale esse ▭lo ADC, sub segmentis basis AC, unà cum □to ductæ BD.



Etenim ductâ BE perpendiculari ad AC, secabit ipsa angulum ABC, ut & basin AC bifariam: eritque [e] ▭ ADC unà cum □ ED æquale □ AE vel EC, hoc est, ▭ AEC. Est autem ▭ AEC unà cum □ EB, ut ostensum est, æquale ▭ ABC. Quare ▭ ADC unà cum □tis ex ED, EB, hoc est, unà cum □ BD æquale est ▭ ABC. Quod erat propositum.

e p 5 Secundi Elem. Eucl.

Unde liquet, si AD, DB, & DC cognitæ fuerint, sitq; AD 21, DB 10, & DC 9, quo pacto facilè sit invenire AB vel BC: nimirum, addendo tantùm, 189, ▭ ADC, ad 100, □ BD, & ex summa 289, ▭ ABC, extrahendo √, fiet AB vel BC 17. Item si cognoscantur AD, DC, ut & AB vel BC, quo pacto inveniri possit BD: videlicet, subtrahendo tantùm 189, ▭ ADC,

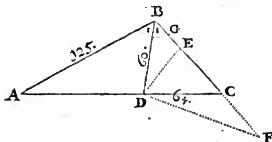
ex

ex 289, ▭ A B C, & ex reliquo 100, seu □ B D, extrahendo radicem, habebiturq; BD 10.

XXI.

Iisdem positis, si fiat ut A B ad B D, ita B D ad B E, jungaturque D E: dico rectangulum B C E æquale esse quadrato ex DC.

Demonstratio.



Quoniam enim, per præcedentem propositionem, ▭ ABC æquale est ▭ ADC unà cum □ B D, hoc est, ▭lo A B E: patet, ▭lum A B C, dempto ▭lo A B E, hoc est, ▭lum sub A B, E C, æquale esse ▭lo ADC. Unde erit [a] ut AB ad DC, ita AD ad EC. Sed ut AB ad DC, ita [b] est ▭ sub A B, D C ad □ DC: itemque ut A D ad E C, ita ▭ sub AD, BC ad ▭ BCE. Quare [c] erit ut ▭ sub AB, DC ad □ DC, ita ▭ sub AD, BC ad ▭ BCE. Est autem ▭ sub AB, D C æquale ▭lo sub AD, BC: (siquidem est AB ad BC, ut AD ad DC). Æquale igitur quoque erit [d] □ DC ipsi ▭ B C E. Quod erat demonstrandum.

a p 16 Sexti Elem. Eucl.
b p 1 Sexti Elem. Eucl.
c p 11 Quinti Elem. Eucl.
d p 14 Quinti Elem. Eucl.

1 Corollarium.

Hinc sequitur, si BF sumatur æqualis B A, jungaturque DF: △lum FBD simile esse △lo D B E; ut & △lum D E C simile △lo D B C. Siquidem F B D [e] simile est ipsi D B E, propter communem angulum ad B, & quòd F B, hoc est, A B, sit ad B D, ut D B ad B E. At verò D E C simile ipsi D B C, quoniam, præter communem angulum ad C, B C est ad C D, [f] ut D C ad C E: quippe ostensum est, ▭ BCE esse æquale □ D C.

e p 6 Sexti Elem. Eucl.
f p 17 Sexti Elem. Eucl.

2 Corollarium.

Similiter inferri poteſt; ſi circa △ D E F circulus deſcribatur, eundem g tangi à recta B D in D; ut & ſi alius deſcribatur circa D B E, ipſum tangi ab A C in D.

g p 37 Tertii Elem. Eucl.

SCHOLIVM.

Hinc ſi AB, B D, & DC cognitæ fuerint, & A B ſit 125, B D 60, & D C 64: facile ex iis invenietur B C, ut ex operatione ſequenti conſtat.

11
Divid. □ BD, hoc eſt, ▭ FBE 36000 (1) { 288 (1) BE
per FB vel BA. 125 { 144 (1) ſemiſſis, BG vel G E

144 (1)
576
576
144

Add. { 207 | 36 (2) □ GE
{ 4096 | □ DC ſeu ▭ BCE

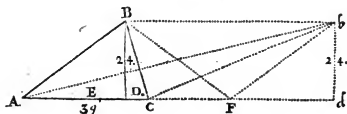
ſumma 43 | 03 | 36 (2) □ GC, per 6. 2di Elem. Eucl.
radix 6 | 5 6 (1) G C
add. 1 | 4 4 (1) BG.
ſumma 8 0 AB.

XXII.

Cognitis trianguli A B C baſi AC 39, & perpendiculari B D 24, nec non ratione lateris A B ad latus BC 8 ad 5, invenire A B & B C.

Diviſâ AC 39 in E in ratione 8 ad 5, fiet AE 24, & EC 15. Tum fiat, ut 9, differentia ipſarum A E, E C, ad AE 24, ita E C 15 ad E F vel FB 40. Deinde, cum rectanguli △li D B F duo latera D B, B F cogni-

cognita ſint, faciantque 24 & 40: erit tertium latus D F per 4tam propnem hujus 32. Quæ ſubducta ex tota AF 64, ut & eidem addita, dat A D 32, & A *d* 96, ad quorum □ta ut 1024 & 9216 ſi addatur



576, □ D B vel *d b*: habebuntur 1600 & 9792, □ta ex AB & A *b*, ac proinde 40 & √ 9792, pro A B & A *b*. Unde B C erit 25, & *b* C √ 3825.

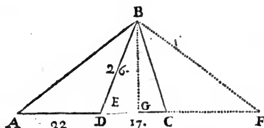
Cujus demonſtratio patet ex 2do problemate propoſitionum libri 2di tractatus noſtri de *Locis Planis Apollonii*: ubi ſimul innoteſcit, cognitis, baſi & perpendiculo △li, nec non ratione laterum reliquorum, duplicem hæc admittere ſolutionem: nimirum, AB fore vel 40 vel √9792, & B C vel 25 vel √3825, hoc eſt, conſtituunt vel acutangulum vel obtuſangulum triangulum, ſine aliqua datorum immutatione.

XXIII.

In triangulo A B C ductâ utcunque rectâ B D, dantur BD 26, AD 22, & DC 17, & quæruntur AB & BC, ſi inter ſe ſint, ut 8 ad 5?

Diviſâ A C, ut ante, in E; ita ut A E ad EC ſit, ut 8 ad 5: erit A E 24, & EC 15. Tum fiat, ut 9, differentia ipſarum AE, EC, ad AE 24, ita EC 15 ad EF vel FB 40. Deinde ſubductâ A D 22 ex AE 24, reſtabit D E 2, cui additâ EF 40, habebitur D F 42. Cognita itaque ſunt 3a latera △li D B F. Hinc ſi per ipſa, juxta 6tam hujus, quæratur DG, ut & perpendicularis BG: invenietur D G 10, & B G 24. De-

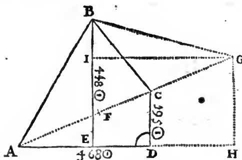
nique additis AD 22 & DG 10, si □^{to} summæ AG 32, quod est



1024, addatur 576, □ BG, fit 1600, □ AB, adeoque AB 40. Unde BC erit 25.

XXIV.

Aliquis habet agrum ABCD, cujus angulus D est rectus, & AD est 468①, DC 195①, itemque recta BE ex angulo B perpendicularis ipsi AD est 448①. Quæritur, si AB sit ad BC, ut 8 ad 5, quanta sit futura area ABCD; ut & quantitas laterum AB, BC?



Inventâ AC 507①, per 4^{tam} hujus, secetur ipsa in F, ut ante, ita ut AF ad FC sit, ut 8 ad 5: fietque AF 312①, & FC 195①. Tum fiat, ut 117①, differentia ipsarum AF, FC, ad AF 312①, ita FC 195① ad FG vel GB 520⓪. Cui additâ AF 312①, habebitur AG 832①. Deinde fiat propter similitudinem triangulorum ACD & AGH, ut AC 507① ad AG 832①, ita AD 468① ad AH 768①, & CD 195① ad GH 320⓪. Porrò subductâ GH seu IE 320⓪ ex BE 448①, restabit IB 128①, cujus □^{tum} 16384② subductum ex 270400⓪, □ BG, relinquet 254016②, □ IG: unde IG vel EH erit 504①, quâ subductâ ex AH 768①,

768①, restabit A E 264①. Cujus □tum 69696② additum ad 200704②, □ E B, dat 270400, □ A B; adeoque A B 520. Unde B C erit 325①. Denique ad inveniendam aream ABCD, multiplicetur B E 448① per 132①, semissem ipsius A E, fietque 59136②, area △li A B E. Similiter 643①, summa ipsarum B E, C D, per 102①, semissem ipsius E D, multiplicata, dabit 65586②, aream trapezii E B C D. quæ addita ad aream △li præcedentem 59136② dabit aream totius trapezii A B C D 1247, 22②, hoc est, 1247 □tarum decempedarum, & 22 □torum pedum. Quod erat faciendum.

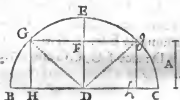
XXV.

E serie trium proportionalium datâ mediâ A, & aggregato extremarum B C: invenire extremas,

Vel:

Datam rectam B C ita secare in H, ut rectangulum sub segmentis B H, H C sit æquale quadrato rectæ datæ A. Quæ semisse rectæ secandæ B C non sit major.

Constructio.



Descripto super B C semicirculo B E C, erigatur ex puncto medio D eidem perpendicularis DE, in quâ sumptâ DF æquali A, ducatur per F ipsi B C parallela GF g, secans hinc inde circumferentiam in punctis G, g. Ex quibus si demittantur GH, g h, perpendiculares in B C, hoc est, parallelæ ipsi DE: Dico BH & H C extremas esse, vel etiam ▭lum sub B H, H C contentum æquale esse □to ex H G vel A. Cujus demonstratio patet ex corollario 8væ propnis lib. 6 Elem. Euclidis, quod docet B H, HG, & HC esse 3 proportionales.

Similiter liquet rectam A non majorem dari debere semisse datæ B C, quandoquidem □ BD vel DC maximum est ▭, quod sub segmentis rectæ BC comprehendi potest.

Item, Problema admittere duplicem solutionem, hoc est, rectam

BC

B C simul in duobus punctis H & *h* secari, ita ut linea A sit media proportionalis inter bina ejus segmenta B H, H C vel B *h*, *h* C; vel etiam □tum ex A æquale esse ▭lo BHC vel B *h* C.

SCHOLIUM.

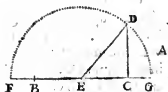
Hinc si A & B C cognita fuerint, sitq; A 12, & B C 26: ad inveniendas BH, HC, auferatur 144, □ HG vel A, ex 169, □ GD vel B D, & ex reliquo 25, seu □ HD, extrahatur radix, erit H D 5. Quæ ex B D 13 subducta relinquit B H 8, & ipsi D C 13 addita dat HC 18. Ita ut BH, HC sint 8 & 18, vel etiam 18 & 8.

Eodem modo cognitâ areâ ▭li B H C 144, & summâ laterum B H, HC, hoc est, BC 26, inveniuntur singula.

XXVI.

E serie trium proportionalium datâ mediâ A, & differentiâ extremarum BC: invenire extremas.

Constructio.



Erectâ ex C super BC perpendiculari C D æquali A, ducatur ex E medio ipsius BC ad D recta E D; tum sumptis E F, E G æqualibus ipsi E D: dico F C, C G esse extremas.

Demonstratio.

Quoniam enim [a] F C, C D, & C G sunt 3 proportionales, & per constructionem F E est æqualis E G, ut & B E æqualis EC: erit quoque F B æqualis C G, adeoque B C differentia, quâ F C excedit CG, inter quas C D, hoc est, A, media est proportionalis. Quod erat faciendum.

a p Coroll. 8va Sexti Elem. Eucl.

SCHOLIUM.

Hinc si A & BC cognita fuerint, sitq; A 12, & BC 10: facile est invenire F C & C G. Etenim addendo 25, □ EC, ad 144, □ C D, fit 169, □ E D. Cujus radix, puta 13, erit ipsa ED, EF, vel E G. Hinc si ad F E 13 addatur

EC

EC 5, erit FC 18; at verò si ab EG 13 auferatur EC 5, fiet CG 8.

Eodem modo, quoniam [b] *▭ FCG æquale est □[10] ex CD vel A: patet, quo pacto, cognitâ areâ ▭[11] FCG 144, & differentiâ laterum FC, CG, hoc est, BC 10, inveniantur singula.* b p 14 Secundi, vel 17 Sexti Elem. Eucl.

XXVII.

E serie trium proportionalium datâ unâ extremarum AB, & aggregato mediæ & alterius extremæ BC: invenire mediam & extremam.

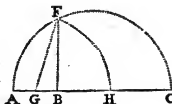
Constructio.

Positis AB, BC in directum, producatur AC ad D, donec CD sit æqualis CB; dividaturque AD per 25 prop. hujus in E, ita ut ▭ AED sit æquale □ CD, hoc est, ut CD sit media proportionalis inter AE & ED. Dico CE esse mediam, & ED alteram extremam.

Demonstratio.

Quoniam enim per constructionem AE est ad CD, sicut CD ad ED: erit quoque dividendo [a] AB unà cum CE ad CD, sicut CE ad ED. Hinc cum sit ut tota AB unà cum CE ad totam CD, ut ablata CE ad ablatam ED: [b] erit & reliqua AB ad reliquam CE, sicut tota ad totam, seu ablata CE ad ablatam ED. Quare AB, CE, & ED tres sunt proportionales quæsitæ. Quod erat faciendum. a p 17 Quinti Elem. Eucl. b p 19 Quinti Elem. Eucl.

Aliter.



Positis, ut ante, AB & BC in directum, inveniatur [c] inter ipsas media proportionalis BF, agaturque ex G, medio ipsius AB, recta GF. Quâ positâ à G ad H, dico BH esse mediam, & HC esse alteram extremam. c p 13 Sexti Elem. Eucl.

Quoniam enim [d] ▭ AHB unà cum □ GB æquale est □ GH, hoc est, GF: erit etiam, auferendo d p 6 Secundi Elem. Eucl.

 utrin-

e p 4 hujus. vel 47 Primi Elem. Eucl. f p 17 Sexti Elem Eucl. g p 16 Sexti Elem. Eucl. h p 17 Quinti, & corol. 4ta Quinti Elem. Eucl.

utrinque □ GB, reliquum ▭ AHB æquale reliquo □to ex BF e. Est autem f □BF similiter æquale ▭ ABC, Quocirca ▭ AHB æquale est ▭ ABC, ac proinde g AH ad AB, sicut BC ad BH, hoc est, dividendo & convertendo h AB ad BH, ut BH ad HC.

SCHOLIVM.

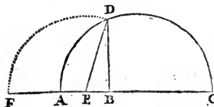
Hinc si cognita fuerint AB, BC, & AB sit 4, at BC 15: ut inveniantur BH, HC, multiplicetur 15 per 4, fit 60, ▭ ABC vel □ BF. Cui si addatur 4, □ GB, erit summa 64, □ GF: adeoq; GF vel GH 8. E qua subductâ GB 2, relinquitur BH 6. Unde HC erit 9.

Vbi porrò notandum, quo pacto per primum modum data recta AB secari posit in F extremâ ac mediâ ratione, aliter quàm ab Euclide est ostensum propne 1ma lib. 2di, aut 31 prop. 6ti lib. Elem. hoc est, ut ▭ ABF sit æquale □ AF; vel ut AB sit ad AF, sicut AF ad FB.

Etenim productâ AB, in eâq; assumptâ AC æquali semissi ipsius AB, describatur centro C intervallo CB semicirculus BEG. Deinde erectâ ex B super AB perpendiculari BD æquali AB, ductâq; ex D ipsi parallelâ DE, secante circumferentiam in E: demittatur ex E super AB perpendicularis EF. Cujus demonstratio manifesta est ex demonstratione 1mi modi sumendo CH æqualem CA.

XXVIII.

E serie trium proportionalium datâ unâ extremarum AB, & differentiâ mediæ & alterius extremæ BC: invenire mediam & extremam.



a p 13 Sexti Elem. Eucl.

Primùm, si AB sit minor extremarum: positis AB, BC in directum, inveniatur a inter ipsas media proportionalis BD, ductâque ex E, medio ipsius AB, rectâ ED, sumatur ei æqua-

æqualis EF. Dico BF esse mediam, & FC alteram seu majorem extremam.

Quoniam enim [b] ▭ BFA unà cum □ EB æquale est □ EF, hoc est, ED: erit quoque (auferendo utrinque □ EB) reliquum ▭ BFA æquale reliquo □ BD [c]. Est autem [d] □ BD etiam æquale ▭ ABC. Æquale igitur erit ▭ BFA ipsi ▭ ABC. Unde erit [e] ut AB ad FA, sic BF ad BC, hoc est, per compositionem rationis contrariam [f], AB ad BF, sicut BF ad FC. Quod est primum.

Deinde si AB sit major extremarum, sumptâ in eadem BC, [g] inveniatur inter AC & CB media proportionalis CD, jungatur que BD. Tū descripto super EB semicirculo EFB, & in eo [h] collocatâ BF æquali BD, agatur FE. Quæ si utrinque ponatur ab E ad G: Dico AB ad GB esse, sicut GB ad GC; vel etiam AB ad gB, sicut gB ad gC.

Ad quod demonstrandum, jungatur AD. Quoniam itaque [i] FB semicirculum ex E, qui per puncta G, F, g transit, tangit in F: [k] erit ▭ GBg æquale □ FB, vel BD. Est autem [l] □ BD etiam æquale ▭ ABC (siquidem [m] AB est ad BD, sicut BD ad BC). Æqualia igitur sunt ▭ GBg & ▭ ABC [n]. Unde erit ut AB ad Bg, sic GB ad BC, hoc est, per conversionem rationis [o] AB ad Ag, hoc est, GB, sic GB ad GC: vel etiam [p], ex AB & Bg auferendo GB & BC, ut tota AB ad totam Bg, ita reliqua AG, hoc est, Bg, ad reliquam gC. Quod erat secundum.

Hinc si è serie trium prop. &c. Quod erat faciendum.

b p 6 Secundi Elem. Eucl.
c p 4 hujus, vel 47 Primi Elem. Eucl.
d p 17 Sexti Elem. Eucl.
e p 16 Sexti Elem. Eucl.
f Vide Clavium ad 18 Quinti Elem. Eucl.
g p 13 Sexti Elem. Eucl.
h p 1 Quarti Elem. Eucl.
i p 16 & 31 Tertii Elem Eucl.
k p 36 Tertii Elem.
l p 17 Sexti Elem. Eucl.
m g corol. 8va Sexti Elem. Eucl.
n p 16 Sexti Elem. Eucl.
o p corol. 19na Quinti Elem Eucl.
p 19 Quinti Elem. Eucl.

SCHOLIUM.

Hinc si AB & BC cognitæ fuerint, & AB minor extremarum sit 4, at BC 3: ad inveniendas BF & FC, multiplicetur 4 per 3, & fit 12, ▭ ABC vel □ BD. Cui si addatur 4, □ EB, erit summa 16, □ ED. Hujus radix 4, erit ED vel EF. Cui additâ EB 2, habebitur FB 6. Unde FC erit 9.

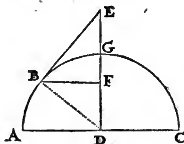
At verò si AB, major extremarum, sit 9, & BC 2: ad inveniendas GB

& GC; vel etiam g B & g C, multiplicetur rursus AB 9 per BC 2, & fit 18, ▭ ABC vel □ BD seu BF. Quod subductum ex 2025②, □^{to} ex EB, relinquit 225②, □ EF. Cujus √, ut 15①, erit ipsa EF, EG, vel Eg. Huic si addatur EB 45①, erit GB 60① seu 6. Unde GC erit 4. Vel etiam subtrahendo Eg 15① ex EB 45①, restabit g B 30① seu 3: ac proinde g C 1.

Hîc porrò notandum: CB in 2do casu majorem esse non posse 4ta parte ipsius AB, quandoquidem Problema aliàs est impossibile, & BD, hoc est, BF, in semicirculo EFB collocari nequit. Existente enim CB quartâ parte ipsius AB, erit FB, hoc est, DB aequalis diametro ejus EB: & idcirco punctum F incidet in punctum E; ita ut EB sit media, & EC altera extrema. Quo casu Problema unius tantùm erit solutionis, cum aliàs, ut patet, duplicem sortiatur.

XXIX.

Si semicirculum ABGC contingat recta BE, conveniens cum DE, quae ex centro D erecta est perpendicularis super diametrum AC: dico, si ex puncto contactus B agatur BF parallela AC, rectas DF, DG, & DE esse tres proportionales.

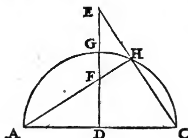


Id quod, ductâ BD, manifestum est, quippe quae per 18 prop. 3^{tii} lib. Elem. Euclidis ipsi BE est perpendicularis. Unde per Corollarium 8^{vae} prop^{nis} 6^{ti} lib. Elem. Eucl. FD erit ad DB, hoc est, DG, sicut DB seu DG ad DE. Quod erat demonstrandum.

XXX.

XXX.

Si in ſemicirculo A G H C ex A ad circumferentiam utcunque ducatur recta A H, ſecans perpendicularem D E in F: dico, ſi ex C per H recta agatur occurrens ipſi D E in E, rectas D F, D G, & D E eſſe tres proportionales.



Demonſtratio.

Quoniam enim △[la] AHC & CDE rectangula ſunt, atque angulum ad C communem habent: erunt & reliqui anguli HAC & E [a] æquales. Eodem modo, quoniam △[lum] ADF rectangulum eſt, ejuſque angulus DAF æqualis oſtenſus angulo E rectanguli △[li] CDE: erit item tertius tertio æqualis: ac proinde [b] FD ad DA, hoc eſt, DG, ſicut DC, hoc eſt, DG, ad DE. Quod erat demonſtrandum.

a p 32 Primi Elem. Eucl.

b p 4 Sexti Elem. Eucl.

Corollarium.

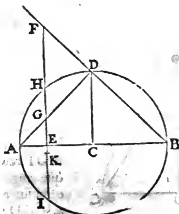
Ex hac & antecedenti propoſitione manifeſtum eſt: ſi recta A H ducatur per punctum F, in quo recta BF occurrit perpendiculari DE, tangentem B E & productam C H E in idem punctum ipſius D E convenire.

XXXI.

Si in ſemicirculo A H D B, ex diametri terminis A & B ad verticem D agantur rectæ A D, B D, quarum una B D ſurſum producatur: dico, ſi ex quolibet puncto inter A & centrum C perpendicularis erigatur ſuper A B, huic productæ occurrens in F, rectas E G, E H, & E F eſſe 3 proportionales.

Demonstratio.

Junctâ CD, quoniam, propter △^{lorum} ACD, AEG similitudinem, AC est ad CD, sicut AE ad EG; sint autem AC & CD æquales: erunt quoque AE & EG æquales. Eodem modo ob similitudinem



△^{lorum} BCD, BEF æquales erunt BE & EF. Æquale igitur est ▭ AEB ipsi ▭ GEF. Est autem [a] ▭ AEB æquale □ EH. Quare & ▭ GEF ipsi □ EH æquale erit: ac proinde [b] GE ad EH, sicut EH ad EF. Quod erat demonstrandum.

a p 14 Secundi, vel 36 Tertii Elem. Eucl.
b p 17 Sexti Elem. Eucl.

Corollarium.

Hinc sequitur, si HK sumatur æqualis HF, esse quoque EF, FH, & GK tres proportionales.

Cum enim EF ad EH sit, ut EH ad EG: erit quoque, per conversionem rationis, [c] EF ad FH, ut EH ad HG. Hinc, cum tota EF sit ad totam FH, sicut ablata EH ad ablatam HG: erit etiam [d] tota EF ad totam FH, sicut reliqua FH ad reliquam GK.

c p corol. 19na Quinti Elem. Eucl.
d p 19 Quinti Elem. Eucl.

SCHOLIUM.

Ex ostensis patet, quâ ratione hujusmodi Problema solvi possit: Descriptis super rectâ LAB duobus semicirculis AHDB & LFB sese contingentibus in B, & ex centro majoris E erectâ super LAB perpendiculari EHF: invenire utriusque diametrum, si LA sit 6, & FH 4.

Ete-

Etenim LE æquali existente ipsi EF, & AE ipsi GE: erit & LA æqualis GF. Hinc si ex GF 6 auferatur HF 4, remanebit GH 2. Quâ subductâ ex

F N D H O G K L A E C B M

HK vel HF 4, relinquitur GH 2. Tum fiat ut GK 2 ad HF 4, ita HF 4 ad EF 8. Unde LB erit 26. Ex qua subductâ LA 6, restabit AB 10. Quæ etiam hoc pacto inveniri potest.

Subtractâ FN 3, semisse sc. ipsius FG seu LA, ex FH 4, relinquitur NH vel DO 1. Tum diviso 9, $\square^{to}$ ex HO, ND, vel FN, per DO 1, oritur OM 9. Cui si addatur OD 1, erit MD vel AB 10, ut supra.

XXXII.

Si in circuli segmento ABC à vertice B ad basin productam AC utcunque ducatur recta BD. Dico, si agantur AB, BC, & CE, triangulum BCE simile esse triangulo BDC, nec non triangulum ABD simile triangulo ECD.

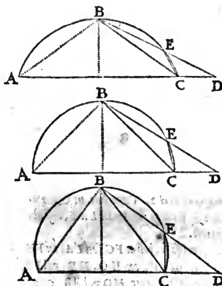
Demonstratio.

Cum enim anguli CAB & BCA sint æquales, quorum angulus CAB unà cum opposito BEC [a] est æqualis duobus rectis; nec non angulus BCA unà cum angulo sibi deinceps BCD [b] fit æqualis duobus rectis: patet angulos BEC & BCD in $\triangle^{lis}$ BCE & BDC æquales esse. Hinc cum angulus CBD iisdem $\triangle^{lis}$ sit communis, erit & tertius BCE [c] æqualis tertio D; adeoque $\angle^{lum}$ BCE simile $\triangle^{lo}$ BDC [d].

a p 22 Tertii Elem. Eucl.
b p 13 Primi Elem. Eucl.
c p 32 Primi Elem. Eucl.
d p 4 Sexti, & 1 def Sexti Elem. Eucl.

Porrò,

Porrò, quoniam, ut supra, angulus CAB unà cum angulo BEC est æqualis duobus rectis, nec non angulus CED unà cum eodem angulo BEC duobus rectis æqualis: erit angulus CAB æqualis an-



gulo CED. Quare, cum præterea angulus D posterioribus $\triangle^{lis}$ sit communis, erit pariter $\triangle$ ABD simile $\triangle^{lo}$ ECD. Quod utrumque erat demonstrandum.

Corollarium.

Ex similitudine $\triangle^{lorum}$ BCE, BDC patet: EB esse ad BC, ut BC ad BD.

SCHOLIVM.

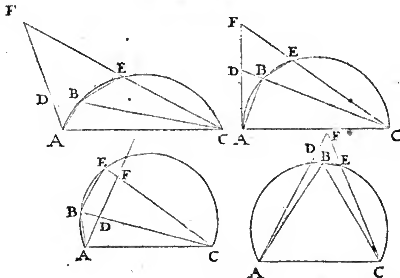
Hinc liquet, cognitis BC & BE, quo pacto inveniri possit ED. Si enim, ex:gr:, BC sit 6, & BE 4: fiat ut BE 4 ad BC 6, ita BC 6 ad BD 9. E qua subductâ BE 4, relinquitur ED 5.

XXXIII.

Si in circuli segmento ABEC recta AF cum basi AC constituat angulum FAC, æqualem ei qui in segmento ABC;

ABC: Dico, si ex C ad AF utcunque ducantur CD, CF circumferentiam secantes in B & E, junganturque AB, BE, triangulum CAD simile esse triangulo CAB, & triangulum CDF simile ttiangulo CBE.

Demonstratio.



Quoniam enim angulus DAC est æqualis angulo in segmento ABC (qui quidem omnes [a] inter se æquales sunt), atque ideo △[la] CAD & CAB præter communem angulum ad C æquales habeant angulos DAC & ABC: erit & tertius ADC tertio CAB [b] æqualis; adeoque △ CAD simile ipsi △ ACB [c].

a p 21 Tertii Elem. Eucl.

b p 32 Primi Elem. Eucl.

c p 4 Sexti, & 1 def. Sexti Elem. Eucl.

Porrò, cum bini anguli CAB, BEC sint [d] æquales duobus rectis, nec non bini ADC, CDF [e] duobus rectis æquales, quorum quidem an-

d p 22 Tertii Elem. Eucl.

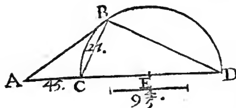
angulus A D C æqualis est ostensus angulo C A B: erit quoque angulus B E C angulo CDF æqualis. Hinc cum, præter hos æquales angulos, angulus DCF sit utrique △lo C D F & CBE communis: erunt quoque △la ipsa inter se similia. Quod utrumque erat demonstrandum.

Idem intellige, si linea A F ad quodvis aliud basis punctum in dicto angulo ducta fuerit.

XXXIV.

Si recta A B semicirculum CBD contingat in B, conveniens cum diametro producta CD in A: dico, junctis CB, BD, triangulum ACB triangulo ABD simile esse.

Demonstratio.



Quoniam enim A B semicirculum contingit in B, & à B ad terminum diametri C ducta sit recta BC eundem secans; erit angulus ad contactum A B C [a] æqualis angulo A D B, qui in alterno semicirculi segmento. Hinc cum in △lis ACB, A BD anguli AB C & ADB sint æquales, & angulus ad A utrique △lo communis: erunt etiam reliqui anguli ACB & A B D [b] æquales: adeoque [c] △ A C B simile ipsi △ ABD. Quod erat demonstrandum.

a p 32 Tertii Elem. Eucl.

b p 32 Primi Elem. Eucl.

c p 4 Sexti, & 1 def. Sexti Elem.

1 Corollarium.

Ex similitudine △lorum ACB, ABD patet, AC esse ad AB, ut AB, ad AD; itemquè AC ad AB, sicut CB ad BD.

2 Corollarium.

Hinc, cum AC, AB & AD sint 3 proportionales, & [d] 1ma A C sit ad 3am A D, sicut □ super 1ma A C ad □ super 2da A B, vel [e] sicut □ ex C B ad □ ex B D, constat: A C ad A D esse, sicut □ ex C B ad □ ex B D. Quod & à Pappo est demonstratum propne 119 libri 7.

d p Corol. 2oma Sexti Elem. Eucl.

e p 22 Sexti Elem. Eucl.

XXXV.

XXXV.

Iisdem positis, si ad AC, CB inveniatur tertia proportionalis E: dico quadratum ex CB dimidium esse rectanguli contenti sub CD & differentia ipsarum CD & E.

Demonstratio.

Quoniam enim [a] est AC ad AD, sicut □ CB ad □ BD, hoc est, □ CD minus □ CB: erit quoque [b], per compositionem rationis contrariam, AC ad AC, AD, sicut □ CB ad □ CD. Sed ut AC ad AC, AD, ita [c] est ▭ sub AC & E ad ▭ sub AC, AD & E. Quare erit, ut ▭ sub AC & E ad ▭ sub AC, AD & E, ita □ CB ad □ CD. Est autem ▭ sub AC & E æquale □ CB: cum [d] AC sit ad CB, ut CB ad E. Æquale igitur est [e] ▭ sub AC, AD & E ipsi □ CD. Hinc subducto utrinque ▭lo sub CD & E, erit reliquum ▭lum sub dupla AC & E, hoc est, duplum □tum ex CB, æquale □to ex CD minus ▭lo sub CD & E, hoc est, æquale ▭lo contento sub CD & differentia ipsarum CD & E. Quod erat demonstrandum.

a p 2 Corol. præc. propos.
b Vide Clavium ad 18 Quinti Elem. Eucl.
c p 1 Sexti Elem. Eucl.
d p hypothesin.
e p 14 Quinti Elem. Eucl.

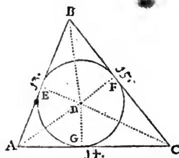
SCHOLIUM.

Facile hîc est ostendere, si cognoscantur AC & CB, quo pacto inveniri possit diameter CD. Si enim, verb: gr:, AC sit 45, & CB 21: Fiat ut AC 45 ad CB 21, ita CB 21 ad E $9\frac{4}{5}$. *Deinde cum □ CB sit 441, & ejus duplum 882, quæstio eò perducta est, ut, datis rectanguli areâ 882, & differentiâ laterum* $9\frac{4}{5}$, *per 26 prop. hujus inveniantur ipsa latera, quorum majus 35 erit diameter CD. Quæ quærebatur.*

XXXVI.

Cognitis trianguli ABC lateribus AB 13, BC 15, & AC 14: invenire radium DE, DF, vel DG circuli inscripti EFG.

Quod fiet per sequentem operationem.



AB. 13
BC. 15
AC. 14
ſumma laterum. 42
ſemiſſis 21.....21.... 21
ſubtr. ſingula latera 13.....15.... 14
3^{a} reliqua 8......6..... 7
6
42
8
Divid. productum 3^{um} reliquorum 336 { 16 $\square^{tum}$ radii.
per ſemiſſem laterum. 21   4 radix, ſeu radius DE, DF, vel DG.

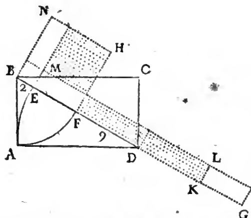
Demonſtratio.

Quoniam 336, productum ex tribus reliquis, ductum in 21, ſemiſſem laterum, per vulgarem regulam, tantum producit, quantum 84, area $\triangle^{li}$ ABC multiplicata in ſe: patet, 21, 84, & 336 eſſe proportionales. Item cum 21, ſemiſſis laterum, ductus in 4, radium circuli, efficiat 84, aream $\triangle^{li}$ ABC (quippe quæ 3^{a} continet $\triangle^{la}$ ABD, BCD, & ACD, quæ ſingula radium habent pro communi altitudine, & latera AB, BC, & AC pro baſibus; quorum quidem area

area invenitur ex multiplicatione semissis baseos per altitudinem): constat, 21, primum numerum, esse ad 84, 2^{dum}, ut 1 seu unitas ad radium 4; sed ad 336, 3^{tium}, ut 1 ad 16, □^{tum} sc. ex 4. Unde patet, si 336, productum 3^{um} reliquorum, per 21, semissem laterum dividatur, oriri 16, □^{tum} radii 4. Qui erat inveniendus.

XXXVII.

Rectanguli ABCD cognitis duobus excessibus BE, FD, quibus diagonalis BD superat utrumque latus AD, AB: invenire latera & diagonalem.



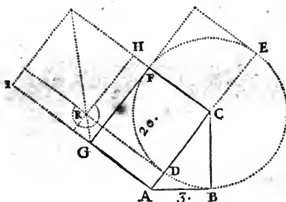
Sit enim, verb: gr:, BE 2, & FD 9. Jam ad inveniendam AB & AD, sumatur DG æqualis DE, eritque ▭ BI, contentum sub BG & GI seu BE, æquale □^{to} ex AB seu BF, hoc est, □^{to} BH. Quare, assumptâ DK æquali DF, erit gnomon NMF æqualis □^{to} BM, unàcum duobus æqualibus ▭^{lis} MF, KI: & consequenter □ MH æquale ▭^{lo} FL, quod est 36. Unde EF erit 6. ac proinde AB 8, AD 15, & diameter seu diagonalis BD 17. Quæ erant inveniendæ.

Eodem modo licet ex data differentia, inter diagonalem & latus quadrati, invenire latus & diagonalem. Si enim hæc differentia sit 2, oportet tantùm 4, duplum ipsius 2, multiplicare per 2, & ex eo quod fit extrahere radicem quadratam, quæ erit $\sqrt{8}$. Cui si addatur 2, habebitur latus $\sqrt{8} + 2$. Huic autem si rursus addatur 2, erit diagonalis $4 + \sqrt{8}$.

XXXVIII.

Trianguli rectanguli ABC cognito AB uno laterum AB, BC circa rectum angulum B, ut & producto reliquorum duorum AC, CB: invenire AC, CB, reliqua latera.

Esto AB 3, & productum ipsorum AC, CB 20. Igitur ut inveniantur AC, CB, describatur centro C intervallo CB circulus BDFE, secans AC in D; eamque productam in E. Tum descripto super CE □^{to} FE, erit completum ▭^{lum} CG 20. Deinde descripto super



GF □^{to} FI, erit AI æqualis AE, adeoque ▭ ID æquale ▭^{lo} sub EA, AD, hoc est, □^{to} ex AB 9 [a]. Est autem [b] □ IF ad ▭ FA, ut IG ad GA, vel AC ad CE. Sed ut AC ad CE, ita quoque est ▭ FA ad □ FE. Proportionalia igitur sunt 3^{a} ▭^{la} IF, FA, & FE. Hinc cum gnomon IKF, qui æqualis est ▭^{lo} ID 9, sit excessus, quo □ IF superat □ FE, quæstio eò reducta erit, ut, Datis medio 20, & differentiâ extremorum 9, 3^{um} proportionalium numerorum, per 26 Prop. hujus quærantur extremi. Quorum major 25, est □ IF, & minor 16, □ FE. E quibus si extrahantur radices, erit AC 5, & CB 4. Quæ erant invenienda.

a 36 *Tertii Elem. Eucl.*
b 1 *Sexti Elem. Eucl.*

XXXIX.

XXXIX.

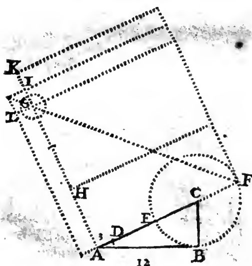
Trianguli rectanguli ABC cognito alterutro laterum circa rectum AB, & hypotenusâ AC ad latus alterum CB cognitâ AD majore existente, quàm in ratione data DC ad CB: invenire hypotenusam AC, & latus alterum CB.

Sit AB 12, AD 3, & DC ad CB, ut 2 ad 1. Igitur ut inveniantur AC, CB, describatur centro C & intervallo CB circulus BEF, secans AC in E, & eandem productam in F. Tum descripto super AF □to FG, erit, assumptâ AH æquali AE, [a] ▭ HF æquale □to ex AB 144. Deinde productâ AG, sumantur in illa GI, IK æquales AD, eritque (quia AG est æqualis AF, & AH æqualis AE) HG æqualis EF, hoc est, duplæ DE: adeoque HK dupla ipsius AE vel AH, & idcirco AK tripla ipsius AH. Patet itaque [b], ▭ KF triplum esse ▭li HF, ideoque facere 432. Est autem gnomon IFL etiam æqualis ▭lo KF. Hinc, si ad 432 addatur □ LI 9, habebitur □tum ex IA 441. Cujus radix 21, erit ipsa IA. E qua subductâ IG 3, relinquitur GA vel AF 18. Ex hac autem si rursus auferatur AD 3, restabit DF 15. Cujus triens 5, erit latus BC. Unde AC erit 13. Quæ erant invenienda.

a p 36 Tertii Elem. Eucl.

b p 1 Sexti Elem. Eucl.

SCHOLIUM.



Notandum hîc est, accidere posse, ut BC non nisi semel contineatur in AC, aliquo remanente excessu; vel etiam pluries, absque reliquo. Quocirca in primo casu operandum erit ut in 6ta Propne factum fuit, ubi ex uno latere AB circa rectum B, & differentia AE reliquorum duorum AC, CB invenimus ipsa AC & CB. Quod autem ad secundum ca-

casum attinet, sciendum est, omnem difficultatem in eo tantùm consistere, ut ex cognita rectanguli area, & ratione laterum, inveniantur ipsa latera. Si enim, ex. gr., BC contineatur in AC bis absque reliquo, erit AF tripla AE, [c] *p 36 Tertii Elem. Eucl.* *ac propterea cum ▭ HF sit 144, nimirum* [c] *æquale □to ex AB 12: erit □ ex BC 48, & BC √ 48; ac proinde AC √ 192.*

XL.

Trianguli rectanguli ABC cognito AB uno laterum AB, BC circa rectum angulum B, & aggregato hypotenusæ AC & areæ ABC: invenire hypotenusam & aream.

Esto AB 3, & aggregatum ipsius AC & areæ ABC 11. Jam ad inveniendam AC, describatur super ipsa ▭mum AD, latitudinē habens unitatis, quod unà cum area ABC faciat 11. Cui summæ si sumatur æquale △ ABE, & AC producatur donec in eam cadat perpendicularis EF: erit ▭ AD æquale △lo ACE, & altitudo EF 2. Deinde demissâ ex F super AE perpendiculari FG, producatur ipsa donec cum AB productâ conveniat in R, & ex F demittatur in AR perpendicularis FI. His positis, si 11, area △li ABE, dividatur per $\frac{3}{2}$, semissem ipsius AB, orietur BE $\frac{22}{3}$. Cujus □ additum ad 9, □ ex AB, habebitur $\frac{565}{9}$, □ ex AE. Unde AE fit $\sqrt{\frac{565}{9}}$, hoc est, $\frac{1}{3}\sqrt{565}$ vel $\frac{1}{3}\sqrt{113,5}$. Deinde ex $\frac{565}{9}$, □ ex AE, subducto 4, □ ex EF, restabit $\frac{529}{9}$, □ ex AF. Cujus √, erit $\frac{23}{3}$, ipsa AF. Tum fiat, propter similitudi-

tudinem △lorum AEF, AFG, ut AE $\frac{1}{3}\sqrt{113,5}$ ad AF $\frac{23}{3}$, ita AF $\frac{23}{3}$ ad AG $\frac{23,23}{3\sqrt{113,5}}$, & EF 2 ad FG $\frac{23,2}{\sqrt{113,5}}$. Rursus, ob similitudinem △lorum ABE, AGR, fiat ut AB 3 ad AG $\frac{23,23}{3\sqrt{113,5}}$, ita AE $\frac{1}{3}\sqrt{113,5}$ ad AR $\frac{23,23}{3,3,3}$, & BE $\frac{22}{3}$ vel $\frac{11,2}{3}$ ad GR $\frac{23,23,11,2}{3,3,3\sqrt{113,5}}$. E qua subducta FG $\frac{23.2}{\sqrt{113,5}}$, relinquitur FR $\frac{226,23,2}{3,3,3\sqrt{113,5}}$ vel $\frac{113,2,23,2}{3,3,3\sqrt{113,5}}$. Eodem modo erit, propter △la similia ABE, FIR, ut AE $\frac{1}{3}\sqrt{113,5}$ ad FR $\frac{113,2,23,2}{3,3,3\sqrt{113,5}}$, ita BE $\frac{11,2}{3}$ ad IR $\frac{2,23,2,11,2}{3,3,3,5}$. Quæ ablata ex AR, $\frac{23,23}{3,3,3}$, relinquet AI $\frac{27,23}{3,3,3,5}$ vel $\frac{3,3,3,23}{3,3,3,5}$, hoc est, $\frac{23}{5}$. Denique, ob similia △la AIF, ABC, fiat ut AI $\frac{23}{5}$ ad AF $\frac{23}{3}$, ita AB 3 ad AC 5. Unde area ABC erit 6. Quod erat faciendum.

Aliter.

Fiat ut AB 3 ad EF 2, ita BE $\frac{22}{3}$ ad quartam M, quæ ideo erit $\frac{44}{9}$. Deinde fiat, ut 5, differentia □torum ex AB, EF, ad □ ex AB 9, ita $\frac{25}{9}$, differentia ipsarum AF & M, ad AC 5. Quod hoc modo patet. *a p 19 Quinti Elem. Eucl.*

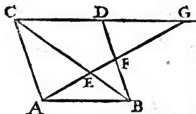
Quoniam enim per constructionem BE est ad M, ut AB ad EF; atque etiam, propter similitudinem △rum ABC, EFC, CB ad CF sit, ut AB ad EF: erit quoque [a] subductis CB, CF ex BE, M, reliqua CE ad reliquam M demptâ eidem CF, sicut AB ad EF. Sed ut AB ad EF, ita est quoque AC ad CE. Quare proportionales sunt AC, CE, & M minus CF. Hinc [b], ut □ super prima AC ad □ super 2da CE, hoc est [c], ut □ ex AB ad □ ex EF, ita 1ma AC erit ad 3tiam M minus GF. Hoc est, per conversionem rationis & convertendo [d], ut □ ex AB minus □ ex EF ad □ ex AB, ita AF minus M ad AC. Quæ erât invenienda. *b p corol. 20 Sexti Elem. Eucl.* *c p 22 Sexti Elem. Eucl.* *d per corol. 19 Quinti, & Corol. 4 Quinti Elem. Eucl.*

XLI.

Dato rhombo ABDC, cujus diagonales CB, AD: ex A

rectam lineam ducere A E F G, quæ conveniat cum latere producto CD, ita ut intercepta EF ad totam AG datam habeat rationem, ut HI ad IK.

Conſtructio.



L

H M I N K

Deſcripto ſuper H K ſemicirculo H L K, erigatur ex I ſuper ipſam perpendicularis I L, occurrens circumferentiæ in L. Tum diviſâ H I bifariam in M, jungatur M L, cui ſi ſumatur æqualis M N, fiat ut N I ad I H, ita A B ad B F: dico, ſi ex A per F recta ducatur linea, E F eſſe ad A G, ſicut H I ad I K.

Demonſtratio.

Ex demonſtratis 2^{di} modi $27^{mæ}$ $prop^{nis}$ hujus, HI, IN, & NK ſunt 3 proportionales, & per 4^{tam} prop. 6 lib. Elem. Euclidis AFB & ACG ſunt duo $\triangle^{la}$ ſimilia. Hinc ut F B ad BA, ita erit A C, hoc eſt, AB, ad C G; adeoque FB, BA, & CG 3 proportionales. Eſt autem per conſtructionem H I ad IN, ut FB ad BA. Quare HI, IN, & N K tres ſunt proportionales in eadem ratione quâ FB, BA, & CG: & proinde H I ad IN, NK, hoc eſt, IK, ita FB ad AB, CG. Jam verò ratio FB ad AB, C G compoſita eſt ex ratione F B ad B A, & ex ratione B A ad AB, CG. Quocirca & ratio HI ad IK ex iiſdem rationibus erit compoſita. Rurſus cum ratio E F ad A G componatur ex ratione F E ad EA, hoc eſt [a], FB ad BA, & ex ratione EA ad AG, hoc eſt, AC vel A B ad AB, CG, ex quibus rationibus componebatur quoque ratio H I ad I K: erit ratio E F ad A G eadem, quæ HI ad IK. Quod erat faciendum.

[a] p 3 Sexti Elem. Eucl.

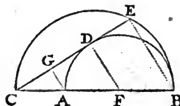
Ubi notandum, cum recta, ab A ad D ducta, ſit extrema linea, quæ juxta mentem Problematis duci poteſt, eaque per rectam CB bifariam dividatur, rationem quam E F ad A G habere debet, non majorem requiri quàm 1 ad 2, hoc eſt, ut H I non major ſit dimidiâ IK.

XLII.

XLII.

Deſcriptis ſuper recta C A B duobus ſemicirculis CEB & A D B, ſeſe tangentibus in B, & ex C ductâ C D E, tangente minorem ſemicirculum in D, & terminatâ majoris circumferentiâ in E: invenire utriuſque diametrum, ſi CD ſit 10, & D E 6.

Etenim F exiſtente centro minoris ſemicirculi A D B, jungantur B E, F D. Quæ [a] inter ſe erunt parallelæ. Tum ductâ A G parallelâ F D vel B E, erit G D æqualis D E; & C G ad C E, ut C A ad C B. Hinc ſi ex C D 10 auferatur DE vel D G 6, relinquetur C G 4; item ad CD 10 additâ DE 6, fiet CE 16. Ex quibus igitur nota eſt ratio, *a p 18 & 31 Tertii, ut & 28 Primi Elem. Eucl.*



quam CA habet ad CB, quippe eadem, quæ 4 ad 16, ſeu 1 ad 4. Deinde cum □ ex C D ſit 100, idemque [b] ſit æquale ▭lo A C B, quæſtio eò perducta erit, ut, datis ▭li ACB areâ 100, & ratione laterum C A, C B, 1 ad 4, inveniantur ipſa latera. Quod fiet, ponendo ut C A ad A C, hoc eſt, ut 1 ad 4, ita [c] ▭ A C B 100 ad □ ex CB 400. Cujus √ ut 20, erit diameter major C B. Quare, cum C B ſit ad CA, ſicut 4 ad 1: erit hæc 5, adeoque minor diameter AB 15.

b p 36 Tertii Elem. Eucl.

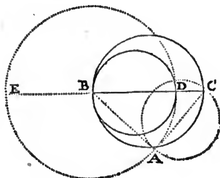
c p 1 Sexti Elem. Eucl.

XLIII.

Cognitâ duorum circulorum differentiâ, & differentiâ diametrorum D C, invenire utriuſque diametrum B D & B C.

Esto DC 8, & differentia circulorum, hoc est, area lunulæ BACBD 616. Hinc ad inveniendas BD, BC, describatur centro B intervallo BD circulus EDA, secans circulum BCA in A, junganturque BA, AC: eritque [a] descriptus circa AC circulus æqualis lunulæ BACBD, hoc est, 616. Unde facile, statuendo diame-

a 2 Duodecimi & 47 Primi Elem. Eucl.



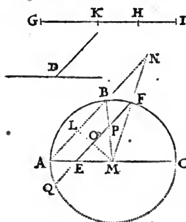
trum circuli esse ad ejus peripheriam, ut 7 ad 22, invenitur diameter AC: nimirum, si fiat ut $38\frac{1}{2}$, area ejusdem, ad aream circuli AC 616, ita 49, □tum diametri illius, ad 784, □tum diametri hujus. Unde AC fit 28. Eò itaque Problema reductum est, ut, Datis △li rectanguli ABC latere circa rectum AC 28, & DC 8, differentiâ reliquorum duorum AB, BC, invenienda sint latera AB, BC, per 6tam propnem hujus: eritque AB vel BD 45, & BC 53. Quæ invenienda proponebantur.

XLIV.

Dato semicirculo ABFC, punctum invenire E in diametro AC vel ea producta, è quo si in dato angulo D ad circumferentiam ABC recta ducatur linea EF, quadratum, quod ab ipsa describitur, ad rectangulum AEC, contentum sub rectis EA, AC, inter quæsitum punctum E & diametri AC utrumque terminum A & C interceptis, datam habeat rationem, GH ad HI.

Idem

Idem hoc ab Eutocio *ostenditur in commentariis suis super 53 & 54 prop^{um} libri 1^{mi}* Conicorum Apollonii.



Primùm igitur, si datus angulus D est rectus; requiritur, ut H G sit æqualis H I: quandoquidem si super A C utcunque ducatur perpendicularis ad circumferentiam, □^{tum} ipsius semper [a] est æquale ▭^{lo} A E C.

Quare, si D non sit rectus, ponatur primò G H esse æqualis H I, & ex centro M ducatur M F in dato angulo D, eritq; propter æqualitatem linearum A M, M F, & M C, □^{tum} M F æquale ▭^{lo} A M C. Ut requirebatur.

At verò G H majore existente quàm HI, segmento GK, constituatur angulus CAB æqualis angulo D, si is acutus sit, aut ei deinceps, si obtusus fuerit; & ex M ad medium ipsius AB ducatur ML: quæ [b] ipsi AB erit perpendicularis. Deinde fiat, ut GK ad GI, hoc est, ut differentia ipsarum G H, H I ad earundem summam, ita LB ad LN, jungaturque NM, secans circumferentiam in F. Dico si ex F ad A C ducatur FE parallela A B, hoc est, in dato angulo D, □^{tum} E F ad ▭^{lum} AEC esse, ut GH ad HI.

Ad quod demonstrandum, producatur F E ad alteram circumferentiæ partem in Q, jungaturque B M, secans E F in P. Quoniam itaque per constructionem G K est ad GI, ut L B ad L N; hoc est, invertendo G I ad GK, ut LN ad LB: erit quoque [c] per conversionem rationis, ut GI ad KI, ita LN ad BN, vel OF ad PF. Et sumptis antecedentium duplis [d], ut dupla GI ad K I, hoc est [e], ut G I ad H I, ita QF ad PF; dividendoque [f] ut GH ad HI, ita QP, hoc est, EF, ad PF, hoc est, QE. Sed ut LF ad EQ, ita est [g] (assumptâ communi altitudine EF) □ EF ad ▭ QEF vel A E C [h]. Erit itaque ut GH ad HI, ita □ E F ad ▭ AEC.

a p 35 Tertii Elem. Eucl.

b p 3 Tertii Elem. Eucl.

c p corol. 19. Quinti Elem. Eucl.

d Vide Clavium ad 22 Quinti Elem. Eucl.

e p 15 Quinti Elem. Eucl.

f p 17 Quinti Elem. Eucl.

g p 1 Sexti Elem. Eucl.

h p 35 Tertii Elem. Eucl.

Quòd si GH minor sit quàm HI, segmento KI: fiat rursus, ut KI ad GI (hoc est, ut differentia ipsarum GH, HI ad earundem summam), ita AL ad LN, jungaturque NM, quæ producta secet circumferentiam in F: Tum si, ut ante, ducatur FE, erit □ FE ad ▭ AEC, sicut GH ad HI.

Etenim productâ FE, donec ab LM productâ secetur in O, & à circumferentia in Q: quoniam, per constructionem, KI est ad GI, ut AL ad LN, hoc est, invertendo GI ad KI, ut LN ad AL: erit etiam [i] per conversionem rationis, ut GI ad GK, sic LN ad NA, vel OF ad FE. Et duplatis antecedentibus [k], ut dupla GI ad GK, hoc est [l], ut GI ad GH, ita QF ad FE: & dividendo [m] HI ad GH, ut EQ ad FE, hoc est, invertendo GH ad HI, ut FE ad EQ, hoc est [n], (assumptâ communi altitudine FE) ut □ FE ad ▭ FEQ vel AEC [o]. Quibus igitur satisfactum erit primæ parti Problematis.

Porò, si punctum E inveniendum sit in producta AC: sciendum est, datum angulum D eo casu non posse esse rectum, cum ex nullo puncto in producta AC perpendicularis duci queat, quæ circumferentiam vel tangat vel secet.

Hinc angulo D non existente recto, esto primùm GH æqualis HI, fiatque angulus CAB æqualis angulo D, si is acutus sit, vel illi qui

i p. corol. 19 Sexti Elem. Eucl.
k Vide Clavium ad 22 Quinti Elem. Eucl.
l p 15 Quinti Elem. Eucl.
m p 17 Quinti Elem. Eucl.
n p 1 Sexti. Elem. Eucl.
o p 35 Tertii Elem. Eucl.

qui ei est deinceps, si fuerit obtusus, & ex M per medium ipsius A B usque ad circumferentiam ducatur recta M L F: Dico, si F E ducatur

parallela A B, hoc est, in dato angulo D ad productam A C, quadratum EF [p] æquale esse rectangulo AEC. Ut requirebatur.

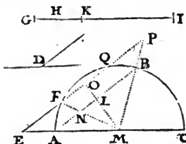
[p] p 36 ex 36 Tertii Elem. Eucl.

GH autem majori existente quàm H I, segmento GK, fiat ut G I ad GK, hoc est, ut aggregatum ipsarum G H, H I ad earundem differentiam, ita B L ad L N; agaturque ex M per N usque in circumferentiam recta M N F: Dico, ductâ F E ipsi A B parallelâ, circumferentiam secante in Q, □ FE ad ▭ AEC esse, sicut GH ad HI.

[q] p corol. 19 Quinti Elem. Eucl.
[r] Vide Clavium ad 22 Quinti Elem. Eucl.
[s] p 15 Quinti Elem. Eucl.
[t] p 17 Quinti Elem. Eucl.
[u] p 1 Sexti Elem. Eucl.
[x] p 36 Tertii Elem. Eucl.

Quod ut demonstretur, producendæ sunt ML & MB, donec ipsi EF occurrant in O & P. Quoniam igitur per constructionem GI ad GK est, sicut BL ad LN: erit quoque [q] per conversionem rationis GI ad KI, ut LB ad BN, vel OP ad PF. Et duplatis antecedentibus, [r] ut dupla GI ad KI, hoc est [s], ut GI ad HI, ita EP ad PF: dividendoque [t] ut GH ad HI, ita EF ad FP vel EQ, hoc est, [u] (assumptâ communi altitudine EF) ut □ EF ad ▭ FEQ vel AEC [x].

Deni-



Denique, si G H sit minor quàm HI, segmento KI, fiat rursus, ut GI ad KI, (hoc est, ut aggregatum ipsarum G H, H I ad earundem differentiam) ita A L ad LN; agaturque ex M per N usque ad circumferentiam recta M N F: Dico, ductâ, ut ante, FE, □tum ex FE esse ad ▭lum A E C, sicut G H ad H I.

Productâ enim EF, donec à rectis ex M per B & L ductis secetur in P & O, & à circumferentia in Q: Quoniam per constructionem G I est ad K I, ut AL ad L N: erit quoque y per conversionem rationis GI ad GK, ut AL ad AN, vel E O ad EF. Et duplatis antecedentibus z, ut dupla G I ad G K, hoc est a, ut G I ad G H, ita EP ad EF; dividendoque b IH ad HG, ut PF, hoc est, E Q, ad FE; & invertendo G H ad H I, ut F E ad E Q, hoc est c, (assumptâ communi altitudine EF) ut □ FE ad ▭ F E Q vel AEC d. Et his quoque secundæ parti Problematis satisfactum est. Ergo dato semicirculo &c. Quod faciendum erat.

y p corol. 19 Quinti Elem. Eucl.
z Vide Clavium ad 22 Quinti Elem. Eucl.
a p 15 Quinti Elem. Eucl.
b p 17 Quinti Elem. Eucl.
c p 1 Sexti Elem. Eucl.
d p 36 Tertii Elem. Eucl.

XLV.

Trapezii A B C D, cujus latus B C est parallelum lateri AD, cognita sunt omnia latera, estque AB 13⓪, BC 133①, C D 15⓪, & A D 273①. Jam, si in eo piscina fodienda sit EFGH, datæ magnitudinis I 168 □rum decempedarum, ita ut cingatur ambulacro ubique ejusdem latitudinis, quæritur, quanta sit futura ejus latitudo T *m*?

Sumptâ *b m* æquali B M, & *a n* æquali A N, quoniam B M, A N simul æquales sunt A B, itemque *m* C & *n* D simul æquales C D: erunt *b* C & *a* D simul æquales ipsis A B & CD, hoc est, 28⓪. Quæ si auferantur ex B C & A D 406①, relinquentur B *b* & A *a* 126①; eritque trapezium *a b* C D simile trapezio *e f* G H. Jam per 8 prop. hujus quæratur latitudo *m n* 12, eritque 6, ejusdem semissis, linea *m k*.

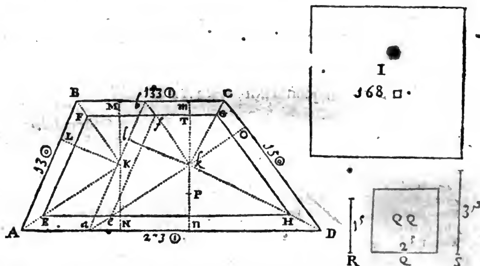
Tum

Tum fiat, ut 28, summa ipsarum *b* C, *a* D, ad *m k* 6, ita summa ipsarum B *b*, A *a* 126① ad *k* P 27①. Deinde, ut 28, summa ipsarum *b* C, *a* D, ad *m k* 6, ita 168, area piscinæ I, ad 36, aream □ti QQ. Cujus radix 6, erit ipsum latus Q. Porrò statuendo Q 6 esse mediam è serie trium proportionalium R, Q, & S; & *k* P 27① differentiam extremarum R & S, inveniantur per 26 Prop. hujus extremæ R & S. Quarum minor R 48①, semissis erit latitudinis piscinæ sive recta *k* T. Quæ si auferatur ex *m k* 6②, restabit 12①, latitudo ambulacri *m* T. Hinc ductis rectis EF, FG, GH, & HE ipsis AB, BC, CD, & DA parallelis & æquali ubique intervallo ab iis remotis, dico aream piscinæ EFGH æqualem esse datæ areæ I 168.

Demonstratio.

Per constructionem R, Q, & S sunt 3 proportionales, hinc cum T *k* sit æqualis R, & *k* P differentia extremarum R & S: erunt & T *k*, Q, & TP 3 proportionales, adeoq; [a] ▭ sub TP, T *k* æquale □to QQ. Deinde quoniã per constructionem est, ut summa ipsarum *b* C & *a* D

a 17 Sexti Elem. Eucl.



ad *m k*, ita summa ipsarum B *b* & A *a*, seu ipsarum F *f* & E *e* ad *k* P: erit quoque invertendo [b] ut *m k* ad summam ipsarum *b* C, *a* D, ita *k* P ad summam ipsarum F *f*, E *e*, hoc est, [c] (assumptâ communi altitudine

b ex corol. 4 Quinti Elem. Eucl.

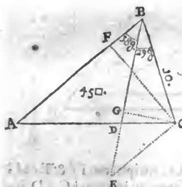
c 1 Sexti Elem. Eucl.

dine kT) ita ▭ PkT ad ▭ sub Ff, Ee, & kT, hoc est, ad parallelogrammum $EFfe$. Æquè, quoniam propter similitudinem trapeziorum $abCD$ & $efGH$ est, ut mk ad summam ipsarum bC & aD, sic kT ad summam ipsarum fG & eH, hoc est, [d] (assumptâ communi altitudine kT) sicut □ ex kT ad ▭ sub fG, eH & kT, hoc est, ad trapezium $efGH$: erit quoque per 12. 5. ut □ ex kT unà cum ▭lo PkT, id est, ▭lo sub TP & Tk, ad trapezium $efGH$ unà cum parallelogrammo $EFfe$, hoc est, ad trapezium $EFGH$, ita mk ad summam ipsarum bC & aD. Sed ut summa ipsarum bC, aD ad mk, ita [e] est 168, area piscinæ I, ad 36, aream □ti QQ, hoc est [f], invertendo mk ad summam ipsarum bC, aD, ita 36, area □ti QQ ad 168, aream piscinæ I. Quare erit [g] ut ▭ sub TP, Tk ad trapezium $EFGH$, ita □ QQ ad aream piscinæ I. Est autem ▭ sub TP, Tk æquale ostensum ipsi □to QQ. Æquale igitur quoque erit [h] trapezium $EFGH$ areæ piscinæ I. Quod erat faciendum.

d p 1 Sexti, Elem Eucl.
e p constructionem.
f p corol. 4ta Quinti Elem Eucl.
g p 11 Quinti Elem. Eucl.
h p 14 Quinti Elem. Eucl.

XLVI.

In triangulo ABC, cujus latus BC est 10 decempedarum, ducta est utcunque recta BD, dividens angulum ABC, ita ut angulus ABD sit 38, & angulus DBC 29 graduum: Quæritur, si area trianguli ABD sit 45 □ decempedarum, quanta sint futura AB & BD?



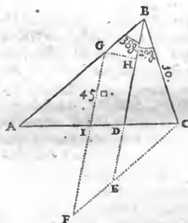
Ductâ ex C ad productam BD rectâ CE parallelâ AB, erit propter similitudinem △rum ABD, DCE, [a] AD ad DC, ut BD ad DE. Est autem [b] AD ad DC, sicut △ ABD ad △ DBC; & BD ad DE, sicut △ DBC ad △ DCE. Proportionalia igitur sunt △la ABD, DBC, & DCE. Deinde cum in △lo EBC cognoscantur latus BC & bini anguli CBE & E, hoc est, ABD: invenietur ex iis, juxta doctrinam triangulorum planorum, area △li EBC $36\frac{25}{100}$, cir-

a p 4 Sexti, & 16 Quinti Elem. Eucl.
b p 1 Sexti Elem. Eucl.

circiter. Hinc cum trium dictorum △^{lorum} cognoscatur 1^{mum} ABD, & aggregatum reliquorum duorum DBC, EDC, hoc est, EBC 36 $\frac{25}{100}$: invenietur, per modum operandi in Scholio 27^{mæ} hujus ostensum, △ DBC esse 23 $\frac{73}{100}$: ac proinde totum △ ABC 68 $\frac{73}{100}$, adeoque duplum ejus [c], sive rectangulum contentum sub AB & perpendiculari CF, esse 137 $\frac{46}{100}$. E quibus porrò innotescit rectangulum sub AB & BC, si fiat ut FC ad CB, hoc est, ut 92050, sinus anguli FBC, ad 100000, sinum anguli recti BFC, ita 137 $\frac{46}{100}$ ad 149 $\frac{33}{100}$. Quod divisum per BC 10, dat AB 14 $\frac{93}{100}$, hoc est, 14 decempedarum, 9 pedum, & 3 digitorum, circiter. c p 41 Primi Elem. Eucl.

Porrò ut inveniatur BD, ponendum erit, ut GC ad CB, hoc est, ut 48481, sinus anguli DBC, ad 100000, sinum anguli recti CGB, ita 47 $\frac{46}{100}$. ▭ sub DB & perpendiculari GC seu [d] duplum △^{li} DBC, ad 97 $\frac{89}{100}$, ▭ sub DB & BC. Quod divisum per BC 10, dat DB 9 $\frac{79}{100}$, hoc est, 9 decemp., 7 ped., & 9 dig. circiter. d p 41 Primi Elem. Eucl.

Aliter.



Ductâ, ut ante, CE parallelâ AB, constituatur super BE parallelogrammum BEFG æquale △^{lo} ABD, 45 □ decemp. Deinde fiat, ut 61566, sinus anguli BEC vel ABE, ad AB 10⓪, ita 92050, sinus anguli ECB, ad EB 1495②, & 48481, sinus anguli EBC, ad EC 787②. Tum divisâ 45⓪, areâ parallelogrammi BEFG, per EB 1495②, longitudinem: orietur 301②, latitudo GH. E quibus facilè invenitur longitudo GB, si fiat, ut 61566, sinus anguli GBH, ad GH 301②, ita 100000, sinus anguli recti GHB, ad GB vel FC 489②. Quæ ad EC 787② addita, dat FC 1276②. Porrò, cum æqualia ponantur △ ABD & parallelogrammum BEFG, erit, ablato communi trapezio IGBD, quoque △ AGI æquale trapezio FIDE. Quibus singulis si addatur △ EDC, erit △ FIC æquale binis △^{lis} AGI, EDC. Quare

 cum

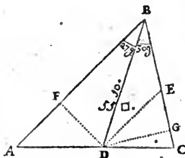
cum ipsa [e] inter se similia sint, adeoque [f] ad se invicem ut □[ta] homologorum laterum: erit □ ex F C æquale binis □[tis] ex A G & E C. Hinc si ex 1628176④, □[to] ex F C, auferatur 619369④, □ ex E C, relinquetur 1008807④, □ ex A G, cujus radix 1004②, erit ipsa A G. Cui additâ G B 489②, habebitur A B 1493②. Ut supra.

e p 29 Primi, & 4 Sexti Elem. Eucl.
f p 19 Sexti Elem. Eucl.

E quibus facile etiam est invenire B D, statuendo, ut 2280②, summa ipsarum A B, E C, ad E B 1495②, ita A B 1493② ad B D 979②. Unde porrò A D & D C inveniuntur juxta doctrinam triangulorum.

XLVII.

In triangulo ABC cognitis angulis ABD 29, & DBC 30 graduum, lineâ B D 10 decempedarum, & areâ trianguli ABC 55 □ decempedarum: invenire AB & BC.



a p 4 Sexti, & 16 Quinti Elem. Eucl.
b p 1 Sexti Elem. Eucl.

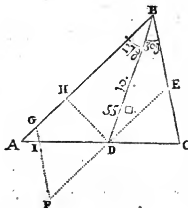
Ductâ ex D rectâ D E parallelâ AB, occurrente ipsi B C in E: erit propter similitudinem △[rum] A B C, D E C [a], A C ad D C, ut B C ad E C. Sed ut A C ad D C. ita quoque [b] est △ A B C ad △ D B C; & ut B C ad E C, ita est △ D B C ad △ D E C. Proportionalia igitur sunt △[la] A B C, D B C, & D E C. Deinde quoniam in △[lo] D B E cognoscitur latus D B unà cum duobus angulis D B E & B D E, hoc est, ABD: invenietur inde, juxta doctrinam △[lorum] planorum, area DBE $13\frac{533}{1000}$, circiter. Hinc cum dictorum 3 triangulorum cognoscatur 1[mum] ac majus A B C 55, & excessus, quo 2[dum] DBC superat 3[tium] DEC, hoc est, D B E $13\frac{533}{1000}$, invenietur, per modum Scholii propositionis 28[væ] hujus, △ D B C fore $30\frac{955}{1000}$, vel $24\frac{45}{1000}$. Unde si D B C ponatur esse $30\frac{955}{1000}$, erit A B D $24\frac{45}{1000}$; at verò supponendo D B C esse $24\frac{45}{1000}$, erit A B D $30\frac{955}{1000}$. Quare sumendo A B D esse $24\frac{45}{1000}$, erit ejus duplum, hoc est [c], ▭ sub AB & perpendiculari FD contentum, $48\frac{90}{1000}$. E quibus porrò invenitur ▭ sub AB & B D, si fiat, ut FD ad DB, hoc est, ut 45399, sinus anguli A B D, ad 100000, sinum anguli recti D F B, ita

c p 41 Primi Elem. Eucl.

ita 48, $\frac{90}{1000}$ ad 105 $\frac{927}{1000}$. Quo diviſo per D B 10, orietur A B 10 $\frac{593}{1000}$, circiter, hoc eſt, 10 decemp., 5 ped., 9 dig. & 3 granorum.

Porrò ut inveniatur B C, fiat ut D G ad D B, hoc eſt, ut 50000, ſinus anguli DBC, ad 100000, ſinum anguli recti DGB, ita 61 $\frac{910}{1000}$, ▭lum ſub B C & perpendiculari D G, hoc eſt [d], duplum △li DBC, ad 123 $\frac{820}{1000}$, ▭ ſub DB, BC. Quod per DB 10 diviſũ, dat paulò minus quàm 12 $\frac{382}{1000}$, hoc eſt, 12 decemp., 3 ped., 8 dig., & 2 gran. pro BC. *d p 41 Primi Elem. Eucl.*

Eodem modo, ſi A B D ponatur 30 $\frac{955}{1000}$, invenietur A B circiter 13 $\frac{637}{1000}$, & BC 9 $\frac{618}{1000}$; ita ut latera A B, B C ſingula duplicem ſortiantur valorem, & quidem A B ſit vel 10 $\frac{593}{1000}$ vel 13 $\frac{637}{1000}$; & B C vel 12 $\frac{382}{1000}$ vel 9 $\frac{618}{1000}$.



Aliter.

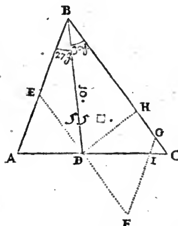
Ductâ, ut ante, D E parallelâ A B, conſtituatur ſuper B E parallelogrammum B E F G æquale △lo A B C, hoc eſt, 55 □ decemp. Tum fiat, ut 83867, ſinus anguli D E B, vel A B C, ſeu D E Ç 57 grad., ad D B 10⓪, ita 45399, ſinus anguli BDE ſeu A B D, ad BE 5413③; & 50000, ſinus anguli DBE, ad DE 5962③. Deinde, ut 100000, ſinus anguli recti D H B, ad D B 10⓪, ita 45399, ad 4540③, perpendicularem D H. Hinc diviſâ 55⓪, areâ parallelogrammi B E F G, per 4540③, perpendicularem ſeu latitudinem D H, orietur 12115③, longitudo G B ſeu F E. E qua ſubductâ DE 5962③, reſtabit FD 6153③. Porrò quoniam parallelogrammum B E F G æquale ponitur △lo ABC, erit ſubductâ communi areâ I G B E D, △ FID æquale duobus ſimul △lis A G I & DEC. Hinc cum ipſa [e] inter ſe ſimilia ſint, ac proinde [f] ad ſe invicem ut □ta laterum homologorum, erit □ ex F D æquale binis □tis ex AG & DE: adeoque ſi à □to ex FD 37859409⑥ auferatur □ ex DE 35545444⑥, relinquetur 2313965⑥, □ ex AG. Cujus radix 1521③, erit ipſa AG. Huic ſi addatur G B 12115③, fiet AB 13636③; paulò minor, quàm ſuprà.

e p 29 Primi, & 4 Sexti Elem. Eucl.

f p 19 Sexti Elem. Eucl.

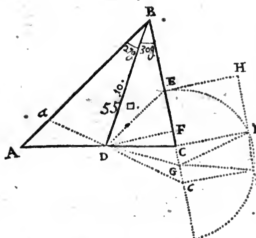
 Porrò

Porrò ut inveniatur B C, fiat, ut 7674③, differentia ipsarum A B DE, ad BE 5413③, ita AB 13636③ ad BC 9618③. ut supra.



Eodem modo, si D E agatur parallela BC, donec occurrat ipsi AB in E, & super EB, ut supra, constituatur parallelogrammum BEFG æquale △lo A B C, invenietur AB 10592③, paulò minor, quàm ante; & BC 12383③, paulò major, quàm supra; Ita ut A B & B C singula sint duplicis solutionis, nimirum A B vel 13636③, vel 10592③; & BC vel 9618③, vel 12383③. E quibus deinde facile est invenire, per doctrinam △rum planorum, lineas A D & D C, quæ similiter duplicis erunt solutionis.

Adhuc aliter.



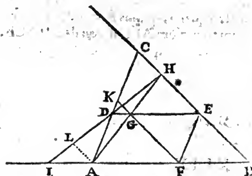
Ductâ, ut ante, D E parallelâ A B, & ex D super B C demissâ perpendiculari DF: erit, ut supra, B E 5413③, & DE 5962③. Tum fiat, ut 100000, sinus anguli recti DFB, ad DB 10⓪, ita 50000, sinus anguli D B F, ad D F 5⓪. Deinde supponendo △lum D B G æquale semissi △li A B C, hoc est, 275①, si dividatur 275① per 25①, semissem perpendicularis DF, seu, quod idem est, 55 per 5, orietur basis BG 11⓪. Si jam B E 5413③ semissis fuerit ipsius BG 11⓪, inventa quo-

quoque fuisset BC 11⓪, ac proinde AB & BC singulæ unius tantùm solutionis. Sed cum hîc minor sit, erunt AB & BC singulæ duplicis solutionis. Ad quas inveniendas, ponendo EH æqualem EB, eidemque perpendicularem, describatur centro G intervallo GE semicirculus EI*i*, qui secetur à rectâ HI*i* (ipsi BC parallelâ) in punctis I, *i*. E quibus si super BC demittantur perpendiculares IC & *ic*, ostendent ipsæ longitudinem lateris BC. Hinc si 29300569⑥, □ ex BE, EH, vel *d p 4 hujus,*
CI, auferatur à □[10] ex GE vel GI 31214569⑥, relinquetur [d] □ ex *vel 47 Pri-*
CG 1914000⑥. E quo extractâ radice, invenietur GC vel G*c* 1383③. *mi Elem.*
Quæ ex BG 11⓪ ablata, aut eidem addita, dat BC 9617③, vel *Eucl.*
12383③. Cujus demonstratio ex modo præcedenti est manifesta.

Deniquead inveniendum AB, fiat [e] ut CE 4204③, vel 6970③ *e p 4 Sexti*
ad ED 5962③, ita CB 9617③, vel 12383③ ad AB 13638③, vel *Elem. Eucl,*
10592③.

XLVIII.

Dato triangulo ABC, productisque lateribus AB, BC indefinitè versùs A & C: per punctum D, utcunque datum in AC extra ejus medium, rectam lineam ducere IDH; ita ut triangulum IHB sit æquale triangulo ACB.



Constructio.

Ductâ DE parallelâ AB, tum EF parallelâ AC, ac rursus FG parallelâ CB, agatur ex A per G recta AGH: dico, si ex H per D ducatur HDI, triangulum IHB æquale esse triangulo ACB.

Demonstratio. *a p 29 Pri-*

Etenim productâ FG *mi, & 4*
ad K, erit [a] propter similitudinem triangulorum FGE, KGD, EG *Sexti Elem.*
ad GD, ut FG ad GK. Sed ut EG ad GD, ita quoque est BA ad AI; *Eucl.* *b p 1 Sexti*
& BA ad AI, [b] ut △ BAH ad △ HAI: itemque FG ad GK, ut BH *Elem. Eucl.*
ad

ad HC; & BH ad HC, ut △ BAH ad △ AHC. Erit igitur ut △ BAH ad △ HAI, ita idem △ BHA ad △ AHC; adeoque [c] △ HAI æquale ∠lo AHC. Hinc si illis addatur commune △ BHA: erit △ IHB æquale ∠lo ACB. Quod erat faciendum.

c 9 Quinti Elem. Eucl.

Aliter.

Fiat ut CB ad EB, ita EB ad EH. Etenim quoniam [d], propter similitudinem △rum AHB, AGF, AB est ad AF, sicut BH ad FG, hoc est, EB: erit quoque dividendo [e] BF ad FA, ita HE ad EB. Sed ut BF ad FA, ita est, [f] propter parallelas FE, AC, BE ad EC. Quare erit [g] ut HE ad EB, ita EB ad EC: & convertendo [h] CE ad EB, ita EB ad EH. Quod erat demonstrandum.

d p corol. 4 Sexti Elem. Eucl.
e p 17 Quinti Elem. Eucl.
f p 2 Sexti Elem. Eucl.
g p 11 Quinti Elem. Eucl.
h p corol. 19 Quinti Elem. Eucl.

Adhuc aliter.

Fiat ut FB ad BA, ita AF ad BI. Quoniam enim, ut ante, AB est ad AF, sicut BH ad EB; & per conversionem rationis [i] AB ad BF, ut BH ad HE: erit quoque invertendo [k] FB ad BA, sic EH ad HB, hoc est, [l] propter similitudinem △rum HED, HBI, ut DE, hoc est, AF, ad IB. Quod erat ostendendum.

i p corol. 19 Quinti Elem. Eucl.
k p corol. 4 Quinti Elem. Eucl.
l p corol 4 Sexti Elem. Eucl.
m p 26 Primi Elem. Eucl.

Porrò punctum D extra medium lineæ AC dari debere, hinc patet, quoniam, si in medio ipsius datum fuerit, nulla recta IH per id duci potest, faciens △lum IHB æquale △lo ACB, sed semper majus. Id quod manifestum est, ducendo AL parallelam BC, unde [m] fiunt duo △la ALD, DHC inter se æqualia, quibus si addatur commune trapezium ADHB: erit totum trapezium ALHB æquale △lo ACB, ac proinde △ IHB triangulo ILA majus quàm △ ACB. Adeò ut eo casu △ ACB sit minimum, triangulorum omnium, quæ à recta per D ducta constitui possunt. Ad quod quidem inveniendum, opùs tantùm est ducere DE parallelam AB, si enim EC æqualis sumatur EB, & ex C per D agatur recta CDA: erit △lum ACB, minimum.

XLIX.

Dato parallelogrammo ABDC, ex vel per punctum E, datum in uno laterum BD, vel eodem producto, rectam lineam ducere EF, occurrentem lateribus oppositis AC, CD, vel iisdem productis: ita ut triangulum FCG, ab

cadem

eadem contentum, ad parallelogrammum ABDC datam habeat rationem, HD ad DB. *Vide figuras paginâ versâ.*

Est hæc 164 Prop. libri 7 Collectionum Mathematicarum Pappi Alexandrini, *quam hîc generalem proposuimus & solvimus, cujus quidem constructionem non ostendit, sed petere videtur ex libris* Apollonii *de* Spatii Sectione, *qui temporum injuriâ perierunt, atque postea restituti sunt ab eruditissimo, celeberrimóque Viro* D. Willebrordo Snellio, *qui & de* Determinata & Rationis Sectione *libros, in lucem revocavit.*

Constructio.

Ductâ HI parallelâ AB vel CD, faciente parallelogrammum HDCI, describatur super HE semicirculus HKE, in quo aptatâ EK æquali ED, jungatur HK: dico, si IF sumatur æqualis HK, & per puncta F, E recta linea agatur, △ FCG esse ad ▭ ABDC, ut HD ad DB.

Demonstratio.

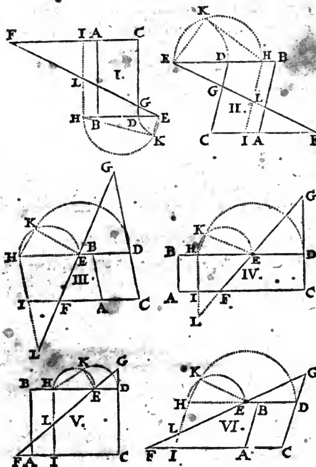
Quoniam enim [a] in $\triangle^{lo}$ rectangulo HKE rectilinea figura descripta super HE æqualis est binis similibus similiterque positis figuris super EK & KH descriptis, si pro his assumantur similia $\triangle^{la}$ HLE, DGE, & ILF, quorum homologa latera sunt HE, ED, hoc est, EK, & EF, hoc est, HK: erit △ HLE æquale binis $\triangle^{lis}$ DGE & ILF. Quare si in 1^{ma} & 2^{da} figura ab utraque parte auferatur commune △ DGE, erit reliquum trapezium HLGD reliquo $\triangle^{lo}$ ILF æquale. Quibus si addatur commune trapezium LICG erit ▭ HICD æquale $\triangle^{lo}$ FCD. At verò in 3^{tia} & 4^{ta} figura si à dictis $\triangle^{lis}$ utrinque auferatur commune △ ILF, erit reliquum trapezium IHEF æquale reliquo $\triangle^{lo}$ EGD. Quibus singulis si addatur commune trapezium FEDC, erit ▭ IHDC æquale $\triangle^{lo}$ FGC. Denique in 5^{ta} & 6^{ta} figura, si dictis $\triangle^{lis}$ addatur utrobique commune spatium ILEDC, erit ▭ IHDC æquale $\triangle^{lo}$ FGC. Quocirca cum in omnibus hisce figuris ▭ IHDC sit æquale $\triangle^{lo}$ FGC, & [b] ▭ IHDC sit ad ▭ ABDC, sicut HD ad DB: erit quoque △ FGC ad ▭ ABDC, ut HD ad DB. Quod erat faciendum.

[a] 8 & 31 Tertii, & 31 Sexti Elem. Eucl.

[b] 1 Sexti Elem. Eucl.

O Quod

Quod ad 1mam & 2dam figuram attinet, ipsæ unam tantùm admittunt solutionem, nec ulli determinationi sunt obnoxiæ, ut contra fit in 4or reliquis. *In quibus* H E *non minor esse debet quàm* E D. Æqualibus enim existentibus, recta ex I per E ducta quæsito satisfaciet,



eritque I E G △rum omnium, rectâ per E ductâ contentorum, minimum. Hoc est Problema eo casu erit *μοναχὸν* seu *unius tantùm solutionis*, cum aliàs duplicem admittat. Etenim inventâ lineâ FEG, ut osten-

ſtenſum eſt, ducenda erit per E, ut in præcedenti Problemate, alia recta, faciens △^{lum} æquale ipſi FGC, alteram præbens ſolutionem. Quæ quidem breviùs hic invenitur, ponendo tantùm HK, quam in 3^{tia} & 4ta figura ab I ad F versùs C poſuimus, in eadem recta ad alteram partem, ut in 5ta & 6ta figura factum eſt; & illam, quam in 5ta & 6ta figura ab I ad F versùs alteram partem poſuimus, ponendo in eadem recta versùs C, ut in 4ta & 5ta figura factum eſt; ducendo deinde ex invento hoc puncto per E rectam lineam.

Ubi porrò patet in 3^{tia} & 6ta figura, ubi punctum E in producto latere BD datum eſt, rationem ipſius HD ad DB, majoris ſemper inæqualitatis eſſe debere, hoc eſt, HD majorem quàm DB: quoniam in hiſce caſibus △ FGC ſemper majus eſt quàm ▭ ABDC.

Denique, quod ſpectat ad reliquos caſus, ſi in ipſis cum Pappo velimus ut △ FGC ſit æquale ▭^{mo} ABDC, quo caſu HD, DB ſemper æquales ſunt, & IH eadem quæ AB: ſciendum, conſtructione ac demonſtratione invariatâ manente, punctum B loco H aſſumendum eſſe, & A loco puncti I.

Eodem modo ex vel per E recta ducitur linea, ita ut △ FCG ſit æquale dato ſpatio, ſi tantùm [c] ▭ HICD fiat dato ſpatio æquale; & his quidem cunctis Problematis caſibus ſatisfactum putamus. [c] 44 aut 45 Primi Elem. Eucl.

L.

Triangulum ABC ſecare in data ratione rectâ EFG, procedente ex vel per datum punctum E, extra vel intra triangulum ABC.

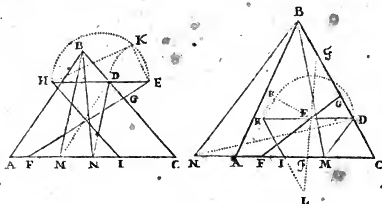
Conſtructio.

Sectâ AC in M in ratione data, junctâque BM ducatur ED parallela AC, occurrens ipſi BC vel eidem productæ in D, deſcribaturque ſuper DC, per 44 prop. 1 lib. Elem. Eucl. ▭^{mum} IHDC æquale △^{lo} MBC: vel brevius, mutando tantùm △ MBC in △ NDC (ducendo ad hoc BN parallelam DM) dividendoque NC biſariam in I: eritque recta EFG, ex vel per E ducta (ut in antecedenti Proble-

 mate)

mate) faciens △ FCG æquale ▭mo IHDC, recta quæsita.

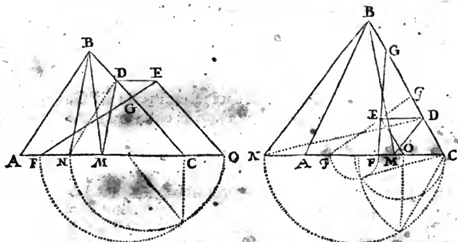
Eodem modo ex vel per E recta ducitur linea, faciens △ FCG



æquale dato spatio, constituendo tantùm ▭ IHDC dato spatio æquale.

Aliter.

Mutato, ut ante, △lo MBC in NDC, ducatur EO parallela BC,

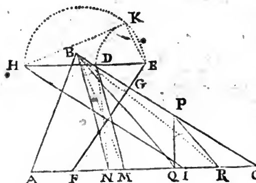


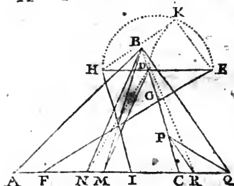
occurrens ipsi AC eidemvé productæ in O. Tum sumendo NC esse unam

unam extremarum, & CO differentiam mediæ & alterius extremæ, è serie trium proportionalium, inveniatur per 28 prop. hujus media FC, eritque FO altera extrema. Quibus positis, si ducatur recta FEG, erit ipsa quæsita.

Similiter si △lum FCG æquale requiratur dato spatio, eodem modo operandum erit, facto priùs △lo NDC eidem spatio æquali.

Demonstratio.





Quoniam enim FO, FC, & NC [a] tres sunt proportionales, & super 1ma & 2da descripta sunt similia △la FEO & FGC: erit [b] 1ma FO ad 3tiam NC, sicut △ FEO super 1ma ad △ FGC super 2da. Sed ut FO ad NC, ita quoque [c] est idem △ FEO ad △ NDC, hoc est, MBC. Quare, cum △ FEO ad △ FGC eandem habeat rationē quam ad △ MBC, erit [d] △FGC æquale △lo MBC, adeoque reliquum segmentum ABGF æquale reliquo △lo ABM. Sed ut ABM ad MBC, sic [e] AM est ad MC. Erit igitur ut ABGF ad FGC, ita AM ad MC. Quod erat faciendum.

a Ex constructione.

b p corol. 19 Sexti Elem. Eucl.

c p 1 Sexti Elem. Eucl.

d p 9 Quinti Elem. Eucl.

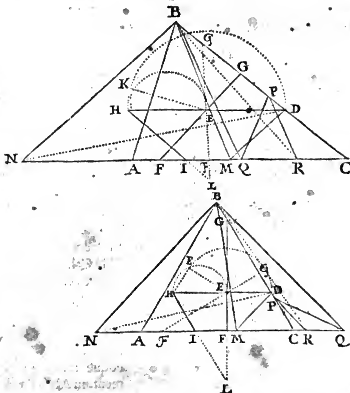
e p 1 Sexti Elem. Eucl.

SCHOLIUM.

Eodem modo licet trapezium ABPQ secare in data ratione, rectâ procedente ex vel per punctum E, extra vel intra trapezium ABPQ datum: mutando tantùm ABPQ in △ ABR, secandoque AR in M in ratione data. Operando deinde (postquam ▭ IHCD, ut ante, factum est æquale △lo

 NDC,

NDC, *hoc est*, MBC) *ut in primo modo fuit ostensum: vel etiam ut in secundo, inveniendo ad* NC, *unam extremarum, &* CO, *hoc est*, DE, *differentiam mediæ & alterius extremæ, mediam* FC.



Similiter ad auferendum segmentum F G P Q *æquale dato spatio: oportet, eidem prius addito vel ab eo subducto* $\triangle^{lo}$ CPQ, *ita ut aggregatum vel differentia sit* $\triangle$ NDC, *operationem porrò instituere, ut supra.*

Id quod eodem modo de omnibus figuris rectilineis est intelligendum.

F I N I S.

Quo-

Quoniam penultima Primi Elementorum Euclidis, quam in 4^{ta} harum aliter demonstravimus, permagni usus existit; placuit in gratiam Geometriæ tyronum, qui in perpendendis Propositionibus, quæ admirandas proprietates conspicuasque utilitates exhibent, delectari, atque longâ antecedentium Propositionum serie deterreri solent, concinniorem hanc ejus demonstrationem subnectere.

Quadratum EBCD quadratis GFBA & ACHI simul sumptis æquale esse, ita ostenditur. Producantur FG, HI donec sibi invicem occurrant in S, junganturque SA. Quoniam itaque figura SFBCH excedit $\square^{tum}$ EBCD tribus $\triangle^{lis}$ EFB, CHD, & DSE; at verò duo $\square^{ta}$ GFBA & ACHI rectangulo SGAI & $\triangle^{lo}$ ABC: ostendendum tantùm restat $\triangle^{la}$ EFB, CHD, & DSE simul sumpta ▭^{lo} SGAI unà cum $\triangle^{lo}$ ABC esse æqualia. Hoc autem liquet, considerando tria $\triangle^{la}$ EFB, CHD, & DSE tum inter se, tum ipsis SGA, AIS, & ABC sigillatim, hoc est, ipsi ▭^{lo} SGAI unà cum $\triangle^{lo}$ ABC esse æqualia. Quare constat propositum.

Vel etiam hoc modo, ut Vir Doctissimus D. Andreas ab Oudts-hoorn, *Mathematum peritiâ ac omni virtutis genere splendidissimus:*

Triangulum RBA & trapezium ACDQ communiter continentur tam in $\square^{to}$ EBCD quàm in duobus $\square^{dis}$ GFBA & ACHI. Deinde, duas reliquas partes ABC & RAQE, in $\square^{to}$ EBCD contentas, tribus reliquis partibus GFBR, CHD, & DIQ, in $\square^{tis}$ GFBA,

ACHI

ACHI contentis, æquales esse, patet, quòd $\triangle^{lum}$ quidem ABC sit æquale ipsi CHD, at trapezium RAQE æquale ipsi GFBR unà cum $\triangle^{lo}$ DIQ. utpote, tollendo summam $\triangle^{li}$ EGR ac trapez ii SEQI tum ex summa $\triangle^{lorum}$ SGA, AIS, hoc est, ex $\square^{lo}$ SGAI, tum ex summa $\triangle^{lorum}$ EFB & SED, præcedentibus æqualium. Quocirca cum omnes partes in $\square^{to}$ EBCD contentæ etiam contineantur sive æquales sint omnibus partibus, $\square^{ta}$ GFBA & ACHI simul constituentibus, relinquitur $\square^{tum}$ EBCD quadratis GFBA, ACHI æquale esse. Quod erat ostendendum.

Expletio demonstrationis.

Quò nullus dubitationi locus supersit, sciendum primò, lineas GAC & BAI per 14 Primi Elem. Euclidis esse rectas. Deinde E angulum $\square^{ti}$ EBCD cadere in rectam FS, ut & $\triangle^{lum}$ EFB esse $\triangle^{lo}$ ABC æquale, ita ostenditur. Cum enim præter rectos angulos ad F & A etiam angulos FBE & ABC, ex sublatione communis anguli EBA ab utroque recto FBA & EBC, æquales habeant; ac insuper eorum quoque latera FB, AB, propter $\square^{tum}$ GFBA, æqualia sint:
a p 26 Primi Elem Eucl. erunt itidem [a] reliqua latera FE, EB reliquis lateribus AC, CB, singula singulis, æqualia; & [b] $\triangle^{lum}$ EFB æquale $\triangle^{lo}$ ABC. Hinc cum
b p 4 Primi Elem. Eucl. EB, ducta in recto angulo ad B C, donec conveniat cum FG, continuatâ in E, ipsi BC ostensa sit æqualis: patet E angulum $\square^{ti}$ EBCD
c Vide ea, quæ habentur pag. 41. cadere in rectam FS. Eodemmodo ostenditur [c], angulum E ejusdem $\square^{ti}$ EBCD cadere in latus IH, ut & $\triangle^{lum}$ ABC esse $\triangle^{lo}$ CHD æquale. Porrò $\triangle^{lum}$ SGA esse $\triangle^{lo}$ AIS æquale, convincitur per 34 Primi Elem. si modò $\square^{lum}$ SGAI parallelogrammum esse demonstretur, hoc
d p 28 Primi Elem. Eucl. est, cujus opposita latera sint parallela. Id quod liquet [d] ob æqualitatem rectorum angulorum BAC, FGA, & AIH. Præterea $\triangle^{lum}$ SGA ipsi EFB, hoc est, ut supra, ipsi ABC æquale esse, vel hinc arguitur,
e p 34 Primi Elem. Eucl. quòd SG [e] sit ipsi IA, hoc est, AC æquale, & GA ipsi AB; & quòd anguli AGS & BAC ab iis comprehensi recti sint, ideoque æquales. Denique $\triangle^{lum}$ AIS æquari $\triangle^{lo}$ SED, ita constat. Quoniam enim,
f p 34 Primi Elem. Eucl. ut supra, FE est æquale AC, hoc est, AI, & FS [f] æquale BI: erit quoque ES ipsi BA æquale. Similiter quia DH æquatur AB, hoc est, GA, & SH æquatur GC: erit etiam SD æquale AC. Hinc cum in $\triangle^{lis}$ SED, ABC latera circa æquales rectos ad S & A sint singula singulis
g p 4 Primi Elem. Eucl. æqualia: erunt quoque ipsa $\triangle^{la}$ [g] æqualia. Est autem $\triangle^{lum}$ ABC, ut supra ostensum, æquale $\triangle^{lo}$ EFB seu SGA, hoc est, $\triangle^{lo}$ AIS. Quare etiam $\triangle^{lum}$ SED ipsi AIS æquale erit.

FRAN-

FRANCISCI à SCHOOTEN
LEYDENSIS
In Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris,

EXERCITATIONUM MATHEMATICARUM,

LIBER II.

DE

Constructione Problematum Simplicium

GEOMETRICORUM,

SEU

Quæ solvi possunt, ducendo tantùm rectas lineas.

LUGD. BATAV.
Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII,
Academiæ Typographi.
CIↃ IↃC LVI.

Nobilissimis atque Amplissimis Dominis,

ILLVSTRIS ACADEMIÆ LUGDUNO-BATAVÆ, CURATORIBUS,

D. AMELIO à BOUCKHORST, Domino de Wimmenum, Ordinis Equestris Assessori, Rhenolandiæ aggerum Præfecto ac Comiti, antehac in Consessu Ordinum Generalium Delegato, nunc autem Collegii Deputatorum Holl. Ordinum Præsidi.

D. GERARDO SCHAEP, Equiti, Domino de Cortenhoef, Reip. Amstelodamensis Consuli, antehac in Consessu Ordinum Generalium & Collegii Ordinum Hollandiæ Consiliariorum Delegato, atque ad Sereniss. ac Potentiss. Daniæ & Sueciæ Reges Legationibus perfuncto.

D. CORNELIO de BEVEREN, Equiti, Strevelshouckii, West-Iselmundæ, Lindæ, &c. Domino, ad Sereniss. ac Potentiss. Magnæ Britanniæ & Daniæ Reges Exlegato, antehac in Consessu Ordinum Generalium & Collegii Ordinum Holl. Consiliariorum Delegato, atque Reip. Dordracenæ Exconsuli.

UT ET,

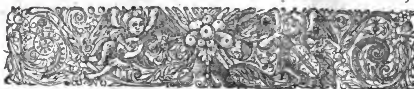
D. CORNELIO ANTONIDÆ à BUYTEVEST,	*Florentissimæ Reip. Lugd. Batava Consulibus.*
D. GVILIELMO PAEDTS, JC^to^, Rhenolandiæ Consiliario,	
D. PAVLO à SWANENBVRG JC^to^,	
D. JOHANNI MEERMAN JC^to^,	

NEC NON,

Amplissimo, Prudentissimoq; Viro,

D. JOHANNI à WEVELINCHOVEN JC^to^, Reip. Lugd. Bat. Syndico, iisdemq; D. D. Curatoribus à Secretis.

Nobi-



Nobiliſſimi atque Ampliſſimi Viri,

DUM perpendo quantum in ære veſtro ſim; quòd ſtudiis meis non modò proſpexeritis, ſed & iis promovendis etiamnum nulla denegetis ſubſidia: æquum duxi, ut conatus hoſce, profectuſque, quos in ſtadio à Vobis mihi propoſito feciſſe autumo, judiciis Veſtris exponerem; ut vel hinc intelligatis me ſingularis iſtius beneficentiæ immemorem non eſſe. Neque me dubitare ſinit eximia Veſtra humanitas, quin id, quod offero, muneris, gratum acceptumque Vobis ſit futurum, cum & primitias laborum meorum antehac luculento ſuffragio comprobaveritis, & alioqui ſemper favere iis ultro ſoleatis, qui ingenuas artes Reipublicæ bono promovendas excolendaſque ſuſcipiunt. Quanta autem Mathematicarum non modò ſit utilitas, ſed & neceſſitas; quantum illæ in excolendis, amplificandis, muniendis, & exornandis urbibus conferant ſubſidii; quanta inſuper diſciplinis hiſce ex inevinci-

bili certitudinis suæ evidentia, quâ cæteris omnibus præcellunt, accedat dignitas: non opùs est ut hîc deprædicem Vobis, quibus id tam ex variis ac supremis Reipublicæ muneribus obeundis, quàm ex crebris ad potentissimos Reges & Principes Legationibus, quibus summa cum laude atque exterorum admiratione defuncti estis, abundè constat. Videtur equidem mihi rem acu tetigisse, qui dixit: *Scientias hasce ac artes adeò humano generi esse necessarias, ut, qui illas è societate humana tollat, Solem ipsum è mundo tollere videatur.* Quamvis igitur conatus eorum vel maximè laudandos putem, qui easdem ad Reipublicæ usum non tantùm diligenter excolunt; sed etiam excultas posteritati tradunt atque commendant: non minori tamen honore extollendi videntur ii, qui, necessitate illarum probè perspectâ, ipsarum Fautores existunt ac Mecœnates, omnemqúe operam dant, ut cum reliquis simul scientiis ac artibus propagentur. Quod sanè, quantâ à Vobis curâ fiat, vel inde patet, quòd Artes Mathematicas non solùm in hanc Academiam introduci; verùm etiam vernaculâ nostrâ linguâ doceri volueritis, & laudabili hoc vestro instituto aliis, quibus in moderandis studiis æqua potestas vobiscum data est, imitando exemplo præluxeritis,

Vo-

Vobiſqúe æmulos creaveritis. Quæ verò hinc gloriæ decoriſqúe Academiæ Veſtræ facta ſit acceſſio, teſtatur tot Nobilium, Ducum, ac Principum appulſus frequens, qui eam, ut præclara ſidera cœlum, illuſtrem reddunt, & ob hanc præcipuè cauſam adeunt, ut in Mathematicis Scientiis addiſcendis omnem ſuam operam collocent. Taceo hîc viros innumeros, qui ex hoc fœcundiſſimo Athenæo, tanquam ex equo Trojano, prodierunt, de Republica noſtra bene meritos, quiqúe eam contra tot hoſtiles inſultus inconcuſſam ac fermè invincibilem reddiderunt: quorum ope in civium ſalutem atque incolarum requiem ac ſecuritatem tot loca munita, tot fortalitia exſtructa, tot denique inimicorum deluſi conatus. Fœtus ergo quos belli tempore Mathematum cultura heic pepererit, lubens prætereo, cum paſſim omnes norint, quòd militaris diſciplina, moduſqúe gerendi belli, ſive in oppugnando, ſive in defendendo, qualis hîc excultus aut exercitus fuit, parem in orbe haud invenerit, & is quidem etiam hoc nomine apud omnes gentes celebratur. Pacis verò tempore, quantam hæ artes Reipublicæ utilitatem afferant, fruſtra ego commemorem Vobis, qui & jam pridem perſpectum habuiſtis, & quotidie experimini: Omnem ex

iis hominum manare ſolertiam, eorumqúe in muneribus ſuis feliciter obeundis dexteritatem. Etenim cum ad Reipublicæ noſtræ clavum ſedeatis, plurimùm illam Vobis, Nobiliſſ. atque Ampliſſ. Viri, debere ſemper judicavi: quandoquidem ipſa mihi robur fermè ſuum à Mathematis accipere, atque ex iiſdem promovendis conſervare viſa eſt; quibus propagandis per Dei gratiam, juxta ac Veſtram Curam & Diligentiam, ad id faſtigium, quale hodie cernitur, adſcendit. Quare dum mente revolvo, Vos, ritè perpensâ harum Scientiarum utilitate, ſemper eaſdem promoviſſe, atque earum cultoribus faviſſe: officii mei eſſe duxi, laboris hujus ſive novæ ſpeculationis fœtum, jam pridem à me conceptum, etſi munus ſublimi Dignitati Veſtræ valde impar, in debitæ obſervantiæ ac gratitudinis teſtimonium publicum illuſtribus Veſtris Nominibus conſecrare. Quem ſi eo vultu, quo me accipere ſoletis, acceptum iri intelligam, animos mihi addetis his majora ac magis digna moliendi. Deus Opt. Max. Vos Reipublicæ, literatis omnibus ac ſtudiorum candidatis, diu incolumes atque felices ſervet. Ita vovet & precatur,

Veſtrarum Nobb. & Ampp.

humillimus cliens

FR. à SCHOOTEN.

PRÆ-

PRÆFATIO AD LECTOREM.

NEminem tam leviter in Geometricis versatum opinor, quin vel ille quoque, qui primoribus tantùm labris ea degustavit, utilitatem vulgarium Euclidis Problematum in difficilioribus construendis deprehenderit. Etenim si ratio habeatur eorum, quæ passim tam in Geometria, quàm aliis in artibus, quæ eidem superstructæ sunt, facienda occurrunt: nonnisi continuus dictorũ Problematum usus & exercitatio comperietur. Quibus perspectis, ratus sum, quòd, si quid in horum Problematum constructione fortè desideratum foret, & à me inventum demonstrarem, similiter omnibus reliquis, quæ iisdem innituntur, me satisfecisse omnino confidere possim. Quapropter, cum animadverterem, dicta Problemata in campo longè aliter, quàm in charta, & ab omnis generis operariis ac artificibus absolvi, in mentem venit, id inde originem ducere, quòd in charta ad eorum constructionem secundùm Euclidem aliquid passim postulari & concedi debeat, quod quidem in campo non eodem modo nec æquè facilè expeditur. Hinc, cùm penitiùs hæc introspiciens perciperem, in tribus tantùm totius rei cardinem versari, ut: à dato puncto ad datum punctum rectam lineam ducere; datam rectam in continuum rectâ producere; & è dato puncto, tanquam centro, & intervallo quovis circulum describere: *deprehendi, considerando quàm difficulter circulus in campo describatur, quam ob causam ibidem à vulgari Euclidis construendi modo recessum, & ad alium, qui parum Geometricus censendus est, deventum sit. Unde factum, ut, si, verbi gratiâ, datus angulus bifariam sit dividendus, ad circulorum descriptionem illic evitandam, instrumentum, quod Astrolabium dicitur, circulus existens in 360 partes æquales, gradus appellatas, divisus; quiq; rursus singuli in 60 minuta mente subdividuntur, ad id præstandum communiter adhibeatur. Quocum anguli amplitudine in di-*

ctis

ctis partibus observatâ, si dioptra ad semissem numeri harum partium applicetur, angulus in duos aequales dispescitur. Quis non hujusmodi processum à Geometria alienum judicet; quippe tam anguli quàm lineæ dantur, quorum magnitudo, dum nullo partium hujus divisionis numero exprimi potest, irrationalis dicitur? Quinimò, si vel nulli tales anguli reperirentur, nihilominùs modus hic procedendi pro Geometrico habendus non esset: quandoquidem hoc pacto Problematis Geometrici constructio per Arithmetica principia, adeóque non per propria perficitur. Sicuti nec pro Geometrica constructione haberi debet, si ad triangulum ex datis tribus rectis lineis constituendum, datâ rectâ aliquâ pro communi mensurâ utamur (quemadmodum vulgò fit,) & ad eam cujusque lineæ longitudinem exploremus, ut exinde magnitudo singulorum angulorum calculo innotescat. Etenim præterquam quòd longitudo uniuscujusque harum trium linearum in propositæ mensuræ partibus non semper explicabilis sit, vel quoque magnitudo singulorum angulorum per circuli partes antedicta divisionis semper exprimi possit, consistit tertiò tota operatio in numerorum calculo, quæ ne minimùm quidem cum Geometrica constructione convenire dicenda est. Quartò accedit, ipsam instrumenti in prædictas partes divisionem Geometricam longè difficiliorem esse, ac proinde necessariò post propositi Problematis constructionem sequi debere. Quintò denique considerando, quòd operis perfectio in totum pendeat, tum ab accurata instrumenti fabrica, tum & justa circuli in prædictas partes divisione (quæ utraque ab ipsis etiam peritissimis artificibus ad perfectionem non perducitur): facilè concluditur, ejusmodi operationem imperfectam esse ac naturæ Geometriæ repugnare.

Hinc cum processum in campo perspectum haberem, ubi Geometria hanc prærogativam sibi vendicare videbatur, quòd ibidem magis purè & naturæ suæ convenienter exerceri possit, quippe ubi lineæ & figuræ omnes mente duntaxat descriptæ concipiuntur, & nonnisi punctorum signa in usu sunt: visum fuit circulorum descri-

scri-

ſcriptionem, omnino illîc ineptam, rejicere, ac ad dictorum Problematum constructionem postulatum hoc ſubſtituere : Ad datum punctum in data recta indefinita rectam lineam collocare, datæ rectæ terminatæ æqualem. *Quod licet ab Euclide ut Problema conſtruatur, & tamen à nullo non ob ſimplicitatem ſuam proprio marte facilè abſolvatur, ego pro principio habendum duxi, ac proinde à quovis conceſſum ſuppoſui: ſiquidem id non modò ubivis idoneam praxin admittit, verùm etiam (meo quidem judicio) naturâ ſuâ multò ſimplicius, quàm circuli deſcriptio exiſtit; in cujus etiam minimæ portiunculæ efformatione è dato puncto non tantùm una ſed infinitæ rectæ alteri datæ æquales ſunt ſumendæ aut concipiendæ.*

Porrò perpendendo in Geometria, nullum Problema quantumvis ſimplex, Geometricè conſtrui poſſe, in quo ad minimum æqualitas duarum rectarum linearum non ſit conſideranda, nec etiam hactenus ullum ex Problematibus Euclidis abſque circuli deſcriptione conſtructum ſit: judicavimus, quòd, licèt ſæpiùs in conſtruendis vulgaribus hiſce Euclidis Problematîs ad punctum aliquod lineam alteri æqualem ponamus, conſtructio tamen noſtra propterea magis compoſita cenſeri non debeat; ſed ſimplicior, in quantum eam aliquoties tantùm ponere, quàm infinities aſſumere, facilius eſt. Non equidem inficias eo, inſtrumentorum ope ſæpe aliquid faciliùs obtineri, & conſequenter ea admitti poſſe, ubi eorum uſus tale emolumentum ſuppeditat, quandoquidem in eum finem ſunt excogitata; ut, exempli gratiâ, circinus, tam ad longitudinem lineæ capiendam, quàm ad eandem ex puncto infinities ponendo circulum in plano deſcribendum. Quoniam verò hoc & his ſimilia ad Mechanicam potiùs quàm ad Geometriam pertinent, cujus quidem ſcopus in contemplanda conſtructione & demonſtratione conſiſtit, non autem circa inſtrumenta, quibus ipſa perficitur, verſatur: placuit prædicta Problemata ita conſtruere, ut contemplatio eorum conſtructionis ubiq; proficua eſſe poſſit.

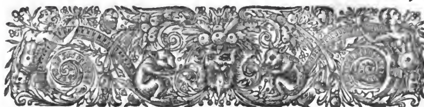
Præterea, cum in Geometria ab Antiquis tria genera Proble-

matum statuta sint, ut, Planorum, Solidorum,& Linearium, *in hoc discrepantium, quòd* Plana *ductis lineis rectis descriptisq; circulis construantur, &* Solida *descriptâ insuper Coni sectione, at* Linearia *in locum hujus assumptâ aliâ curvâ, magis compositâ: visum fuit, considerando infinita esse Problemata, adeò simplicia, ut solis rectis lineis construi possint, sub prædicto genere* Planorum Problematum *genus aliquod subalternum, utputa,* Simplicium Problematum, *constituere; quorum itaque constructionem in hoc tractatu exhibere animus est. Ad quod vel eo magis incitati atque instigati fuimus, quòd Nobilissimus ac Celeberrimus Vir Renatus Des Cartes in sua Geometria (quam aliquot abhinc annis ex Gallico idiomate in Latinum translatam, nunc denuo uberioribus commentariis illustratam edimus) succinctam & generalem methodum ostenderit, ad prædicta superiorum generum Problemata, per curvas lineas, in certa genera à se distinctas, construenda.*

Vnde, quandoquidem nullæ simpliciores lineæ quàm rectæ excogitari queunt, quæ quidem in campo per radios visuales citra omne instrumentum designantur: æquum duxi constructionem horum vulgarium Euclidis Problematum, ad quæ alia omnia Simplicia Problemata methodo prædictæ Geometriæ D[ni] *Des Cartes reduci possunt, in hoc tractatu ostendere; sicut etiam, quo pacto Planorum Problematum constructio fieri possit, edocere, ita ut ea tam in campo quàm in charta locum obtineat, eademq; simul quàm paucissimis circulis descriptis absolvatur, ubique observans, ne, quod paucioribus ritè peragere licet, pluribus perficiatur.*

Quamobrem, existimans me mentem meam abundè hic declarasse, Lectorem non diutiùs detinendo, Præfationi finem impono, ipsumq; ad operis examen ablegans, ut hæc, quæ nova contemplationis inventa sunt, favore excipiat ac in usum suum convertat, rogo. Vale.

DE



DE

Constructione Problematum Simplicium

GEOMETRICORVM,

SEU,

Quæ solvi possunt, ducendo tantùm rectas lineas.

PETITIONES SIVE POSTVLATA.

I.

Postuletur, ut à quovis dato puncto ad quodvis datum punctum rectam lineam ducere concedatur.

II.

Et : rectam lineam inter duo data puncta terminatam, ex utraque parte in directum & continuum producere.

III.

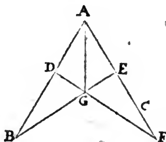
Item : ad datum punctum in data recta indefinita rectam lineam collocare, datæ rectæ terminatæ æqualem.

Sequuntur Problemata.

PROBLEMA I.

Problema 4 Primi Elem. Euclidis.

Datum angulum rectilineum B A C bifariam secare.

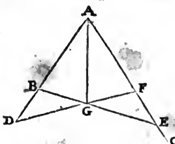


Constructio.

a p 3 Petit.

b p 1 Petit.

Sumptis in recta A B ad libitum punctis B & D ponatur[a] ad punctum A in recta A C linea A E æqualis A D, ac rursus ad punctum E in eadem recta linea E F æqualis D B; ductisque[b] rectis B E, D F, se invicem secantibus in G: Dico rectam ex A ad G ductam angulum BAC bifariam secare.



Demonstratio.

Quoniam enim ex constructione A D, A E, ut & DB, EF æquales sunt, erunt etiam A B, A F æquales. Hinc cum △lorum A B E, A F D latera B A, A E lateribus F A, A D sint æqualia, & angulus ad A utrique communis: erunt quoque[c] reliqui anguli EBA & AEB, reliquis DFA & ADF, singuli singulis, æquales. Sunt autem[d] anguli A D F, F D B, ut & A E B, B E F in prima figura æquales duobus rectis. Hinc cum anguli A D F & A E B sint ostensi æquales, erunt etiam anguli BDF & FEB æquales. Quoniam verò in 2da figura[e] anguli ABE, E B D, ut & AFD, DFE sunt æquales duobus rectis, & quidem anguli A B E & A F D, æquales sint ostensi, æquales quoque erunt anguli DBE & EFD. Quare cum in utraque figura anguli DBG, GDB angulis EFG, GEF, singuli singulis, sint æquales, ac porrò latus D B △li BDG æquale lateri F E △li FE G, erit & latus[f] D G lateri G E æquale. Denique cum △lorum DAG, GEA latera DA, AG lateribus EA, AG, singula singulis, sint æqualia, ac 3tium latus DG etiam sit æquale ostensum 3tio lateri GE: erit

c p 4 Primi Elem. Eucl.

d p 13 Primi Elem. Eucl.

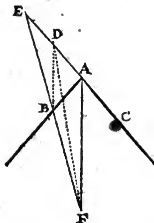
e p 13 Primi Elem. Eucl.

f p 26 Primi Elem. Eucl.

erit & [g] angulus DAG angulo GAE æqualis, adeoque angulus BAC per rectam AG bifariam divisus, hoc est, in duos æquales angulos BAG, FAG. Quod erat faciendum. g 8 p Primi Elem. Eucl.

Aliter.

Assumpto in AB utcunque B puncto, sumantur in producta CA rectæ AD, DE [h] singulæ ipsi AB æquales, ductâque [i] rectâ per puncta E & B, ponatur in ea BF æqualis BE, ac jungatur AF: dico hanc angulum BAC secare bifariam. h p 3 Petit. i p 1 & 2 Postit. i p 3 Petit.



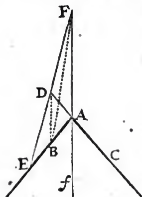
Quoniam enim ductâ DF △[l2] BDF & DBA singula ipsi BDE sunt æqualia[k], erunt & ipsa inter se æqualia. Unde cum eidem insistant basi BD, erunt quoque [l] in iisdem parallelis DB & AF; eritque angulus [m] BAF æqualis angulo ABD, & angulus FAC æqualis angulo BDA. Quocirca cum [n] anguli ABD & BDA sibi invicem sint æquales, erunt pariter anguli BAF & FAC inter se æquales, ac proinde angulus BAC rectâ AF bifariam divisus. Quod erat faciendum. k p 38 Primi Elem. Eucl. l p 39 Primi Elem. Eucl. m p 29 Primi Elem. Eucl. n p 5 Primi Elem. Eucl.

Corollarium.

Hinc patet: si AB sit æqualis AD, jungaturque DB, hanc ipsi AF, quæ angulum BAC bifariam secat, esse parallelam.

Adhuc aliter.

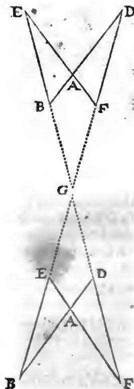
Sumptâ, ut ante, AD æquali AB, junctâque BD, sumatur BE æqualis BA, & ex E per D recta agatur indefinita. In qua si ponatur



DF æqualis DE, & ex F per H ducatur FAf: dico hanc angulum BAC bifariam secare.

Junctâ enim BF, patet, ut supra, △[la] BDF & BDA inter duas esse parallelas BD, AF. Sed per præcedens corollarium BD parallela est rectæ, angulum BAC bifariam dividenti. Quocirca recta FAf angulum BAC bifariam secabit. Quod faciendum erat.

LEMMA ad sequentem modum.



BA æquali existente ipsi AF, & AE ipsi AD; at verò EA vel majore vel minore quàm AB, BAD & FAE duabus existentibus rectis lineis, quæ se invicem secent in A: dico EB, FD productas sibi mutuò occurrere.

o p 15 Primi Elem. Eucl.

p p 4 Primi Elem. Eucl.

Cum enim ex hypothesi latera BA, AE, △[li] BAE singula æqualia sint lateribus singulis FA, AD, △[li] FAD; nec non o angulus BAE contentus sub BA, AE æqualis angulo FAD, sub AD, FA contento, erit quoque p angulus BEA angulo FDA æqualis.

q p 18 Primi Elem. Eucl.

r p 13 Primi Elem. Eucl.

s p 11 axioma.

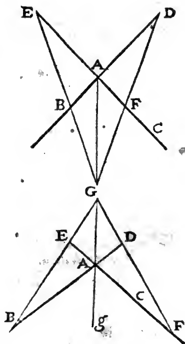
Si igitur EA quàm AB major est, erit etiam q angulus EBA ipsi oppositus major opposito E, hoc est, D. Hinc cum angulus r EBA unà cum angulo sibi deinceps ABG sit æqualis duobus rectis, erunt anguli D & ABG duobus simul rectis minores, ac proinde s rectæ EB, DF inferiùs productæ sibi mu-

mutuò occurrent, ubi anguli duobus simul rectis sunt minores.

Si verò A E minor sit quàm A B, quoniam [t] tunc angulus ipsi oppositus B minor est opposito A E B, hoc est, F D A; & hic quidem cum angulo sibi deinceps A D G [u] æquetur duobus rectis: erunt anguli B & A D G simul sumpti duobus rectis minores, [x] rectæque E B F D superiùs productæ coïbunt.

t 18 Primi Elem. Eucl.
u 13 Primi Elem. Eucl.
x 11 axioma.

Rursum aliter.



Sumpto in A B ad libitum puncto B, & ad A collocata in A C recta A F æquali A B, producatur C A ad E; ita ut E A sit vel major vel minor quàm A B. Deinde productâ B A, in eaque ad punctum A positâ rectâ A D æquali A E, agantur per puncta E, B, & D, F, rectæ lineæ E B G & D F G, quæ per Lemma præcedens sibi mutuò occurrant in G. Quibus peractis, si per puncta A G recta ducatur linea, secabit ipsa angulum BAC bifariam.

Cùm enim, ut in præcedenti Lemmate, angulus BEA sit æqualis angulo F D A, & ex eadem ratione angulus A B E æqualis angulo A F D, atque in prima figura anguli A B E, A B G, ut & anguli AFD, AFG [y] duobus simul æquentur rectis: sequitur, angulis ABE, AFD æqualibus existentibus, angulos ABG, AFG æquales esse. Eodem modo in 2da figura cum anguli BEA, AEG, ut & FDA, ADG duobus simul æquentur rectis, & anguli quidem BEA, FDA æquales ostensi sint: erunt quoque A E G, A D G æquales. Hinc cùm in utraque figura BA est æqualis AF, & AD æqualis A E, ideoque tota

y 13 Primi Elem. Eucl.

BD

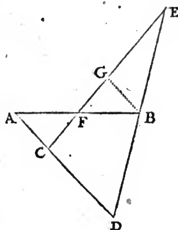
BD æqualis toti EF; ac anguli prætereà ABG, ADG △[li] BDG singuli æquales sint angulis singulis AFG, AEG △[li] FEG: erit etiam [z] latus BG lateri GF æquale: quare cum latera BA, BG △[li] BAG singula æqualia sint lateribus singulis AF, FG △[li] AFG; & tertium latus AG utrique sit commune; erit [a] quoque angulus BAG angulo FAG æqualis: ac proinde BAC angulus in 1[ma] figura à recta AG bifariam divisus. Qui porrò æquales anguli, si in 2[da] figura singuli à duobus auferantur rectis, relinquentur etiam [b] æquales anguli BA*g* & FA*g*. Quod erat faciendum.

z p 26 Primi Elem. Eucl.
a p 8 Primi Elem. Eucl.
b p 13 Primi Elem. Eucl.

PROBLEMA II.

Problema 5 Primi Elem. Euclidis.

Datam rectam lineam terminatam AB bifariam secare.



Constructio.

a p 1 & 2 Petit.
b 3 Petit.
c p 3 Petit.

Sumpto extra AB puncto ad libitum C, [a] ductâque ex A per C rectâ indefinitâ ACD, collocetur in ea [b] CD æqualis duplæ AC, & ex D per B recta agatur linea. In qua sumendo [c] BE æqualem BD, jungendoque CE, dico AB bifariam secari in F.

Demonstratio.

d p 4 Primi Elem. Eucl.
e p 16 Quinti Elem. Eucl.
f Ex constructione.
g p 4 Sexti Elem. Eucl.
h p 14 Quinti Elem. Eucl.

Concipiatur ex B ducta recta BG, parallela AD, occurrens ipsi EC in G: eritque [d] propter similitudinem △[lorum] CED, GEB, ED ad DC, ut EB ad BG; & permutando [e] ED ad EB, ut DC ad BG. Est autem ED dupla ipsius EB. Quare & DC ipsius BG dupla erit. Hinc cùm [f] DC sit quoque ipsius AC dupla, sequitur AC & BG inter se esse æquales. Deinde, quoniam [g] propter similitudinem △[lorum] ACF & FBG, AC est ad AF, ut GB ad BF, & prima quidem AC tertiæ GB ostensa sit æqualis: erit etiam [h] 2[da] AF quartæ FB æqualis: Et idcirco AB in F bifariam secta. Quod erat faciendum.

Ali-

Aliter.

Assumpto, ut ante, extra A B puncto aliquo C, ductisque ex eo [i] per A & B rectis C A D, C B E, sumatur [k] A D æqualis A C, & B E æqualis B C. Tum [l] junctis D B, A E, sese secantibus in F; dico, si agatur FC, hanc secare AB bifariam in G.

i 3 1 & 2 Petit.
k 3 3 Petit.
l 3 1 Petit.

Cum enim △[la] B D C & C E A angulum ad C communem habeant, lateraque circa hunc sint reciprocè proportionalia, hoc est, [m] ut AC sit ad CB, sicut DC ad CE: erit [n] △BDC æquale △[lo] CEA. A quibus singulis, si auferatur commune trapezium C A F B, relinquetur

m 3 15 Quinti Elem. Eucl.
n 3 15 Sexti Elem. Eucl.

△ ADF æquale △[lo] FEB. Est autem [o] △ ADF æquale △[lo] FAC, & △ F E B æquale △[lo] BCF. Quare etiam △ F A C △[lo] C B F æquale erit. Deinde cum [p] △ CAF sit ad △ FAG, sicut CF ad FG: itemque △ CB F ad △ FB G, sicut CF ad F G: erit △ C A F [q] ad F A G, sicut △ CBF ad △ FBG. Quocirca cum △ CAF æquale sit ostensum △[lo] CBF: erit pariter [r] △ FAG æquale △[lo] FBG, ac proinde [s] AG æqualis G B. Quod erat faciendum.

o 3 38 Primi Elem. Eucl.
p 3 1 Sexti Elem. Eucl.
q 3 11 Quinti Elem. Eucl.
r 3 14 Quinti Elem. Eucl.

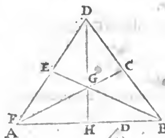
Adhuc aliter.

Sumpto rursus, ut ante, extra AB puncto C, & [t] ex B per C ductâ rectâ indefinitâ, sumatur [u] in ea C D æqualis C B, jungaturque A D. Deinde [x] in DA assumptâ D E æquali D C, ut & EF æquali CB, agantur BE, FC, secantes se invicem in G, tum DGH secans FB in H.

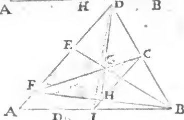
s 3 1 Sexti Elem. Eucl.
t 3 1 & 2 Petit.
u 3 3 Petit.

Si igitur F punctum cadit in punctum A, incidet etiam linea F B in lineam A B, eritque ipsa in H bifariam secta; nam cum D H per Problema primum angulum FDB secet in duos æquales angulos, lateraque FD, DH △[li] FDH lateribus BD, D H △[li] B D H circa illos sint æqualia: erit [z] & tertium latus F H tertio lateri H B æquale.

x 3 3 Petit.
z 3 4 Primi Elem. Eucl.



Sed puncto F cadente supra aut infra A, dico, si per puncta C & H agatur porrò CH, rectam AB in I ab ea bifariam secari.



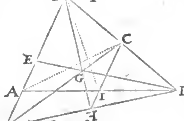
a p 38 *Primi Elem. Eucl.*

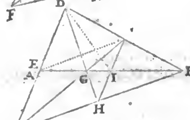
Ductis enim rectis AC, DI, cum FH sit æqualis HB, erit & [a] △ FCH △lo HCB æquale. Ob eandem rationem △ DCH △lo HCB æquale erit. Unde porrò sequitur △ FCH æquale esse △lo HDC. Quæ cum super eadem sint constituta basi HC, similiter [b] inter duas consistent parallelas AD, HC. E quibus exinde liquet [c] △ ADI esse △lo ADC æquale.. Est autem propter æqualia △la ADC, ACB [d] triangulum ADC dimidium totius ADB. Quapropter etiam △ ADI totius ADB dimidium erit, ideoque æquale △lo IDB. Hæc igitur cum sint ejusdem altitudinis, consistent etiam [e] super æqualibus basibus AI, IB. Quod erat faciendum.

b p 39 *Primi Elem. Eucl.*

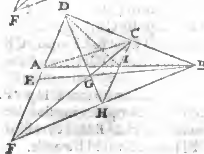
c p 37 *Primi Elem. Eucl.*

d p 38 *Primi Elem. Eucl.*





e p 1 *Sexti Elem. Eucl.*



PRO-

PROBLEMA III.

Per datum punctum C rectam lineam ducere, datæ rectæ AB parallelam. *Problema 10 Primi Elem. Euclidis.*

Constructio.

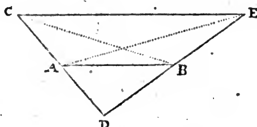
Ductâ ex C per A [a] rectâ indefinitâ, sumatur in ea [b] AD æqualis AC & [c] ex D per B agatur DBE. In qua si [d] ponatur BE æqualis BD jungaturque CE, dico hanc ipsi AB fore parallelam.

a p 1 & 2 Petit. *b p 3 Petit.* *c p 1 & 2 Petit.*

Demonstratio.

Quoniam enim ex constructione DA est æqualis AC, & DB æqualis BE, ideoque DA ad AC, ut DB ad BE: sequitur [e] CE ipsi AB esse parallelam.

d p 3 Petit. *e p 2 Sexti Elem. Eucl.*



Vel etiam hoc modo.

Junctis CB, AE, patet, ex demonstratione secundi modi præcedentis Problematis, △[la] BCD & DAC esse æqualia. A quibus singulis si auferatur commune △ DAB, relinquetur △ CAB æquale △[lo] BAE. Quæ cum ex eadem parte uni basi insistant AB, etiam [f] inter duas constituentur parallelas CE, AB.

f p 39 Primi Elem. Eucl.

CAB autem ipsi BAE esse æquale, patet quoque ex eo, quòd singula [g] sint æqualia ipsi DAB, ac proinde etiam inter se. Parallela igitur est CE ipsi AB. Id quod facere oportebat.

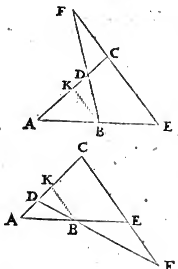
g p 38 Primi Elem. Eucl.

I LEMMA; *ad sequentem modum.*

Existente AB æquali BE, sed AD majore aut minore quàm DC: dico CE, BD productas concurrere.

Esto AK æqualis KC, jungaturque KB, quæ ex præcedenti de-

 mon-



monstratione ipsi C E erit æquidistans. Id quod arguit, B D, C E parallelas non esse, sed productas concurrere.

h p 17 Primi Elem. Eucl.

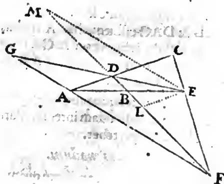
Quoniam igitur [h] bini anguli D K B, B D K trianguli K D B duobus rectis sunt minores, & angulus quidem D K B [i] alterno D C F æqualis sit: at verò B D K [k] æqualis opposito C D F: erunt pariter bini D C F & C D F duobus rectis minores, rectæque E C, B D [l] sursum productæ concurrent.

i p 29 Primi Elem. Eucl.
k p 15 Primi Elem. Eucl.
l p 11 axioma.

m p 17 Primi Elem. Eucl.
n p 29 Primi Elem. Eucl.
o p 11 axioma.

Sit jam A D minor quàm D C, quia igitur rursus [m] bini anguli D K B & B D K trianguli K D B duobus rectis sunt minores, & externus D K B [n] interno & opposito, ad eandemque partem C sit æqualis: erunt etiam bini B D K & C duobus rectis minores, rectæque C E, D B [o] deorsum productæ concurrent, ubi dicti anguli duobus rectis sunt minores.

II LEMMA, *ad sequentem modum.*



Sit rursus A B æqualis B E, sed A D minor quàm D C, & producantur C E, D B; donec coëant in F: dico similiter D E & A F productas concurrere.

p p 16 Primi Elem. Eucl.

Cum enim [p] externus angulus A E F △[li] A C E major sit interno & opposito C A E, patet, si ex eo abscindatur angulus B E L æqualis an-

angulo C A E, lineam E L secare B F in L, facientem [q] B L æqualem B D.

[q] p 15 & 16 Primi Elem. Euclidis.

Fiat jam B M æqualis B F, jungaturque M E. Quoniam igitur latera M B, B E $\triangle^{li}$ M B E lateribus F B, B A $\triangle^{li}$ A B F singula singulis sunt æqualia, ut & [r] anguli E B M & A B F (qui sub æqualibus lateribus continentur): erit & [s] angulus BEM angulo BAF æqualis. Deinde quia B L minor est quàm B F, siquidem punctum L cadit inter puncta B & F, erit etiam BD minor quàm B M: ac proinde angulus B E D minor angulo B E M vel B A F. Est autem angulus F A B, unà cum angulo B A G [t] æqualis duobus rectis. Quare anguli B E D & B A G duobus rectis simul minores erunt, lineæque D E, F A sursum productæ sibi mutuò coïncident, ubi hi duo anguli duobus rectis sunt minores. Quod erat propositum.

[r] p 15 Primi Elem. Eucl.
[s] p 4 Primi Elem. Eucl.
[t] p 13 Primi Elem. Eucl.
[u] p 11 axioma.

Sequitur alius modus.

Aliter.

Sumatur in A C, vel postquam fuerit producta versùs C, punctum aliquod ad libitum D, continueturque A B ad E; ita ut B E sit æqualis B A, & per puncta C, E & D, B agantur rectæ C E F & D B F, quæ per Lemma I antecedens coëant in F. Dico jam, si ducantur A F, D E, quæ per Lemma 2^{dum} productæ concurrant in G, rectam à puncto C ad G ductam esse ipsi AB parallelam.

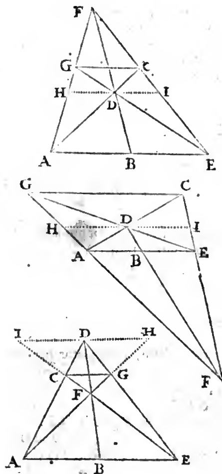
Ad quod demonstrandum, concipiatur per punctum D recta H D I parallela rectæ A B E, occurrens ipsis AF, FE, vel postquam fuerint productæ, in punctis H & I: eritque [x], propter similitudinem $\triangle^{lorum}$ A B F & H D F, A B ad B F, sicut HD ad DF: ac rursus, propter similitudinem $\triangle^{lorum}$ B F E & D F I, BF ad BE, sicut D F ad D I, hoc est, ex æquo [y] A B ad B E, sicut H D ad D I. Est autem ex constructione A B æqualis B E. Quare & H D ipsi D I erit æqualis. Deinde quoniam, propter similitudinem $\triangle^{lorum}$ G H D & G A E, [z] H D est ad D G, sicut A E ad EG, hoc est, permutando [a] HD ad AE, sicut D G ad E G: itemque, propter similitudinem $\triangle^{lorum}$ C D I & CAE, ID ad DC, sicut E A ad AC, hoc est, permutando DI ad AE, sicut D C ad C A: patet, cum H D, D I sint æquales, [b] DG esse ad

[x] p 4 Sexti Elem. Eucl.
[y] p 22 Quinti Elem.
[z] p 4 Sexti Elem. Eucl.
[a] p 16 Quinti Elem. Eucl.
[b] p 11 Quinti Elem. Eucl.

 GE,

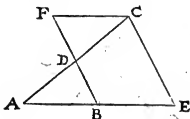
c p 1 Sexti Elem. Eucl. GE, sicut DC ad CA. Sed ut DG ad GE, ita est c △CDG ad △GCE: & DC ad CA, ita idem △CDG ad △GCA. Quare d △GCE △lo GCA æquale erit. Quæ cum ab eadem parte uni insi-

d p 9 Quinti Elem. Eucl.



e p 39 Primi Elem. Eucl. stant basi GC, necessariò e consistent etiam inter duas parallelas. Parallela igitur est GC ipsi AB. Quod erat faciendum.

NOTA.



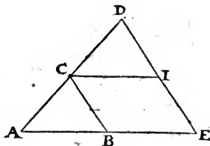
NOTA.

Si contingit A D esse æqualem D C, quoniam tunc, ex demonstratione prioris modi, BD ipsi EC est parallela, atque idcirco productæ nunquam concurrunt: sumenda erit tantummodo D F æqualis D B, jungendaque F C, eritque ipsa ipsi A B parallela.

Cum enim $\triangle$lorum ADB, FDC anguli qui ad D [f] sint æquales, & circa eos latera AD, DB æqualia lateribus DC, DF, singula singulis: erit quoque [g] angulus A æqualis angulo A C F; ac proinde [h] F C parallela A B. Quod erat faciendum.

f p 15 Primi Elem. Eucl.
g p 4 Primi Elem. Eucl.
h p 27 Primi Elem. Eucl.

Aliter.



Ductâ ex A per C rectâ indefinitâ, in eâque collocatâ C D æquali C A, producatur A B ad E, ita ut B E sit æqualis B A. Tum junctis B C, E D, sumatur in E D recta E I æqualis BC, agaturque CI: dico hanc ipsi AB esse parallelam.

Quoniam enim, ut ante, E D parallela est ipsi B C, atque in illa E I sumpta æqualis B C: erit quoque [i] CI ipsi A B E parallela. Quod erat faciendum.

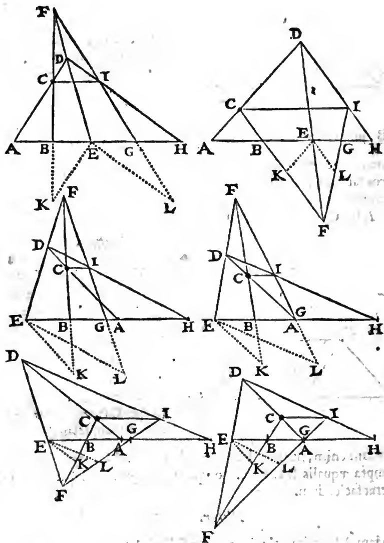
i p 33 Primi Elem. Eucl.

Aliter.

Esto jam A C major vel minor quàm C D, sed AB, ut ante, æqualis B E: lineæque B C, ED productæ, per 1mum Lemma, conveniant in F. Deinde assumpto in A B, ipsâve productâ, ad libitum puncto G, ponatur GH æqualis GE, ac per puncta F & G recta linea agatur,

secans

secans rectam D & H connectentem in I: eritque juncta CI ipsi ABH parallela.



Ad quod demonstrandum, fiant BK, GL æquales BC, GI, junganturque EK, EL. Hinc cum Δ^{lorum} KBE, ABC [k] tam anguli qui ad B, quam

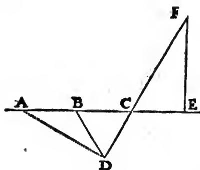
k p 15 Primi Elem. Eucl.

B; quàm, quæ ipsos comprehendunt, latera sibi invicem sint æqualia: erit quoque KE [l] ipsi A C æqualis, ut & angulus B E K angulo A: ac proinde [m] K E ipsi A C D parallela. Eâdem ratione E L æqualis erit I H, ac ipsi D I H parallela. Deinde cum, propter similitudinem △lorum F C D, F K E, [n] F D sit ad F E, ut D C ad E K, hoc est, C A; & rursus, ob similitudinem △lorum F D I, F E L, F D ad F E, ut D I ad E L, hoc est, I H: erit [o] D C ad C A, sicut D I ad I H: ideoque [p] C I ipsi A B H parallela. Quod erat faciendum.

l ꝑ 4 Primi Elem. Eucl.
m ꝑ 27 Primi Elem. Eucl.
n ꝑ corol. 4 & Sexti Elem. Eucl.
o ꝑ 11 Quinti Elem. Eucl.
p ꝑ 2 Sexti Elem. Eucl.

PROBLEMA IV.

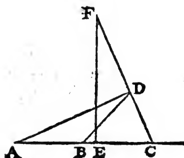
Super data recta linea indefinita perpendicularem constituere.



Constructio.

Concipiatur data recta linea transire per puncta A & B, ut igitur super ea constituatur perpendicularis, fiat B C æqualis A B, & ex B utcunque ducatur B D, hoc est, faciens cum A C quoscunque libuerit angulos. Deinde in illa assumptâ [a] B D æquali B A vel B C, per puncta C & D agatur [b] recta linea indefinita. In qua si ponatur C F æqualis C A, atque in recta A B C sumatur C E æqualis C D, dico junctam E F ipsi A B fore perpendicularem.

a ꝑ 3 Petit.
b ꝑ 1 & 2 Petit.



Demonstratio.

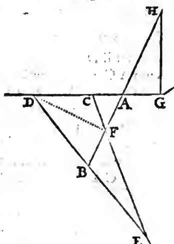
Ductâ AD, quoniam rectæ A B, B C, & B D omnes inter se sunt æquales, cadet punctum D in circuli circumferentiam, cujus diameter A C: eritque angulus

[c] A D C ob id rectus. Dein cum $\triangle^{lorum}$ A D C & C F E [d] anguli A C D & E C F, ut & latera A C, C D lateribus F C, C E [e] utrumque utrique sint æqualia: erunt quoque [f] A D C & E, à lateribus æqualibus subtensi, æquales. Est autem angulus A D C rectus. Quare & angulus E rectus erit, adeoque E F perpendicularis ad A B. Quod erat faciendum.

c p 31 *Tertii Elem. Eucl.*
d p 15 *Primi Elem Eucl.*
e *Ex constructione.*
f p 4 *Primi Elem. Eucl.*

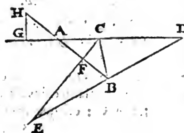
Aliter.

Fingatur data recta transire per puncta A & C; ad hanc igitur ut ducamus perpendicularem, sumatur C D æqualis duplæ C A, & ex D, ut in 1^{ma} figura, ad libitum agatur D B E, faciendo in illa D B æqualem D A; aut ex C, ut in 2^{da} figura, ducatur utcunque C B, in eáque sumendo C B æqualem C A, agatur D B E. Deinde positâ E B æquali B D, ducantur E C & B A H sese secantes in F. Si ergo, ut in 1^{ma} fig., A H ponatur æqualis A D; vel, ut in 2^{da} fig., A H æqualis A C, ac deinde A G fiat æqualis A F, erit juncta G H ipsi A C perpendicularis.



Ad quod demonstrandum, ducatur in 1^{ma} figura recta D F.

Quoniam itaque recta B A, in utraque figura, à recta E C, haud secus ac in primo modo 2^{di} Problematis ostensum fuit, bifariam dividitur in F, atque in prima figura B D ex constructione ipsi D A sit æqualis, & D F utrique $\triangle^{lo}$ B D F & F D A communis: erit quoque [g] angulus B F D angulo D F A æqualis, ac proinde uterque [h] rectus. Eâdem ratione recti erunt anguli B F C & C F A in 2^{da} figura. Quare cum in 1^{ma} figura $\triangle^{lorum}$ D A F & H A G [i] anguli qui ad A, ut &, quæ ipsos cingunt, latera sint sibi invicem æqualia: erunt quoque anguli [k] D F A & G æquales. Est autem angulus D F A, ex demonstratis, rectus. Quapropter & angulus G re-



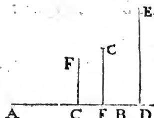
g p 8 *Primi Elem. Eucl.*
h p 8 *def. Primi Elem. Eucl.*
i p 15 *Primi Elem. Eucl.*
k p 4 *Primi Elem. Eucl.*

G rectus erit, ac idcirco G H perpendicularis ad A C. Eodem argumento concludes, angulum G in 2da figura recto angulo C F A esse æqualem; ideoque G H, ut ante, ipsi A C perpendicularem. Quod erat faciendum.

PROBLEMA V.

Datâ rectâ lineâ indefinitâ A B, à puncto in ea vel extra ipsam dato C, rectam lineam ducere C F, quæ ad datam AB sit perpendicularis. *Problema VI & VII Primi Elem. Euclidis.*

Constructio.



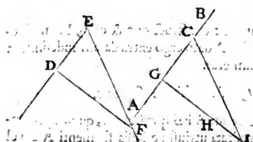
Ductâ, ut in præcedenti Problemate, super A B utcunque perpendiculari D E, agatur ex C per tertium Problema eidem parallela C F: eritque hæc ipsa quæsita.

Cujus demonstratio ex 29 Primi Elementorum Euclidis est manifesta.

PROBLEMA VI.

Ad datam lineam rectam A B, datumque in ea punctum C, angulum rectilineum constituere A C I, dato angulo rectilineo E æqualem. *Problema IX Primi Elem. Euclidis.*

Constructio.



Constitutâ super D E, per 4tum Problema, perpendiculari D F, occurrente ipsi E F in F, ponatur ad punctum C in A B ª recta C G ipsi E D æqualis, & ex G excitetur super A B, per antecedens Problema, perpendicularis G H: dico, si in ea sumatur *a p 3 Petit.*

b 23 Primi. matur [b] G I æqualis D F, jungaturque C I, angulum A C I angulo E esse æqualem.

Demonstratio.

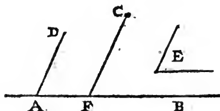
c Ex constructione. Quoniam enim $\triangle^{lorum}$ D E F, G C I anguli qui ad D & G [c] recti sunt, ac idcirco æquales; & latera E D, D F lateribus C G, G I, quæ circa æquales sunt angulos, singula singulis sunt æqualia: erunt etiam d p 4 Primi Elem. Eucl. anguli G C I & E [d] æquales. Quod facere oportebat.

PROBLEMA VII.

Datâ rectâ lineâ indefinitâ A B, à puncto extra ipsam dato C rectam lineam ducere C F, quæ cum data A B angulum rectilineum faciat C F B, dato angulo rectilineo E æqualem.

Constructio.

Ad punctum quodcunque A in A B constituto, juxta præcedens Problema, angulo D A B æquali dato E, ductâque ex C per 3^{tium} Problema rectâ C F parallelâ rectæ A D: dico angulum C F B angulo E

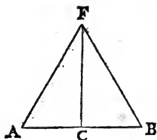


esse æqualem. Demonstratio ex constructione & ex 29 Primi Elementorum Euclidis elucescit. A dato ergo extra datam indefinitam puncto &c. Quod faciendum erat.

LEMMA, ad Problema sequens.

Triangulorum æquilaterorum A F B quadratum, quod à perpendiculari F C describitur, quadrati utriusque basis segmenti A C vel C B triplum est.

Quod



Quod enim AC & CB sint æqualia, hinc patet, quòd $\square^{ta}$ ex AF & FB æqualia sint; & $\square^{tum}$ quidem ex AF æquivaleat [a] duobus ex AC & CF, & $\square^{tum}$ ex FB duobus ex BC & CF. Unde commune utrinque auferendo $\square^{tum}$ ex CF, relinquitur $\square^{tum}$ ex AC æquale ei quod ex CB; ac proinde AC æquale CB. Jam verò $\square^{tum}$ ex AB vel AF est $\square^{ti}$ ex AC quadruplum. Quocirca qualium partium $\square^{tum}$ ex AC est 1; talium $\square^{tum}$ ex AF erit 4; & $\square^{tum}$ ex CF partium 3, hoc est, $\square^{tum}$ ex CF triplum erit $\square^{ti}$ AC vel CB. Quod erat propositum. Ubi etiam facile est ostendere, si in $\triangle^{lo}$ AFB quadratum perpendicularis CF quadrati utriusque basis segmenti AC vel CB est triplum, $\triangle^{lum}$ illud esse æquilaterum. Etenim $\square^{to}$ ex AC vel CB valente 1, cum sic $\square^{tum}$ ex CF valeat 3, ideoque [b] $\square^{tum}$ ex AF vel FB 4; atque tantundem etiam valeat $\square^{tum}$ ex AB, erunt tria $\square^{ta}$ ex AF, FB, & AB inter se æqualia, adeoque etiam eorum latera AF, FB, & AB, ac eapropter $\triangle$ AFB æquilaterum. Ut proponebatur.

a per 47 Primi Elem. Eucl. vel per 4 Prop. 2dæ partis primi tractatus.

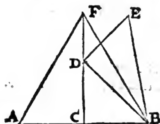
b per 47 Primi Elem. Eucl. vel per 4 Prop. 2dæ partis tractat. primi.

PROBLEMA VIII.

Super data recta linea terminata AB triangulum æquilaterum constituere.

Problema 1 Primi Elem. Euclidis.

Constructio.



Secetur AB per 2dum Problema bifariam in C, & ex C super AB per 5tum Problema erigatur perpendicularis CF, deinde sumendo in ea [a] CD æqualem AC vel CB, ducatur DB, & super hac constituatur per 5tum Problema ad punctum D perpendicularis DE æqualis DC, jungaturque EB. Dico si sumatur CF æqualis BE, aganturque AF, FB, $\triangle^{lum}$ AFB esse æquilaterum.

a per 3 Petit.

Demonstratio.

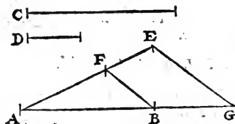
Quoniam enim rectæ C D, C B ex constructione sunt æquales, & C D ad A B perpendicularis, erit [b] □tum ex D B duplum □ti ex D C vel CB. Eodem modo, quoniam □tum ex BE est æquale □tis ex BD, DE, atque □tum quidem ex BD duplum sit □ti ex CB, at □tum ex D E æquale □to ex DC vel CB, erit □tum ex BE, hoc est, CF, □ti ex AC vel CB triplum: ac idcirco △ AFB per præmissum Lemma æquilaterum. Quod erat faciendum.

b p 47 pr. lib. 1. Eucl: vel per 4 pr. tractatus primi.

PROBLEMA IX.

Datam rectam lineam terminatam A B producere ad G, ita ut tota AG ad productam GB datam habeat rationem C ad D.

Constructio.



a p 3 Petit.

Ductâ ex A rectâ AE, faciente cum AB angulum quemcunque, ponatur [a] in ea AE æqualis C, ut & EF æqualis D; junctâque FB: dico, si eidem agatur parallela EG, occurrens productæ A B in G, A G esse ad G B, ut A E ad E F, hoc est, C ad D.

Demonstratio.

Per 2dam Sexti Elem. Eucl. A B est ad B G, sicut A F ad F E; & componendo [b] A G ad G B sicut A E ad EF, hoc est, C ad D. Ut faciendum proponebatur.

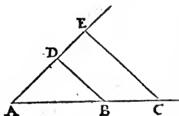
b p 9 Quinti Elem. Eucl.

PROBLEMA X.

Tribus datis rectis lineis terminatis A B, B C, & A D quartam proportionalem adinvenire D E: *hoc est, ut A B sit ad B C, sicut A D ad D E.*

Problema IV Sexti Elem. Euclidis.

Pro-



Problema hoc juxta modum Euclidis construi potest, ponendo nempe duas priores AB, BC in aliqua recta A C, & tertiam AD in quacunque alia AE, quæ cum A C quemvis faciat angulum CAE. Si enim ducatur BD, tum ipsi parallela CE: erit D E quarta quæsita.

Ubi hoc solùm notandum, ut omnia rectis lineis perficiantur, quòd CE duci debeat ipsi BD parallela juxta 3^tium^ nostrum Problema, non autem juxta 10^mum^ Problema lib. I. Elem. Euclidis. Quemadmodum etiam non aliter dissentimus ab Euclide in 3^tio^ Problemate Sexti Elem. ubi docet: *Ad datas duas rectas lineas terminatas tertiam proportionalem invenire*; ut & in primo: *Ad imperatam aut imperatas partes è data recta terminata auferendas*; sicut etiam in secundo. *Ad datam rectam terminatam datâ ratione similitérve secandam, ut data altera terminata secta fuerit.* *Probl. III Sexti Elem. Eucl.* *Probl. I Sexti Elem. Eucl.* *Probl. II Sexti Elem. Eucl.*

Eodem modo per solas rectas lineas solvere licet 11, 12, 13 & 14 Problemata lib. 1^mi^; 1^mum^ lib. 2^di^; 1, 4 & 6^tum^ lib. 3^tii^; 2, 3, 6, 7, & 15^tum^ lib. 4^ti^; & 6^tum^ & 10^mum^ lib. 6^ti^ Elem. Euclidis. Id quod patet, considerando illa, vel per unum, vel per plura jam soluta Problemata, semper esse solubilia, & quòd in his ipsis construendis sit sequenda tantùm methodus jam ostensa.

Quare cum omnia Geometrica Problemata simplicia semper aliqua horum existant, vel ad hæc mediante æquatione reduci possint, de solutione illorum satis superque dictum existimamus.

SVP-

SUPPLEMENTUM CONSTRUCTIONIS SIMPLICIUM PROBLEMATUM, continens expoſitionem eorum, quæ, ad ipſa in campo conſtruenda, tanquam obvia requiruntur; atque in ſeptem fermè ſequentibus conſiſtunt Propoſitionibus.

I *PROPOSITIO.*

Datam rectam lineam terminatam in campo in continuum & directum ab utraque parte producere.

Recta linea in campo communiter dari ſolet terminata per ſola ejus extrema puncta, quæ in praxi Geodætica deſignantur baculis rectis ſeu paxillis ad plumbum in terram defixis, inter quæ puncta tum porrò recta illa linea mente ducta concipitur. Quæ quidem lineæ aliàs, cùm limites agrorum, foſſas, propugnacula, valla, ſimiliáve deſignare debent, indicari ſolent per tenues ſulcos, terræ leviter impreſſos, quos Belgæ vulgariter *kielſpitten* appellant.

C A B D
· · · ·

Poſito itaque datam rectam AB in campo deſignari per duos baculos rectos in A & B perpendiculariter in terram defixos: ut ipſa hinc inde in continuum producatur, prodire oportet extra eam ad C & D, ita ut, exiſtente in C, ſi dirigatur viſus versùs baculos in A & B, hi ipſi inter ſe congruere videantur, hoc eſt, in eodem viſus radio appareant; at verò exiſtente in D, convertendo oculos ad A & B, ut eidem rurſus in eodem radio viſuali ſeu ſibi ipſis reſpondere conſpiciantur. Quod ſi fieri ſupponatur & baculi duo ad plumbum in C & D deſigantur, linea A B ad utramque partem erit producta ad C & D. Eodem modo, progrediendo ſemper ulteriùs atque ulteriùs, licet AB ad utramque partem in continuum & directum in campo producere.

E quibus etiam fit manifeſtum, in campo rectam dari poſitione ſeu utrinque indefinitam, datis tantummodo utcunque duobus punctis, per quæ recta illa incedere ſeu tendere intelligatur, ſupplendo cogitatione ipſam hinc inde indefinitè prædicto modo in directum eſſe protenſam.

II *PRO-*

II PROPOSITIO.

A dato puncto A ad datum punctum B rectam lineam in campo ducere.

C A D B

Problema hoc per præcedens absolvitur. Etenim si primò linea A B, quam inter data puncta A & B concipimus, ad unam aut alteram partem producamus, ut hîc ad C; tumque ab A ad B cum baculo aliquo D progrediamur, ita ut respiciendo baculi in A & C continuè sibi ipsis respondere videantur: ducta intelligetur ab A ad B recta linea; hoc est, translatio baculi D ab uno loco A ad alterum B, lineæ quæsitæ ductum designabit.

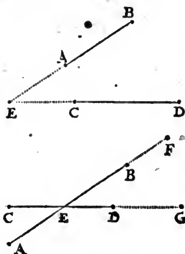
Quod & alio modo præstare licet, per inventionem plurium punctorum, non producendo rectam A B, ope nimirum alicujus socii. Etenim manente uno penes alterutrum baculorum A vel B, puta A, injunget alteri, ut alibi locorum inter A & B in eodem radio visuali baculum rectum erigat D, hoc est, ut baculus D in A congruere videatur cum baculo B, seu D impediat quo minùs B ex A conspici possit. Quod ut fiat, is, qui ad A est, manu vel pileo signum dabit ad dextram vel sinistram (prout ad hanc vel illam partem baculus est constituendus) donec illum in eodem radio, neque ampliùs deflectentem, deprehenderit. Dein signum manu vel pileo dabit deorsum, significans baculum D in terram perpendiculariter esse figendum. De istis enim socios ante inter se convenire oportet.

Eodem modo innumera puncta inter A & B in campo reperiri possunt. Atque hâc ratione licet prodeundo ab A ad B cum baculo recto D ab uno dato puncto A ad alterum datum punctum B rectam lineam in campo ducere.

III PROPOSITIO.

Datis in campo duabus rectis terminatis non parallelis, ipsarum concursus seu intersectionis punctum invenire.

Esto data inter A & B puncta recta A B, non parallela rectæ C D, datæ inter puncta C & D.



Si ergo AB, CD ad se invicem inclinent ad partes A & C, & quæratur punctum E, in quo sibi mutuò productæ occurrant, producenda est AB, juxta 1mam Prop., versùs A, hoc est, exire oportet ab A in directum ipsius AB cum baculo recto usque dum perventum sit in directum ipsius CD, hoc est, eò loci, quò baculi in C, & D sibi mutuò respondere videantur. Quod si fieri contingat in E, ibique perpendiculariter baculus humi defigatur, is quæsitum in campo concursus punctum ostendet.

Sed AB secante CD, oportebit, productis primùm AB, CD, juxta 1mam Prop., ad unam aut alteram partem ad F & G, invenire, ut jam dictum est, rectarum BF, DG punctum concursus E. Erecto enim in E baculo recto monstrabit is similiter punctum, in quo rectæ AB, CD in campo sese mutuò intersecant. Ut requirebatur.

Quemadmodum autem aliquis producendo utramque rectam AB, CD ad F & G, sine alterius ope, punctum intersectionis E investigare potest, ita quoque licet continuando tantùm alterutram, puta AB, ad F, idem auxilio secundi invenire, hoc modo:

Etenim exeunte uno cum baculo aliquo à B versùs A in directum ipsius BF, donec ab altero ad D, sicut præcedenti Propositione fuit explicatum, sit certior factus se pervenisse in rectam DC, quod contingere suppono in E: ostendet rursus baculus in E erectus perpendicularis punctum intersectionis quæsitum.

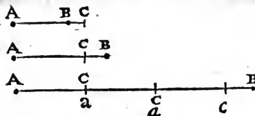
Quod idem etiam neutram producendo rectam obtineri potest, si tres sint. Si enim consistente primo ad A, secundus exeat cum baculo, ab A versùs B in recta AB, donec pervenerit in rectam CD, quod ex tertio, qui consistit ad D, uti supra dictum fuit, rescire potest, ibique baculum erigat perpendicularem; inventum erit rursùs in campo quæsitum punctum intersectionis E.

IV PRO-

IV PROPOSITIO.

De modo capiendi longitudinem datæ rectæ lineæ terminatæ in campo.

Esto in campo data recta intercepta inter puncta A & B, cujus longitudinem ut exploremus, eligendus erit baculus perlongus seu pertica AC; aut ejus loco catena ferrea vel cuprea longitudinis cujuslibet, quæ vice funis vel restis, quæ expansioni aut contractioni nimis



est obnoxia, fungatur. Hæc enim si applicetur ad puncta A & B, ita ut una ejus extremitas conveniat cum medio unius baculi A, indicabit medietas alterius baculi B in ea longitudinem datæ rectæ A B. Quòd si verò pertica hæc aut catena A C minor fuerit rectâ A B, oportebit admotâ illâ cum una sua extremitate ad punctum A eandem cum altera sua extremitate extendere versùs B, totiesque in recta A B huc progrediendo deferre, donec cum hac ipsa perventum fuerit ad B vel C, ubi reliqua longitudo CB brevior sit reperta quàm AC. In quem finem si alter cum extremo catenæ aut perticæ A C præcedens singulis vicibus bacillum humi defigat, qui ab insequente altero colligatur, denotabit A C toties sumpta, quoties bacillus fuerit collectus, unà cum parte reliqua B C, totius rectæ A B longitudinem quæsitam.

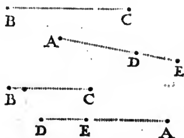
Ubi notandum, in delatione ipsius A C in recta AB, advertendum esse, quod in 2da Propositione fuit expositum: item quòd quis solus ope perticæ datæ rectæ longitudinem in campo investigare queat, ubi, si catenâ id præstare velit, socium habere oportet. Denique, ad dictam longitudinem A B illîc capiendam, haudquaquam opùs esse,

 ut

ut attendamus, quot virgæ, pedes, pollices, aliævè partes contineantur in AC, sive etiam CB, cum nihil referat ipsam A C per hujus aut illius mensuræ numeros exprimere, verùm suffecerit datæ A B magnitudinem, catenæ aut perticæ beneficio, non aliter quàm in charta rectæ alicujus magnitudo, seu inter data puncta intercapedo, circino, qualis reipsa existit, accipi solet, comprehendisse atque indagasse.

V *PROPOSITIO.*

Ad datum punctum A in data recta indefinita AD rectam lineam in campo collocare A E, datæ rectæ terminatæ B C æqualem.



Explorata perticâ aut catenæ beneficio, ut in antecedenti propositione, longitudine rectæ BC, collocetur ea ab A versùs D in recta A D, observando ad id, quæ in 1ma & 2da Propbus sunt exposita. Hæc igitur si pertingere supponatur usque ad E, erit A E æqualis B C.

Etenim, quoniam, quæ eidem æqualia sunt, etiam inter se æqualia existunt, illa autem æqualia dicantur, quæ in omnibus sibi mutuò congruunt: sequitur, si B C & A E singulæ longitudini æquales sunt, quæ perticâ aut catenâ comprehenditur, esse quoque A E ipsi B C æqualem. Ut requirebatur.

His adjunge binas sequentes Propositiones, ejusdem naturæ cum præcedente.

VI *PROPOSITIO.*

Datis in campo duabus rectis terminatis AB & C, alterutri A B rectam lineam in directum adjungere BD, æqualem alteri C.

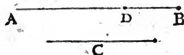
Quo-

Quoniam hoc fieri potest producendo rectam AB versùs A vel B, supponamus id fieri debere ex parte B: hinc productâ AB per 1mam

Prop. usque ad D, ita ut BD per antecedentem Prop. sit æqualis ipsi C, erit AD ipsarum AB & C summa quæsita.

VII PROPOSITIO.

Datis in campo duabus rectis terminatis inæqualibus AB & C, de majore AB rectam lineam detrahere AD, æqualem minori C.



Quandoquidem hoc similiter fieri potest ad partem alterutram A vel B; supponamus id faciendum esse ad partem A. Quocirca collocatâ ad punctum A in rectâ AB per 5tam Prop. rectâ AD æquali ipsi C, erit C ex AB subducta, ac relinquetur DB. Quemadmodum requirebatur.

Et tantum de Problematum Simplicium exegesi, cui breviter subjungemus constructionem Planorum Problematum, hoc est, ad quorum solutionem circuli porrò descriptione est opùs, explicantes simul modum, quo ipsa in campo expedire licet.

De Constructione Planorum Problematum Geometricorum, seu, quæ, ductis rectis lineis, descriptisque circulorum circumferentiis, solvi possunt.

POSTULATUM.

Postuletur: ut è dato puncto ceu centro in dato intervallo circulum describere liceat.

Explicatis iis, quæ ad Simplicium Geometriæ Problematum constructionem pertinent, atque eorum concernunt praxin in campo: congruum videtur, ut deinceps hîc exponamus Planorum Geometricorum Problematum constructionem, tradendo similiter simul ea, quæ, ad ipsam in campo expediendam, cognitu sunt necessaria. Quare cum Simplicia Problemata, ut ex præcedentibus constat, absque ullo instrumento perfici queant, nisi quis perticam aut baculos, quibus ad eorum praxin usi sumus, pro talibus habere velit: ita hæc è contra, præter illa, quæ ad Simplicium constructionem opus sunt, sine instrumento ad id requisito in campo absolvi nequeunt. Etenim quemadmodum simplicia Problemata per solas rectas lineas, Plana verò descriptis insuper circulis solvuntur; atque in campo rectarum quidem linearum occursus sive intersectio reperiri possit solis radiis visualibus, absque ullius instrumenti præsidio: ita ex adverso fit, ut rectæ lineæ & circuli, vel etiam duorum circulorum occursus sive intersectio, in campo sine eo non inveniatur. In quem igitur finem apud Geodætas in usu est instrumentum æneum rotundum, Astrolabium dictum Geometricum, divisum in 360 partes æquales, quas vocant gradus; quorum singuli rursus mente in 60 alias minores seu minuta subdividi concipiuntur. Sed quoniam omnem cognitionem ex præcedentibus constare oportet, & antequam ad Planorum Problematum constructionem accedatur scire decet, quo pacto circulus Geometricè in dictos gradus & minuta sit dividendus; quod quidem difficilius quàm ipsa Planorum Problematum solutio est habendum, cum ad id scientificè perficiendum constructio Solidorum & Linearium Problematum nota requiratur: idcirco non convenit juxta artis naturam, ejusmodi instrumentum

ad

ad planorum in campo constructionem adhibere, sed de simpliciore cogitandum est. Unde cum quærendo illud reperissem, ad id simplicius magisvé proprium excogitari non potuisse, quàm Crux vulgaris Metatoria, qualis hîc depicta cernitur, quatuor constans fixis & immobilibus pinnacidiis seu pinnulis, æquali distantiâ à se invicem remotis, quatuorque constituentibus angulos rectos: Illam ergo, postquam superiùs ostendimus, quâ ratione rectus angulus constituatur, sine difficultate ulla ad Planorum Problematum solutionem in campo admittendam esse censuimus, ideoque usum ejus in sequentibus Problematibus enucleandum.

I · *PROBLEMA.*

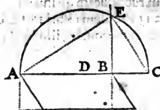
Datis duabus rectis lineis, mediam inter eas invenire proportionalem: *Problema 5 Sexti Elem. Euclidis.*

Vel,

Datum parallelogrammum in quadratum transformare.

Invenienda sit inter A B & BC media proportionalis: vel esto AB longitudo, & B C latitudo parallelogrammi, quod in quadratum sit convertendum.

Constructio.



Constitutis A B, B C in una linea recta A C, dividatur [a] hæc bifariam in D, & ex D intervallo A D vel D C, per Postulatum præcedens, describatur super A C semicirculus AEC. Tum ex B erectâ super A C [b] perpendiculari B E, occurrente peripheriæ in E, erit B E media proportionalis inter A B & B C, vel etiam □tum ex BE æquale erit parallelogrammo longitudinis AB, & latitudinis B C.

a p 2 Probl. pag. 128.

b p 5 Probl. pag. 129.

Cujus demonstrationem manifestam reddunt prop. 13tia lib. 6, ut & prop. 14 lib. 2di Elem. Euclidis.

Ut autem per allatam *Crucem Metatoriam* in campo inveniatur locus

cus E, in quo perpendicularis BE circumferentiæ AEC occurrit: notandum est, angulum AEC, contentum sub rectis AE, EC [c] esse rectum, ac proinde si, deambulantes in recta B E cum cruce, experiamur, conspiciendo punctum unum A per duas oppositas pinnulas, punctum alterum C tunc simul etiam conspici posse per duas reliquas oppositas, designabit punctum E, ubi hoc continget, cum tam in recta B E, quàm in circumferentia A E C existat, locum ante dictum quæsitum.

c p 31 Tertii Elem. Eucl.

Idcirco, ut progrediendo in B E innotescat, num eum ita quærendo ulterius à B recedere oporteat, an verò propius ad B accedere: sciendum est, rectas omnes, ductas ex aliquo puncto in B E, sumpto inter B & E, ad puncta A & C, obtusos semper angulos efficere; at verò illas omnes, quæ ducuntur ex quolibet puncto in producta B E extra E ad A & C puncta, acutos semper constituere angulos. Quocirca si, conspiciendo punctum A per oppositas duas pinnulas, punctum C appareat extra radium duarum aliarum oppositarum ad sinistram, perspicuum est ulterius in B E à B versùs E esse recedendum; sin autem C extra hunc radium ad dextram apparuerit, tum in eadem recta propiùs accedendum esse ad B, donec simul utrumque punctum per crenas oppositarum pinnularum conspici possit. Id quod eodem modo in sequentibus Problematibus intelligi debet.

NOTA.

Haud dissimili ratione licet figuram rectilineam quamcunque in quadratum commutare. Si enim, juxta 13 Problema libri 1[mi] Elem. Euclidis, datæ figuræ fiat parallelogrammum æquale, illudque, ut modò ostensum fuit, in quadratum transformetur: habebitur quæsitum.

II *PROBLEMA.*

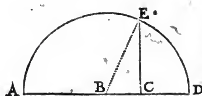
Trianguli rectanguli datâ Hypotenusâ, & uno circa rectum angulum latere; invenire latus alterum circa rectum:

Vel,

Duobus datis inæqualibus quadratis, invenire tertium, æquale differentiæ datorum.

Esto A B hypotenusa, & B C unum latus circa rectum angulum trianguli rectanguli, cujus latus alterum circa rectum est inveniendum; vel sunto AB, BC latera duorum inæqualium quadratorum, AB quidem majoris, B C autem minoris, & oporteat invenire tertium quadratum æquale differentiæ datorum.

Constructio.



Constitutis A B, B C in directum, producatur AC versùs C, & ex B intervallo A B [a] describatur semicirculus A E D. Tum ex C ductâ C E ipsi A D [b] perpendiculari, occurrente circumferentiæ in E: dico ipsam esse latus alterum trianguli quæsitum; vel etiam si super C E describatur quadratum, hoc ipsum esse differentiam quadratorum ex AB & BC.

[a] Antecedens Postulatum
[b] p 5. Probl. pag. 139.

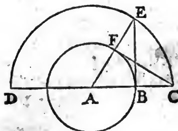
Demonstratio.

Junctâ B E, quoniam [c] △ B E C est rectangulum, & data B C unum latus circa angulum rectum, & hypotenusa BE [d] æqualis datæ AB: patet CE esse latus alterum circa rectum.

Porrò cùm [e] □tum ex B E sit æquale duobus □tis ex B C & C E: constat, si □tum ex BC à □to ex BE auferatur, differentiam esse □tum ex CE. Quare si △li rectanguli &c. Quod erat faciendum.

[c] p Constructionem.
[d] p 15 Def. Primi Elem. Eucl.
[e] p 47 Primi Elem. Eucl. vel p 4 prop. 2. partis 1. tractatus.

NOTA.



Ejusdem naturæ videtur Problema 2dum lib. 3 Elem. Euclidis, nempe: *Ex dato puncto C rectam lineam ducere C F, quæ tangat datum circulum* FB. Quod ut fiat, ducatur ex C per A recta linea, & ex A intervallo A C describatur semicirculus C E D. Deinde [f] ex B ductâ BE perpendiculari ad DC, occurrente circumferentiæ in E, jungatur A E, secans circumferentiam circuli F B in F, ac denique C F, quæ circulum F B

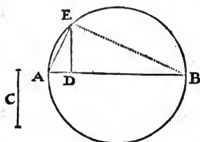
[f] p 5. Problema pag. 139.

V tan-

tanget in F. Huc referendum quoque videtur Problema 1mum lib. 4. Elem. Euclidis: *In dato circulo (cujus diameter A B) rectam lineam collocare A E, æqualem datæ rectæ lineæ C, quæ ipsâ A B non sit major.* Idem namque hoc est, ac si ex uno dato latere circa rectum angulum & hypotenusa trianguli rectanguli quæratur latus alterum circa rectum.

g p 3 Probl. Sexti Elem. Eucl.

h p 5 Probl. pag. 139.



Si enim g, ut pag. 143 dictum est, ad A B & C inveniatur tertia proportionalis A D, hoc est, ut A B sit ad C, sicut C ad A D; & ex D h ad A B erigatur perpendicularis D E, occurrens circumferentiæ in E, ducaturque AE: dico A E æqualem esse ipsi C. Ad quod demonstrandum, si jungatur E B, erit i A B ad A E, sicut A E ad A D. Quare cum per constructionem A B sit ad C, sicut C ad AD, sequitur AE ipsi C esse æqualem.

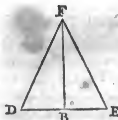
i p 31 Tertii Elem. Eucl. & coroll. 8væ Sexti Elem. Eucl.

LEMMATA, ad sequens Problema.

I.

Esto D F E triangulum isosceles, æqualia habens latera D F, FE: dico, si ex F ad latus tertium D E demittatur perpendicularis FB, segmenta D B & B E similiter esse æqualia.

k p 47 Primi Elem. Eucl. vel 4 Prop. 2. partis 1. tractatus.



Quoniam enim D F æqualis ponitur ipsi F E, erit & □tum ex D F æquale □to ex FE. Jam verò □ DF k æquale est duobus □tis ex D B & B F; at □ F E æquale duobus □tis ex EB & BF. Æqualia igitur sunt bina □ta ex D B & B F binis □tis ex EB & BF. Unde dempto utrobique communi □to ex B F, remanebit □tum ex D B æquale □to ex BE; ac proinde D B æqualis B E. Quod erat propositum.

II. Esto

II.

Esto triangulum D F G, inæqualia habens latera DF, FG, quorum DF sit minus quàm FG. Dico, si ex F ad latus tertium DG demittatur rursus perpendicularis FB, segmenta DB & BG similiter fore inæqualia, ac D B minus quàm BG.

Cum enim DF minor sit quàm FG, erit quoque $\square^{tum}$ ex DF minus $\square^{to}$ ex FG. Jam verò [l] $\square^{tum}$ ex DF est æquale duobus $\square^{tis}$ ex D B & B F, & $\square^{tum}$ ex FG æquale duobus $\square^{tis}$ ex GB & B F simul sumptis: ac proinde, si utrinque commune tollatur $\square^{tum}$ ex B F, relinquetur $\square^{tum}$ ex DB minus $\square^{to}$ ex BG, & consequenter DB minor quàm B G. Quemadmodum proponebatur.

l p 47 Primi Elem Eucl. vel per 4 Prop. 2. partis 1. tractatus.

III.

Si trianguli scaleni D F G majus latus D G assumatur pro basi, & ad id ex opposito angulo F ducatur perpendicularis FB: erit, ut basis D G ad summam duorum reliquorum laterum D F, F G, ita eorundem laterum DF, F G differentia ad differentiam, quæ est inter D G & duplum minoris segmenti D B.

Descripto ex F intervallo FD circulo DE HI, secante DG in E, & FG in H, producatur FG ad circumferentiam in I: eritque IG summa, & H G differentia, laterum DF, FG; at EG differentia, quæ est inter D G basin & DE duplum minoris segmenti D B [m]. Quibus ita positis, dico D G esse ad IG, sicut H G ad E G.

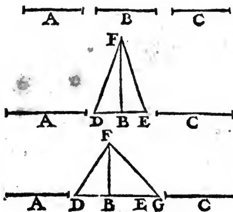
m p 3 Tertii Elem. Eucl.

n p corol. 36tæ Tertii Elem. Eucl. Quoniam enim [n] rectangulum DGE æquale est rectangulo IGH, sequitur [o] D G esse ad IG, sicut H G ad EG. Quod erat propositum.

o p 16 Sexti Elem. Eucl.

III PROBLEMA.

Ex tribus datis rectis lineis terminatis A, B, & C, quarum duæ simul, quomodocunque sumptæ, tertiâ sunt majores, triangulum constituere.



Constructio.

Primò igitur, si tres hæ rectæ A, B, & C inter se æquales fuerint, sequitur, triangulum, quod ex ipsis constitui debet, fore æquilaterum. Cujus ergo constructio, sicut Problemate 8. pag. 141 à nobis ostensum fuit, perfici potest.

At verò duabus tantùm æqualibus existentibus, ut A & C, manifestum est △lum quæsitum fore isosceles. Quo casu perpendicularis, quæ ex angulo opposito cadit in tertium latus, juxta 1mum Lemma, illud bifariam secabit. Adeò ut, si recta D E vel B sumatur pro basi, eaque [a] in B bifariam secetur, D B vel BE futura sit unum ex lateribus circa rectum, & linea A vel C hypotenusa △li rectanguli; ex quibus porrò latus alterum circa rectum seu perpendicularis F B, ut & △ DFE, per Problema præcedens, inveniri potest.

a p 2 Probl. pag. 128.

Denique, lineis A, B, & C omnibus inæqualibus existentibus, quoniam △lum, quod ex ipsis construi debet, tunc scalenum est: sequitur, perpendicularem, quæ ex angulo opposito ad latus maximum ceu basin demittitur, illud ipsum per 2dum Lemma similiter in duo inæqualia segmenta secare. Quocirca, supponendo rectam B vel D G maximam esse, si ea sumatur pro basi, & per Problema 10. p. 142 fiat, ut DG ad summam rectarum A & C, ita differentia earundem A & C ad 4tam; indicabit ea, postquam à G ad E in recta D G posita est,

per

per 3tium Lemma, differentiam, quâ basis D G superat duplum minus segmentum D B. Hinc, [b] secando D E bisariam in B, erit D B minus, & BG majus basis segmentum. Eò igitur Problema reductum est, ut [c] ex alterutro laterum circa rectum, & hypotenusâ △li rectanguli (ut hîc, ex DB & DF seu A trianguli DBF; vel ex BG & FG seu C trianguli B FG) inveniendum sit 3tium latus B F. Unde & △lum quæsitum DFG obtinebitur. Hinc:

b p 1. Probl. pag. 128.
c p 2 Præcedens Probl.

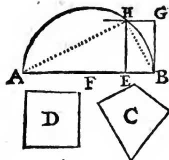
Datis 3bus rectis lineis terminatis A, B, & C, &c. Quod erat faciendum.

NOTA.

Id quod in hoc Problemate intendebamus, est, ut quæsito non nisi per unius tantùm circuli & rectarum linearum descriptionem satisfieret, vel etiam omnino per rectas lineas, si datæ omnes inter se æquales sint. Quod alioquin duobus circulis descriptis fieri assolet. Idem quoque in iis, quæ in fine Præcedentis Problematis à nobis ostensa sunt, animadvertere licet.

IV. PROBLEMA.

Parallelogrammi rectanguli, datis A B, summâ laterum, & plano C, æquali spacio, quod sub iis comprehenditur: invenire latera.



Constructio.

Converso plano C [a] in quadratum D, secetur A B bisariam in F, & ex F intervallo A F vel F B super A B describatur semicirculus AHB. Deindè ex B erectâ super A B perpendiculari BG æquali lateri quadrati D, agatur ex G ipsi AB parallela G H, secans vel tangens circumferentiam in H, & ex H ductâ H E parallelâ BG (hoc est, sumptâ BE æquali G H): erunt AE & EB latera parallelogrammi quæsita, hoc est, id quod sub A E & EB comprehenditur spacium, æquale erit dato plano C.

a p 1. Probl. pag. 151.

Demonstratio.

Primò enim, quòd G H semper circumferentiam A H B secet vel tangat, fit, quia quadratum D per constructionem est æquale plano C; & A B ex hypothesi summa laterum parallelogrammi rectanguli æqualis quadrato D. Quorum quidem parallelogrammorum, quę sub segmentis ipsius A B fiunt, [b] maximum est illud, quod super A B vel F B describitur, quadratum. Adeò ut E H vel B G, hoc est, latus quadrati D, nunquam excedere possit semidiametrum A F vel F B; ac proinde G H circumferentiam A H B in H semper secare vel tangere debeat. Deinde, quoniam rectangulum A E B, ut ex 14[ta] Prop[ne] 2[di] lib. Elem. Eucl. colligitur, æquale est quadrato super E H vel B G, hoc est, quadrato D, id quod [c] æquale est plano C: patet, A E & E B esse latera rectanguli æqualis dato plano C, quorum laterum summa est AB. Quod faciendum erat.

b p 5 Secundi Elem. Eucl.

c p Constructionem.

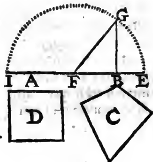
Ut autem punctum H in campo inveniatur, in quo G H circumferentiam A H B secat vel tangit: oportet, eundo cum *cruce metatoria* in recta G H, à G ad H eousque procedere, donec, dirigendo visum per duas oppositas pinnulas versùs A, per duas reliquas oppositas conspiciatur & simul B: Quoniam punctum H, ubi hoc contingit, existens in linea G H, ut & in circumferentia A H B, quæsitum punctum est. Quocirca, ut, ad hoc explorandum, constet, utrum, dum in recta G H obambulamus, à G versùs H ulteriùs progrediendum, an verò ab H versùs G recedendum sit: notandum est, lineas à puncto, inter G & H assumpto, ad A & B eductas, semper acutos angulos efficere; at, quæ ex puncto in producta G H, intra circumferentiam, ultra H ad A & B ducuntur, semper obtusos efficere angulos. Adeoque, si, collimando versùs A per duas oppositas pinnulas, ac simul per reliquas duas versùs B, punctum B extra hunc radium visualem versùs sinistram deprehendatur: indicio erit, in recta G H ab H versùs G eundum esse; sed si punctum B extra hunc radium versùs dextram appareat, è contra tunc in eadem linea à G versùs H ulteriùs procedendum esse, usque dum utrumque punctum per binas pinnulas conspicuum compererimus.

V PRO-

V PROBLEMA.

Datis parallelogrammi rectanguli differentiâ laterum A B, & plano C, æquali spacio, quod sub iis comprehenditur: invenire latera.

Constructio.



Mutato plano C, ut ante, in quadratum D, & A B in F [a] bifariam divisâ, erigatur [b] ex B super A B perpendicularis B G, æqualis lateri quadrati D, jungaturque F G. Deinde, [c] centro F & intervallo F G, descripto circulo I G E, secante A D hinc inde productam in I & E: erunt I B & B E quæsita rectanguli latera, hoc est, erit id, quod sub IB & BE comprehenditur spacium, æquale dato plano C.

a p Probl.2 pag. 128.
b p Probl. 5 pag. 139.
c p Antecedens Postul.

Demonstratio.

Etenim existente IF æquali FE, & AF æquali FB, erit & IA æqualis BE. Quibus singulis, si addatur AB, erit etiam IB æqualis AE. Quoniam autem rectangulum IBE, hoc est, AEB, ut ex 14[ta] Prop[ne] 2[di] lib. Elem. Eucl. colligitur, æquatur quadrato super BG, hoc est, quadrato D, quod, per constructionem, æquale est plano C: manifestum est AE & EB esse latera rectanguli, dato plano C æqualis, quorum laterum differentia est AB. Quod erat faciendum.

Ubi observandum, ad quæsitum in campo obtinendum, postquam planum C in quadratum D est transmutatum, ut pag.151 dictum est, quòd FE solummodo æqualis sumenda sit ipsi FG, ita ut semicirculum IGE describere non sit opus.

FINIS.

APPEN-

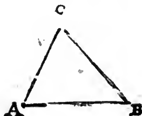
APPENDIX SIMPLICIVM PROBLEMATVM.

HActenus de Simplicibus Problematis Geometricis actum fuit, quatenus ipsa in campo tanquam in plano infinito expediri possunt, supponendo, ubivis in illo aditum patere, haud secus ac vulgò Problemata Euclidis & aliorum absolvi intelliguntur postulantium nempe, ut in eo à quovis dato puncto ad quodvis datum punctum, rectam lineam ducere, eamque ad utramque partem in infinitum producere concedatur, ut & quovis loco & intervallo circulum describere: ac summatim ut in eo omnia, quæ communiter in Geometria construenda veniunt, expediri queant, nullâ necessitate ea ad ullum terminum vel limitem astringente. Quoniam autem in praxi Geodætica sæpe contingit, ut non ita indifferenter ad quævis loca hujus plani pervenire liceat, sed illud ipsum quibusdam in locis pervium, quibusdam verò invium sit; & fluviis, paludibus, fossis ac aquis obsitum, unde complura puncta (alioquin data) inaccessa fiunt; aut idem etiam quibusdam in locis arboribus ac silvis consitum, & in quibusdam denique ædificiis, pagis, ac urbibus occupatum, aut etiam limitibus, collibus, similibusvé eminentiis impeditum, unde diversa puncta, hîc quidem visibilia, illîc autem invisibilia & plerumque inaccessa sunt, quo fit, ut ductus quidam aut linearum positiones, quæ aliàs pro datis haberi possunt, hinc incertæ & incognitæ evadant: Patet, quòd, in præcedentium Problematum Simplicium aliorumque in campo constructione, plurima expedienda occurrant, quæ aliquatenus in hac Appendice, quoniam, ut supra quidem factum fuit, perfici nequeunt, afferenda & construenda duximus. Ad quod magis adhuc me instigavit ac propensum reddidit tractatus quidam, ad manus meas ante aliquod tempus delatus, cum hoc titulo: *Geometria Peregrinans*, dialogum continens, in quo Arithmetica & Geometria tanquam sorores de fortuna sua confabulantur & de temporis conditione doctè inter se contendunt. Hic autem cum sine nomine Autoris & Typographi in lucem prodierit, ut & absque anni & loci, ubi impressus sit, indicatione; tamen ex iis, quæ in eo recensentur, eum haud ita pridem editum, colligere non est difficile.

Quem tractatum, mihi à secundo commodatum (cum hîc nusquam

quam cognitus, nedum venalis esset, nec etiam ob rationes dictas facilè comparandus; sed solummodo conjecturâ constaret, eum in Polonia typis mandatum fuisse, & quòd ejus Author nobilis esset Polonus, qui aliquamdiu in Batavia se detinuerat; ibique pluribus lustratis castris Celsissimo Principi Auriaco, Guilielmo Secundo, laudatissimæ memoriæ, fuerat familiaris), breviter perlegi, & ex eo Propositiones aliquot, quas in libello quodam pertractasse videbatur, annotavi, quarum hæc sunt verba:

Propositiones, quæ in posteriore libello explicantur, ista sunt.



1. *Quomodo linea A B inaccessibilis longitudo inveniri possit?*

2. *Quomodo linea proposita, particulis A, B terminata, eam non adeundo, ad indictam ab ipsa distantiam, linea parallela conformanda sit?*

3. *Quomodo ad data linea inaccessibilis A B longitudinem (sive illa conspectibilis sit, sive non) parallela eminus facienda sit?*

4. *Ex puncto C, quocunque loco extra lineam A B constituto (modò illud lineæ, punctis A, B terminatæ, oppositum sit) in eandem lineam A, B, ad illam non accedendo, perpendicularem demittere.*

5. *A dato puncto C ad lineam subjectam A B inaccessibilem, perpendicularis longitudinem indicare.*

6. *A dato extra lineam propositam puncto, quod versus lineæ propositæ extremitatem propositum sit, perpendicularem eminus demittere.*

7. *Ad extremitatem datæ lineæ inaccessibilis perpendicularem tantæ longitudinis, quanta postulabitur, demittere.*

8. *A puncto, extra datam lineam A B remotiùs assignato, in eandem lineam A B triplo vel quadruplo breviorem perpendicularem demittere.*

9. *Super data linea A B (sive illa conspectibilis sit, sive non) ipsam non attingendo, quadratum rectangulum æquilaterum, vel qualecunque aliud postulatum, constituere.*

10. *Dato in linea proposita, sive muro hostili, loco aliquo notabili, & certa distantia, ex qua tormentum ad locum assignatum juxta rectum angulum dirigendum sit, locum eidem distantiæ & situi convenientem invenire.*

11. *Extra datam lineam, vel muri partem, punctis A, B terminatam, ad indictam ab ejusdem muri opposito puncto distantiam, locum qui ab utroque A & B puncto æquali spatio distet, invenire.*

12. *Quomodo extra datam lineam inaccessibilem, vel murum A B, punctum inveniri possit, quod à punctis A, B juxta indictam remotionem inæqualem, exactè distet?*

13. *Idem in sylva, ubi puncta A, B eminus videri non possunt, artificiosè perficere.*

14. *Quomodo à puncto C versùs lineam oppositam A B, ob periculum vel impedimentum aliquod, propiùs non accedendo, & intra quartam, vel octavam totius distantiæ partem, à puncto C non recedendo, ex eodem puncto C in subjectam lineam A B perpendicularis demittenda sit?*

15. *Idem vel ad aliquot perticarum distantiam à puncto C versùs lineam AB non procedendo, aliâ ratione, commodè perficere.*

16. *Si punctum C in margine lacus vel sylvæ assignaretur, vel castra retrò nimis vicina essent, post punctum C non procedendo, & ab eodem puncto C ultra aliquot perticarum spatium versùs murum A, B non appropinquando, perpendicularem commodè producere.*

Hactenus recensui Problemata, quæ absque ullo instrumento Mathematico, etiam circini, ac regulæ usu, lineam A, B non adeundo, in loco patenti & aperto, per solos bacillos expediri possunt, &c.

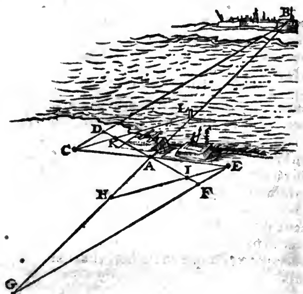
Hinc cum ante complures annos in Simplicium Problematum contemplationem inciderim, nec tamen audiverim legerimvé cuidam aliquid eorum in mentem venisse, egoque interim illa, sicut superiùs pertractata sunt, jam abhinc 13 circiter annis conscripserim, & postmodum amicis quibusdam communicaverim, ac etiam nonnullorum praxin in campo auditoribus, lectiones meas publicas frequentantibus, ostenderim: summopere miratus sum, quòd allatas Propositiones, ex superioribus Problematis Simplicibus manantes, quæque non nisi pro sedula eorundem in variis casibus praxis Geodæticæ exercitatione & animadversione haberi possunt, in prædicto tractatu offenderim. Inter quas Propositiones, cum aliquæ sint, quas mihi olim in eodem sensu considerandas proposuerim, invenerimque quo pacto absque ullo instrumento in campo perfici possent, verbi gratiâ, rectam lineam ducere, parallelam rectæ inaccessibili A B, ut &, idem perficere, quando quæsita linea per datum punctum C transire debet, ipsi A B non appropinquando, &c. nunquam mihi, quoad modum in

in hisce usitatum, satisfacere valui, quippe qui nonnisi instrumenti ope ac multùm tentando absolvitur. Unde vel eo magis gavisus fui, quòd exercitatum ingenium, mecum hac in re idem sentiens, reperērim, exinde judicans haud inutile fore, si tempus meum utcunque in hisce insumerem. Quocirca ad usum Simplicium Problematum in diversis casibus praxis Geodæticæ exhibendum, & authorem ad operis sui editionem instigandum, juxta quasdam nostras Propositiones etiam jam citatas dicti tractatus in hac Appendice breviter construemus, exceptis 12 & 13 Propositionibus, quas inter Plana Problemata numeramus, adeoque absque circuli descriptione solvi nequeunt, ac propterea nos ad earum solutionem, sicut antè in Planorum constructione, crucem metatoriam adhibemus. Unde cum eæ ab Authore inter illas ponantur, quę omnino absque ullo instrumento Mathematico (quale tamen ego hanc crucem esse existimo) ac etiam circini & regulæ (ut quidem ait) usu perficiuntur: jure dubito utrum Author dictas illas duas Propositiones per solas tres Petitiones, à nobis adductas, construere sciat: quandoquidem forsan circuli descriptionem, quam fortè mediante fune in campo ut quidem circino in charta fieri posse autumat, in partes vocabit. Quod ipsum si ad Simplicium Problematum constructionem concedatur, hujusmodi operatio in campo minùs artificiosa censenda foret, nec sic Autor novi quid in harum solutionem produxisset. At verò, quoniam hîc tantùm mentem meam de hac re declaro, ac me etiam latet, quâ ratione Author hasce Propositiones pertractaverit, visum fuit interim modum, quo brevissimam ac commodissimam earum constructionem quæsiverim, exponere, & quæ ab Authore circa hæc conscripta sint, exspectare.

1 PROPOSITIO.

Invenire longitudinem lineæ A B, cùm ad alterutrum tantùm ejus extremum A aditus patet.

Erecto ubicunque in C baculo, ac deinde in recta C B utcunque alio, ut, ex.gr., in D, sumantur in productis CA, DA rectæ A E, A F ipsis AC, A D æquales, & in directum ipsius E F retrocedatur, donec perventum fuerit in productam A B, hoc est, usque dum utrumque



punctum A & B in eadem recta appareat. Id quod suppono fieri in G, eritque G A æqualis ipsi A B.

Quocirca, ut innotescat quot virgas, pedesvé, &c. linea A B longa sit, oportet tantùm catenâ aut perticâ longitudinem lineæ G A explorare, habebiturque numerus virgarum, pedumvé, &c. longitudinis lineæ A B, quæsitus.

2 PRO-

2 PROPOSITIO.

A puncto A in recta AB rectam datam definire AL.

Non rarò contingit, ut in construendis chomatibus, promontoriis, similibusvé, recta linea determinanda sit, datum virgarum aut pedum numerum continens: ad quod faciendum, oportet operando, ut ante, in linea AG ab A usque ad H tot virgas, pedesvé metiri, quot linea A L continere debet, ac ducere H E, quæ AF secet in I. Tum sumptâ A K æquali A I, cum scapha navigandum erit ab A versùs B in recta A H, donec perventum fuerit in rectam K C, quod suppono fieri in L: eritque AL æqualis datæ rectæ AH.

3 PROPOSITIO.

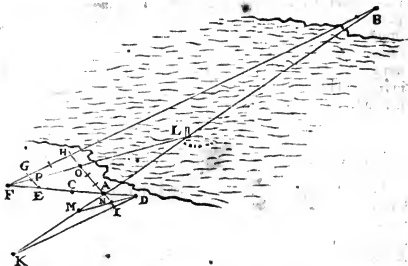
Idem efficere ad alterum lineæ A B extremum B.

Accidit interdum, fluvios vel transitus aquâ terráve reperiri, adeò latos, ut bombardis aut sclopetis defendi nequeant, quo casu aggeres tormentarii, reductus, aliáve similia fortalitia extrui solent, ad meatum præcludendum: quocirca suppositâ, ex. gr., distantiâ inter A & B majori, quàm ut globi ex iis emissi eandem emetiantur; oportet, ut à B versùs A in recta A B definiatur linea, ut B L, datæ longitudinis, quemadmodum in 1ma Propositione ostensum fuit, lineam invenire GA æqualem ipsi A B, ac deinde in ea assumere G H æqualem longitudini datæ: ductâ enim rursus H E, secante A F in I, si A K sumatur æqualis A I, &, ut ante, ab A versùs B in rectâ A H exeatur, donec perventum fuerit in rectam CK: erit LB æqualis GH. Ut requirebatur.

Quoniam autem plerumque fit, ut in linea A B non eò usque retrogradi liceat, donec GA ipsi AB sit æqualis, adeoque ad præcedentes Propositiones superiori modo construendas ad scopum pertingere non detur: idem tamen præstari potest, faciendo tantùm G A ipsius A B partem qualemcunque aliquotam, accommodando se nimirum loco ad id concesso.

Quocirca, ut, exempli gratiâ, in productâ A B inveniatur A K, quæ sit ipsius A B $\frac{1}{3}$tia pars, oportet, ut ante, defixo alicubi baculo C in producta AC assumere hinc DA æqualem A C, & illinc A F æqualem triplo ipsius A C: ac deinde in recta F B erecto utcunque baculo

G, factâque EH triplâ FG, ponatur in producta HA recta AI æqualis GE, & ab I in directum ID retrocedatur, usque dum perventum fuerit in lineam AB: eritque AK tertia pars ipsius AB. Quæ si in recta aliqua linea ter sumatur, lineæ AB longitudinem exhibebit.



Haud secus, si ab A versùs B in linea AB recta designanda sit, quæ datæ AM tripla existat, oportet, ut ante, ductâ MD, secante AI in N, factâque AO triplâ ipsius AN, exire ab A versùs B, manendo continuò in recta AM, donec perventum fuerit in rectam FO; id quod suppono fieri in L: eritque AL tripla datæ AM.

Eodem modo procedendum erit, si LB requiratur datæ KL tripla. Ubi etiam facile est ostendere, quo pacto, L & B duabus turribus aliisvé eminentioribus locis existentibus, ita ut ad ea accessus non pateat, sed tantùm ad A, punctum aliquod in producta BL, distantia eorum LB inveniri possit. Etenim inventâ primùm, ut ante, rectâ AK æquali trienti ipsius AB (supponendo scilicet loci conditionem non permittere, ut ea inveniatur æqualis, quippe quod rarò fit), ducatur FL secans GE in P; factâque AN æquali PE, ex D per N ducatur recta DNM, occurrens ipsi AK in M: erit KM tertia pars datæ LB. Quæ si ideo in recta aliqua linea ter ponatur, inventa erit longitudo ipsius LB.

Imæ PRO-

1mæ PROPOSITIONIS *alia Constructio.*

Sumpto in producta AB utcunque puncto C, ſumatur extra eam punctum aliud, ut D, & ex A & C per D rectis ductis lineis ADE & CDF, ponantur in iis DE, DF æquales DA, DC. Deinde ab E exeundo in directum ipſius EF donec perveniatur in rectam DB productam, id quod fieri ſuppono in G: erit GE æqualis AB. Ac proinde quoties data quævis menſura in GE continetur, toties eadem continebitur quoque in AB, unde & ipſa AB data erit.

2dæ PROPOSITIONIS *alia Constructio.*

A puncto A in recta AB rectam definire AI, æqualem datæ.

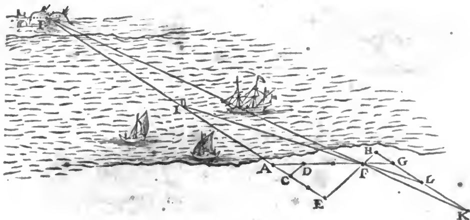
Accepto, ut ante, in producta AB puncto C, & extra eam puncto D, ducantur ADE & CDF, ita ut DE, DF ſint æquales DA, DC. Deinde productâ FE ad H, ita ut HE æquetur datæ rectæ definiendæ, oportet, ut ante, ab A versùs B exire in recta CA, uſque dum perventum fuerit in productam HD. Id quod ſi fieri ſupponatur in I, erit AI æqualis ipſi HE, hoc eſt, datæ rectæ. Ut requirebatur.

3tiæ PROPOSITIONIS *alia Constructio.*

Quòd ſi autem IB æqualis facienda ſit datæ rectæ, oportebit primùm, juxta 1mam Propnem invenire GE æqualem AB; ac deinde, collocatâ in ea GH æquali datæ rectæ definiendæ, erit rurſus, ſi ab A versùs

versùs B in directum ipsius C A exeatur, donec perventum fuerit in productam HD, recta IB æqualis datæ GH.

Si verò retrocundo ab E in directum ipsius FE eousque pervenire non detur, donec G E sit æqualis A B, ita ut præcedentes Propositiones, ut ante, expedire non liceat: poterit tamen idem præstari, faciendo ad hoc, juxta loci commoditatem, G E certam ipsius A B partem aliquotam, verbi gratiâ, tertiam.



Etenim erecto rursus in productâ A B ubicunque baculo C, in eademque assumptâ AE æquali triplæ AC, extra eam, ut ante, defigendus erit utcunque baculus D, & in recta A D sumenda A F æqualis triplæ AD. Dehinc in eadem linea producta sumendo F G æqualem A D, & in producta E F sumendo F H æqualem CD, oportet à G in directum ipsius HG retrogradi, donec perveniatur in productam BF, quod suppono fieri in K: eritque tum G K æqualis tertiæ parti ipsius AB.

Pari modo si à B versùs A in recta A B linea abscindenda sit, quæ datæ rectæ, verbi gratiâ, KL, tripla existat: oportebit, inventâ G K, in eadem à K versùs G designare datam KL, ac deinde ab A versùs B, ut ante, in recta AB exire, manendo in eum finem continuò in directum ipsius A C; donec perventum fuerit in productam F L, quod si fiat in I: erit I B tripla ipsius K L. Id quod etiam usui esse potest, si B A, latitudinem fluvii designans, major fuerit, quàm ut tormentis bellicis ab hoste integra ex B infestari possit, ad diversos in fluvio ter-

terminos definiendos, ut I, extrema ictuum determinantes, quò ipse securè navigari possit.

Nec aliter fit, si AI ipsius GL tripla requiratur.

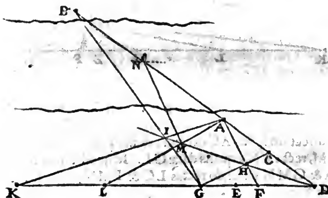
Cæterùm facilè hîc etiam ostendi potest, quo pacto longitudo lineæ BI, cùm ad punctum duntaxat A in ejus producta pervenire licet, aliter quàm supra ostensum est, inveniri possit.

Inventâ enim priùs GK, æquali trienti ipsius AB, ut hîc expositum fuit, opùs tantùm erit prodire ab F in directum ipsius IF, donec perveniatur in productam HG. Quod si fiat in L, erit LK tertia pars ipsius BI, adeoque BI data.

Sequuntur tres præcedentes PROPOSITIONES *adhuc alio modo Constructæ.*

1ma PROPOSITIO.

Acceptis in producta AB utcunque duobus punctis C & D, & extra eam pro libitu puncto E, sumantur in linea DE rectæ DF, FG æquales DC, CA, junganturque GC, AF, sese secantes in H. Deinde ex D per H ductâ DHI, junctâque GB, eandem secante in I: fiet,

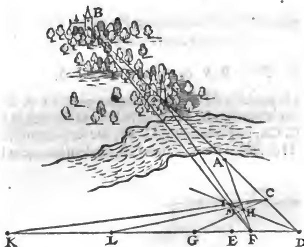


si per puncta A, I recta ducatur AIK, occurrens ipsi DE in K, linea GK æqualis propositæ AB. Hinc quoties data quævis mensura continetur in GK, continebitur eadem etiam in AB; ac proinde & ipsius AB longitudo data erit.

Idem præstare licet, si loco rectarum G B & A I K ducantur rectæ F B & C I K, reliquis manentibus, ut ante.

2da PROPOSITIO.

Si jam ab A versùs B in recta A B linea determinanda sit æqualis datæ, accipiantur, ut ante, in producta B A puncta C & D utcunque, & extra eam assumpto, ut libet, puncto E, sumptisque in linea D E rectis D F, F G æqualibus D C, C A, agantur G C, A F, sese secantes



in H, & ex D per H recta linea agatur D H I. Deinde factâ G L æquali datæ, junctâque L A, secante D H I in M: fiet, si ab A versùs B, ut supra, in directum ipsius A C exeatur, donec perventum sit in productam G M, recta A N æqualis datæ G L. Id quod etiam fieri potest loco L A & G M N ducendo rectas L C & F M N, manentibus reliquis invariatis.

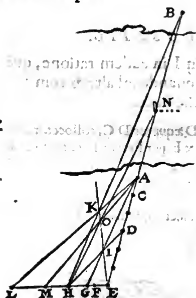
3tia PROPOSITIO.

Huc pertinent bina præcedentes figuræ.

At si B N requiratur æqualis datæ rectæ, oportet ut in 1ma Propne invenire G K æqualem A B, & in eadem assumptâ K L æquali datæ ducere L A aut L C, secantem D H I in M. Deinde eundo ab A versùs B in

B in directum ipsius A C, usque dum perventum fuerit in productam GM aut FM: erit BN æqualis ipsi K L.

Quod si contingat, ut in recta D E non eousque progredi liceret, donec G K ipsi A B sit æqualis, ad 1^mam^ & 3^tiam^ Propositionem juxta hunc modum construendas: fieri potest, ut G K, sit, ex. gr., ipsius A B tertia pars.



Etenim sumendo in producta A B utcunque punctum C, & in eadem faciendo A D, D E singulas ipsius A C triplas, oportet extra eam ad libitum sumere punctum F, & in recta E F ponere E G, G H singulas æquales A C. Deinde junctis H D, G A, sese intersecantibus in I, & ex E per I ductâ rectâ EIK, agatur H B, secans EIK in K: fietque, si ex A per K recta linea ducatur, occurrens ipsi E F in L, rectæ H L tertia pars ipsius AB.

Idem etiam absolvere licet, ducendo G B, secantem E I K in K, ac deinde ex D per K rectam DKL, loco ipsarum HB & A K L; reliquis existentibus invariatis.

Porrò si à B ex AB resecanda sit linea BN, ita ut ipsa tripla sit rectæ datæ: oportet tantùm, inventâ H L, in ea ab L ad M datam hanc collocare, ac deinde ducere M A, quæ EIK secet in O. Fiet enim, si agatur H O N, occurrens ipsi AB in N, ut recta BN sit datæ L M tripla. Ut requirebatur.

Quod ipsum quoque facere licet, si agatur MD, secans EIK in O, ac deinde ex G per O ducatur G O N, loco ipsarum M A & H O N, reliquis, ut ante, manentibus.

Eodem modo procedendum, cùm AN tripla requiritur ipsius HM.

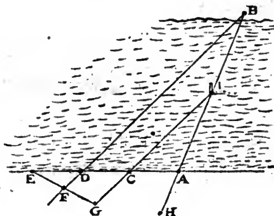
Ubi etiam facilè ostendi potest: Quo pacto & aliâ ratione invenire liceat longitudinem lineæ B N, quum tantùm ad A in producta pervenire datur.

Si enim primò inveniatur HL æqualis trienti ipsius AB, ut ostensum est, & ducatur HN aut GN secans EIK in O, ac deinde ab L eatur versùs H in linea EF, donec perveniatur in productam AO aut DO: erit, supponendo id fieri in M, LM tertia pars ipsius BN. Quocirca si longitudo lineæ LM per certam aliquam mensuram exploretur, eaque in recta aliqua ter collocetur, inventa etiam erit longitudo lineæ BN quæsitæ.

4. PROPOSITIO.

Lineam AB dividere in I in eadem ratione, quâ alia data AD in C divisa est, quando ad alterutrum tantùm ejus extremum A pervenire licet.

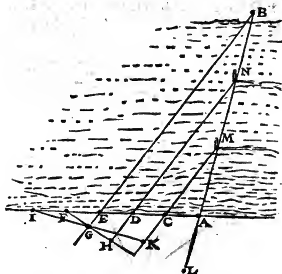
Productâ AD ad E, ita ut ED æquetur DC, collocetur in producta BD alicubi baculus F, & ex E per F recta linea agatur. In hac autem positâ FG æquali FE, & in producta BA utcunque erecto baculo H, ab A versùs B. Cum scapha navigetur in directum ipsius HA, usque dum perventum fuerit in productam GC, id quod fieri suppono in I: eritque AB in I similiter secta, quemadmodum AD in C, hoc est, erit AI ad IB, ut AC ad CD.



Eodem modo, si AC, CD, & DE omnes inter se accipiantur æquales, erit AB in I bifariam secta. Unde etiam liquet, quo pacto linea AB in 3 aut plures æquales partes sit dividenda; vel etiam quâ ra-

ratione ex ea ad A vel B quæsita pars sit auferenda. Quæ quidem omnia tam in imponendis fluvio pontibus quàm in delineandis variis operibus in locis paludosis in primis usui venire possunt.

Cæterùm, lineâ AE in plures quàm duas partes utlibet divisâ, ut, exempli gratiâ, in C & D, ad dividendam AB in M & N in eadem ratione: oportet, ut ante, producendo AE ad F, ita ut EF sit æqualis ED, in producta BE utcunque ponere baculum G; & ex F per G

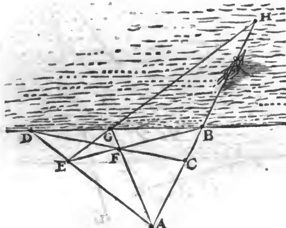


ductâ FGH in ea assumere GH æqualem GF. Deinde productâ AE ad I, ita ut EI sit æqualis EC, ducatur ex I per G recta IGK; & in eadem assumptâ GK æquali GI, colocetur in producta AB alicubi baculus L. Porrò exeundo, ut supra, ab A versùs B in directum ipsius LA, donec perveniatur in productas KC & HD, id quod fieri suppono in M & N: erit AB in M & N divisa, sicut AE in C & D. Eodem modo procede, cùm AE in plures quàm tres partes est divisa.

5 PROPOSITIO.

Lineam A B, divisam in C, ita ut A C major sit quàm C B, producere versùs B, ut tota A H sit ad productam BH, sicut AC ad CB. Supponendo quòd ultra B progredi non liceat.

Ad quod faciendum; defixo alicubi extra AB baculo D, ductisque A D, D B, & D C, agatur ex B ad E punctum quodvis in A D recta BE, secans DC in F; ac deinde ex A per F recta A F G, occurrens ipsi



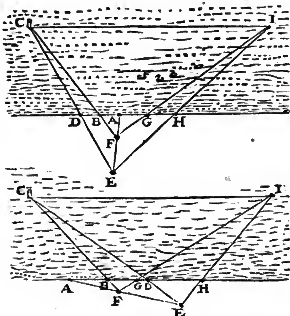
DB in G. Quo peracto, si à B cum scapha in directum ipsius A B navigetur, donec perventum sit in productam E G, ut ad H; erit AH ad HB, ut AC ad CB. Ut requirebatur.

6 PRO-

6 PROPOSITIO.

Per punctum C rectam lineam ducere C I, parallelam alteri AB, cùm intra utramque venire non licet.

Sumpto in A B utcunque puncto utroque A & B, & in ea acceptâ BD æquali BA, agatur ex C per D recta CDE. Deinde in hac assumpto pro lubitu puncto E, ductâque E A, agatur ex C per B recta



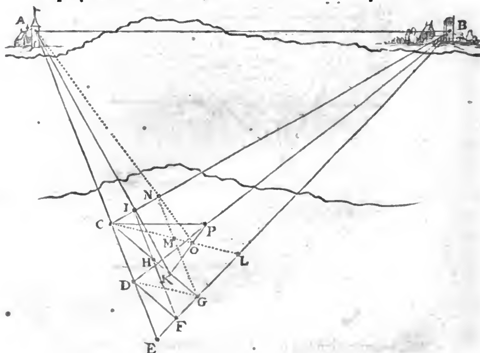
CBF, occurrens ipsi E A in F. Porrò accepto in A B utcunque alio puncto G, factâque in linea A B rectâ G H æquali G A: fiet, si à G cum scapha navigetur in directum ipsius F G, donec perveniatur in productam E H, quod fieri suppono in I, recta CI, quæ inter utrumque punctum C & I interjacet, ipsi A B parallela.

7 PRO-

7 PROPOSITIO.

Per datum punctum C rectam ducere CP, parallelam alteri AB, ad quam accessus non patet.

Sumpto enim in producta A C puncto utcunque D, ponatur in ea DE æqualis D C, ducanturque EB, B C. Deinde accepto in E B pro lubitu puncto F, collocetur in ea F G æqualis FE, junganturque FD, G C. Quo peracto, oportet ex CG abscindere C H æqualem D F, & per puncta F, H rectam ducere F H I, occurrentem ipsi C B in I.

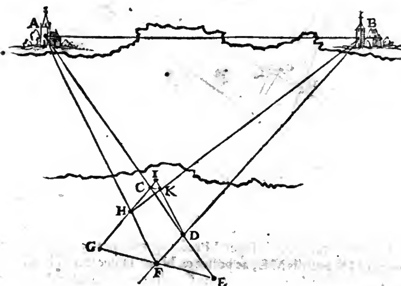


Eodem modo, assumptâ GL æquali GE, junctisque GD, LC, oportet ex CL auferre CM æqualem DG, & per puncta G, M rectam ducere G M N, occurrentem ipsi C B in N. Postea ductis ex A per I & N rectis A I K, A N O, occurrentibus ipsis C G, C L, aut postquam sunt productæ in K & O, agatur ex K per O recta K O P, occurrens ipsi DB in P: eritque juncta C P ipsi A B parallela. Ut requirebatur.

Ali-

Aliter & breviùs.

Sumpto, ut ante, in producta A C puncto D, in eaque positâ D E æquali DC, accipiatur in producta BD pro libitu punctum F, & ex E per F agatur recta EFG. In qua assumptâ FG æquali FE, junctisque

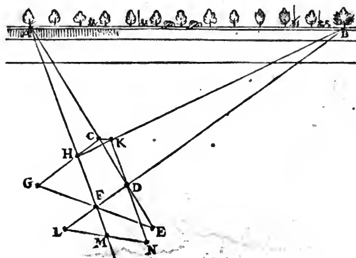


GC, FH, sese intersecantibus in H, oportet HI æqualem facere FD, & jungere I D, quæ ab H B secetur in K: eritque juncta C K ipsi AB parallela.

Aliter, non appropinquando ipsi AB.

Porrò si accidat, ut ad evadendum aliquod periculum vel ob incommodum aliquod ultra C progredi non liceat: poterimus ad idem perficiendum, postquam, ut ante, inventa est linea G C, loco sumendi in

di in ea H I æqualem FD, &c. in producta B D F collocare FL æqualem F D, ac deinde in producta A H F accipere utcunque punctum

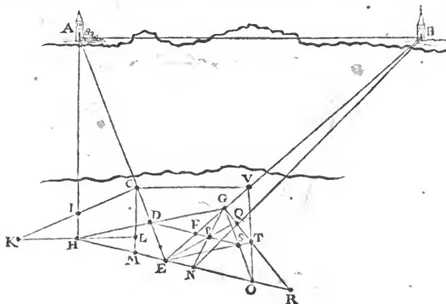


M. Fiet enim, ut, si ab L per M recta agatur linea, atque in ea sumatur M N æqualis M L, ac postea ex N per D ducatur N D K, occurrens ipsi H B in K, jungaturque CK, hæc ipsi A B futura sit parallela.

Idem aliter.

Sumpto, ut ante, in producta A C puncto D, in eaque posita D E æquali D C, agatur EB. In qua assumptis E F, FG æqualibus E D, DC, & ex G per D ducta recta G D H, collocetur in ea D H æqualis DG, junganturque H A, HE. Deinde accepto in H A pro libitu puncto I, oportet ex C per I rectam lineam ducere, & in ea assumere I K æqualem I C. Porro ducta ex K per H recta linea, in eaque accepta H L æquali H K, agatur per utrumque punctum C & L recta C L M, occurrens ipsi HE in M. Quo peracto, si in producta H E sumantur E N, N O ipsis E M, M H æquales, ducanturque N G, G O, quæ à pro-

producta DF secentur in P & S, & ex E per P recta linea agatur EPQ, occurrens ipsi NB in Q, fiet, ut si à G per Q recta ducatur linea GQR,

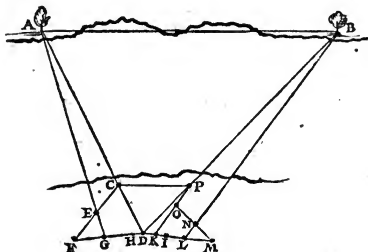


occurrens productæ HE in R, & ex E per S agatur EST, quæ à GQR secetur in T, ac deinde ex O per T recta OTV, occurrens ipsi EB in V, juncta CV sit ipsi AB parallela.

Idem adhuc aliter & brevius.

Accepto, ut ante, in producta AC puncto D, atque extra eam utcunque puncto E, ducatur ex C per E recta CEF. In qua ponendo EF æqualem EC, ducendoque FD, quæ à producta AE secetur in G, fiat GH æqualis GF. Deinde sumendo extra DB, eamve productam, pro lubitu punctum I, oportet in linea DI assumere DK, KL, & LM æquales DH, HG, & GF, & in juncta LB accipere utcunque punctum N. Postremò ducendo ex M per N rectam MNO, in eaque collocando NO æqualem NM, oportet ex K per O rectam lineam ducere KOP, quæ à DB secetur in P: eritque juncta CP ipsi AB parallela.

Ubi patet, poſtquam puncta D & E ita propè ipſum C aſſumuntur, quantum libet, quo pacto per C recta linea duci poſſit, quæ ipſi



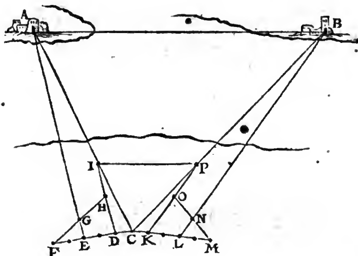
A B parallela exiſtat, non niſi ad certam diſtantiæ partem datumvé perticarum numerum retrogradiendo, neque etiam ullatenus ipſam AB appropinquando.

8 PRO-

8 PROPOSITIO.

Invenire longitudinem lineæ A B, cùm ad neutrum ejus extremum A vel B perveniri poteſt.

Ut hoc fiat, concipiantur ex puncto aliquo C, è quo utrumque punctum A & B conſpici poteſt, rectæ ductæ CA, CB; ex quibus ſi ad C, ut 4[ta] Propoſitione oſtenſum eſt, auferantur C I, C P, quæ ipſarum

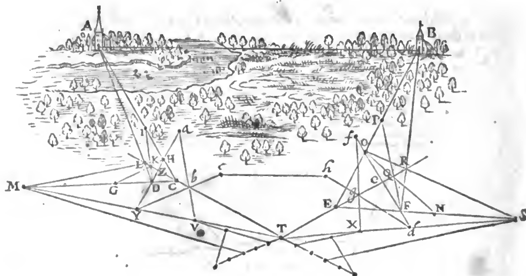


C A, C B partes ſint aliquotæ, ut, ex. gr., tertia pars: erit ſimiliter juncta I P tertia pars ipſius AB. Cujus itaque I P explorata longitudo ſi in recta aliqua ter ſumatur longitudinem quæſitæ A B exhibebit.

Ubi notandum, inventam I P parallelam quoque eſſe ipſi AB.

Porrò ſi contingat, ut puncta A & B alicubi commodè ſimul videri nequeant, ſed punctum A, exempli gratiâ, tantummodo in locis C & D; & punctum B ſolummodo in E & F, ſumatur in producta

CD utcunque punctum G, & in CA assumptis CH, HI æqualibu CD, DG, junctisque GH, DI, sese intersecantibus in K, agatur ex C per K recta CKL, secans DA in L. Deinde ductâ ex H per L rectâ HLM, occurrente productæ CD in M, procedatur eodem modo



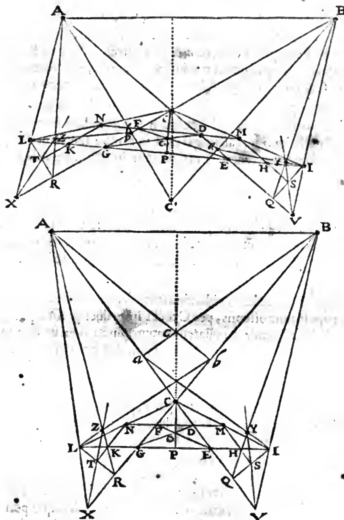
ad alteram partem. Postea productis KC, QE, donec sibi invicem occurrant in T, inveniantur, per 4^tam Propositionem, TV, TX tertiæ partes ipsarum TM, TS. Denique ductâ per puncta H, D rectâ HDY, secante TM, TK in Y & Z, accipiatur in ea Z *a* æqualis ZY, junctâque *a*V, secante KT in *b*, agatur ex Y per *b* recta Y *bc*, assumendo in ea *bc* æqualem *b*V. Eodem pacto si ad alteram partem inveniatur punctum *h*, agaturque *ch*, erit ipsa rectæ AB pars tertia, ut & ipsi parallela. Patet itaque, per hanc Propositionem nec non præcedentem ac primam, factum esse, id quod ab Autore in tribus primis Propositionibus requirebatur.

9 PRO-

9 PROPOSITIO.

Ex puncto C, utcunque è regione lineæ inacceſſæ AB dato, in eandem lineam perpendicularem demittere.

Sumantur in productis AC, BC rectæ CD, DE, CF & FG omnes



inter ſe æquales, ductâque per G & E rectâ lineâ capiantur in ea hinc inde

inde EH, HI, GK, & KL præcedentibus æquales. Tum junctis CI, CL, quæ à recta per F & D ductâ secentur in M & N, agantur DG, FE, se mutuò secantes in O, & ex C per O recta linea agatur, occurrens ipsi GE in P. Deinde acceptis EQ, GR æqualibus EP, PG jungantur QI, RL, quæ à productis MH, NK secentur in S & T. Porrò productis BI, AL usque ad productas AC, BC in V & X, agantur ex V & X per S & T rectæ, quæ à QB, RA secentur in Y & Z, & ex punctis I & L per Y & Z rectæ IY*a* & LZ *b*, occurrentes ipsis AC & BC, aut iisdem productis, in *a* & *b*. Postremò ductis *a*B, *b*A, sese secantibus, aut postquam productæ sunt, in *c*, erit recta, quæ per puncta C & *c* ducitur, ipsi AB perpendicularis. Ut requirebatur.

Quandoquidem his 4tæ Propositioni Autoris satisfactum existimamus, ponendo quòd ad quæsitum perficiendum impedimentum aliquod nulli loco nos astringat, sed in campo aperto ut Propositio requirit ubique procedere liceat, dummodo ad lineam AB non accedatur: visum fuit simul hîc afferre constructionem 14, 15, & 16 Propositionum, hoc est, quo pacto idem fieri possit, quando ob periculum aliquod vel impedimentum linea AB appropinquari nequit, neque etiam ultra $\frac{1}{4}$tam aut $\frac{1}{8}$vam distantiæ partem certumvé perticarum numerum à C retrocedere licet; vel etiam quâ ratione idem non retrogradiendo, sed è contra tantundem ad AB accedendo, absolvi queat.

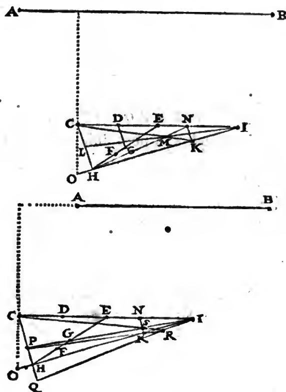
Ad quod faciendum, videndum primò, quomodo diversis modis, 7mâ Propositione ostensis, per C recta linea duci possit, quæ ipsi AB sit parallela, ad eandem nullatenus appropinquando; ut & quomodo idem præstare liceat, si tantùm ad certam distantiæ partem aut perticarum numerum retrogradiretur.

Hinc inventâ CD parallelâ ipsi AB, ut dictum est, ponatur in ea DE æqualis DC, & ex E ducatur per F, punctum quodvis extra CD, recta EF, faciens cum CE angulum quemcunque. Deinde in hac assumptis EG, GH æqualibus ED, DC, junctisque GD, HC, producatur CD ad I, ita ut EI sit æqualis EC, & agatur HI: in qua acceptâ KI æquali HC, & in hac rursus CL æquali DG, ducantur CK, LI sese secantes in M. Deinque ductâ ex H per M recta HMN, occurrente ipsi CI in N, erit, si jungatur KN, eademque ponatur in productâ IH ab H ad O, linea quæ per puncta O & C vergit ipsi AB perpendicularis.

Vel

Vel etiam sic:

Ductâ ex I per C rectâ IGP, occurrente ipsi CH in P, & in producta CH assumptâ HQ æquali HP, agatur QI, ut & PKR, occurrens ipsi QI in R. Si enim junctâ CR, secante PI in S, ex K per S aga-



tur recta KSN, occurrens ipsi CI in N: erit, ut ante, assumptâ HO æquali KN, linea quæ per puncta O & C transit perpendicularis ipsi AB.

Ubi porrò notandum, quandoquidem liberum est in inventa linea CD accipere punctum D, ut & extra eam punctum F, quòd exinde tam parum à C in linea CD progredi possimus, ut libet, sicut etiam ob angulum CEF pro libitu acutum puncta C & H tam propinqua,

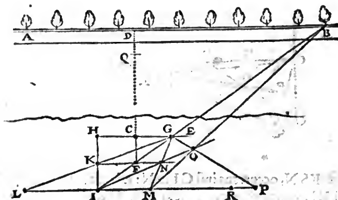
ita ut ad inveniendum punctum O non nisi ad certam distantiæ partem aut perticarum numerum retrocedere opus sit, nullatenus lineam AB appropinquando.

Denique si à C retrocedere non daretur, sed duntaxat, quantum dictum est, ad AB accedere liceret: poterit, juxta ultimum modum 7mæ Propositionis punctum C, hîc datum, illic haberi pro puncto D, atque sic inveniri CP parallela ipsi AB, postquam punctum C ibi sumptum fuerit in recta AD, tam prope punctum D, quantum libet, operando deinde super linea CP haud secus atque hîc super CDE factum fuit. Quibus simul hîc satisfactum arbitramur 6tæ Propositioni Autoris, quandoquidem hîc indifferens est, utrum datum punctum C ipsi AB oppositum sit nec ne.

10 *PROPOSITIO.*

Invenire longitudinem perpendicularis CD, quæ ex puncto C demittitur in lineam AB, posito quòd ad AB appropinquare non liceat.

Quod ut fiat, oportet primò per C, juxta 7mam Propositionem, rectam lineam ducere CE, ipsi AB parallelam, & ad eam, ut modò



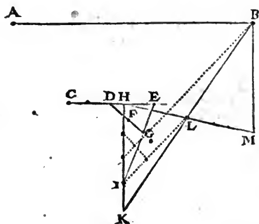
ostensum est, ex C erigere perpendicularem CF. Deinde ductâ FB, secante CE in G, factâque CH æquali CG, & FI æquali FG, positis nempe iisdem in productis EC, BF, agatur HI: In qua assumptâ HK æquali

æquali CF, ducatur ex G per K recta linea, & in ea acceptâ KL æquali KG, agatur ex L per I recta linea. Porrò in hac positâ IM æquali IH, junctâque MG, secante KFN in N, ducatur MB, quæ ab INO secetur in O: eritque, si ex G per O recta linea agatru usque ad productæ LI punctum P, abscissa MP æqualis perpendiculari CD. Hinc exploratâ longitudine lineæ MP, erit etiam longitudo perpendicularis CD data. Atque ita satisfactum est $5^{tæ}$ Propositioni, non appropinquando insuper ad AB, nec etiam, quia punctum F ad arbitrium sumitur in perpendiculari CF, ulteriùs retrocedendo quàm permittitur.

Ubi præterea notandum, si ex C super AB deducenda sit perpendicularis, quæ ipsius CD pars aliquota existat, ut QD, verbi gratiâ, $\frac{1}{4}^{ta}$ ejus pars; vel quæ datæ rectæ æqualis aut certa ejusdem pars sit, utpute $\frac{1}{4}^{ta}$ pars: opus tantùm esse, abscissâ per 4^{tam} Propositionem ex MP $\frac{1}{4}^{tâ}$ ejus parte RP, vel assumptâ RP æquali datæ aut ipsius parti aliquotæ $\frac{1}{4}^{tæ}$, à C versùs D in directum ipsius FC, juxta 2^{dam} Propositionem, rectam definire CQ æqualem MR, quo simul $8^{væ}$ Propositioni Autoris satisfactum erit.

II *PROPOSITIO.*

Ad punctum in linea AB utcunque datum rectam lineam ducere æqualem datæ, & super eadem perpendicularem, lineam AB non appropinquando.



Posito enim, quòd ad B, extremum ipsius AB, hujusmodi recta ducenda sit, oportet per C, punctum quodvis, per 7^{mam} Propositionem, ducere CD parallelam AB, & in ea ponere DE æqualem DC. Deinde assumpto extra eam utcunque puncto F, agatur ex D per

per F recta linea, acceptâque in ea DG æquali DE, & ex E per G ductâ rectâ lineâ, ponatur in ea EI æqualis EC. Porrò factâ EH æquali EG, erit HI perpendicularis ad CDE: in qua assumptâ HK æquali datæ rectæ, ducatur KB, quâ, per 4tam Propositionem, bifariam sectâ in L, agatur ex H per L recta linea. Denique acceptâ in hac LM æquali LH, ducatur MB, eritque ipsa æqualis datæ rectæ HK & perpendicularis ad AB, ut requirebatur.

Eodem modo operandum, si quæsita linea ad aliud quodvis punctum in recta AB sit ducenda. Quibus simul satisfactum existimamus 7mæ & 10mæ Propositionibus Autoris.

Porrò si requiratur, ut linea BM datum angulum cum AB efficiat, poterit, loco ducendi HI perpendicularem ad CDE, ea juxta 6tum Problema Simplex ad aliquod punctum CDE ita duci, ut nimirum angulus CHI dato angulo sit æqualis, operando ulteriùs, ut supra.

Præterea animadvertendum, quòd, si, BM existente perpendiculari super AB, per M, ut ante, recta linea ducatur, quæ ipsi AB sit parallela, aut ad A eodem modo procedatur, quemadmodum hîc ad B, recta quæ bina hæc puncta connectit, ipsi AB futura sit parallela, & in data distantia ab ipsa remota, simulque cum reliquis parallelogrammum rectangulum comprehensura. Quo quidem sensu Autor secundam suam Propositionem procul dubio proposuit, si forte in 7ma aut 8va nostra Propositione verum ejus sensum non fuerimus assecuti.

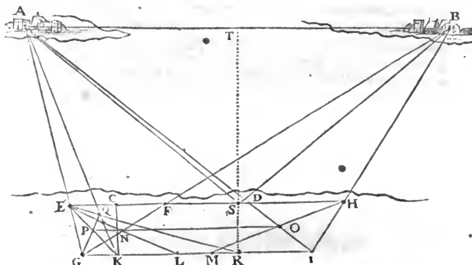
Denique, quoniam parallela CDE per 8vam nostram Propositionem ita invenitur, ut ea simul sit certa ipsius AB pars aliquota, etiamsi duo puncta A & B simul ex eodem loco non sint conspicua, patet hinc id quod in 9na Propositione requiritur, videlicet: Quo pacto hoc in sensu super lineam inaccessam AB non solum quadratum seu rectangulum æquilaterum, sed etiam parallelogrammum quodvis constitui possit.

12 *PRO-*

12 PROPOSITIO.

In data distantiâ à linea A B, per punctum C determinatâ, invenire punctum S, æquidistans ab utroque extremo inaccessæ AB.

Ad quod expediendum, oportet, ductâ per C, juxta 7mam Propositionem, rectâ CD ipsi AB parallela, in eadem utrinque assumere CE, C F, inter se æquales, ita ut, si ex punctis A & B per E & F rectæ lineæ agantur, ipsæ concurrant in G. Id quod semper fit, existente



E F minori quàm AB. Deinde in C D sumendo D H æqualem E F, oportet similiter ex A & B per D & H rectas lineas ducere, concurrentes in I, & jungere G I. Quo facto, erigatur ex C super C D, per 4tum Problema Simplex, perpendicularis C K, occurrens ipsi G I in K, ducaturque EK. Porrò acceptis in G I rectis G L, M I, singulis æqualibus ipsi E F, junctisque E L, M H, secantibus G F B & A D I in N & O, agatur ex O per N recta O N P, occurrens ipsi E K in P. Denique ductâ & G per P rectâ G P Q, secante K A in Q, ac inde ex E per Q rectâ E Q R, occurrente ipsi G I aut eidem productæ in R: erunt, positâ CS æquali K R, junctæ AS, SB æquales, adeoque punctum S quæsitum.

Haud

Haud secus etiam quodvis punctum in recta RST assumptum à punctis A & B æque remotum erit.

Ubi liquet, quæsitum hâc ratione non solùm inveniri, nullatenus ad AB accedendo (quo sensu 11mam Propositionem Autoris intelligendam esse confido); verùm etiam haudquaquam ad eam appropinquando; ac insuper, quoniam EC, CF pro lubitu sumuntur æquales, non nisi ad certam distantiæ partem aut datum perticarum numerum retrocedendo.

Denique quod attinet ad 12 & 13tiam Propositionem Autoris, quandoquidem eas tales censeo, quæ non nisi unius aut plurium circulorum descriptione construi possunt, quæque proinde, ut ante dictum est, absque instrumento Mathematico in campo expediri nequeunt, hæc impræsentiarum in medium protulisse suffecerit. Evulgationem autem eorum, quæ ab Autore circa hæc in Geometriæ incrementum ulteriùs fortè adinventa sunt, exspectamus.

Hisce interim, quæ nostra nobis suggessit meditatio, Benevoli Lectoris commodo studere voluimus, qui itaque laborem nostrum, in bonum publicum lubenti animo susceptum, æqui bonique consulat.

FINIS.

FRAN-

FRANCISCI à SCHOOTEN

LEYDENSIS

In Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris,

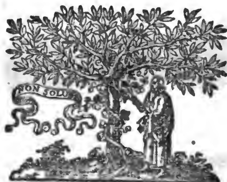
EXERCITATIONUM MATHEMATICARUM,

LIBER III.

CONTINENS

APOLLONII PERGÆI

LOCA PLANA RESTITUTA.

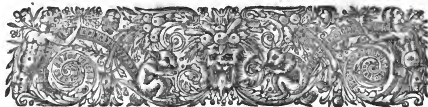


LUGD. BATAV.

Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII,

Academiæ Typographi.

cIↄ Iↄc LVI.



ILLUSTRISSIMO VIRO,

Dno PETRO CHANUTO,

Regis Christianissimi in Concilio Status Consiliario Ordinario & Quæstorum Galliæ Conventu, Ricomagi Arvernorum, Præsidi; antehac ad Coronam Sueciæ & Confœderati Belgii Ordines Legato.

Vir Illustrissime,

Uemadmodum in veritatis investigandæ studio, quæ omnis scientiæ finis animiqúe cibus & genuinum alimentum est, nullæ utique Disciplinæ animos discentium ad illam assequendam aptiores alacrioresqúe reddunt, quàm quæ in veri inquisitione continuè occupatæ certitudinis evidentiâ alias disciplinas antecellunt; ita etiam Mathematicæ, quæ ferè hactenus solæ demonstrationibus gavisæ sunt, præter summam suam ad vitæ commoda necessi-

tatem, huc etiam ſemper quàm maximè utiles judicatæ, magnoqúe idcirco apud perſpicaciſſimos quoſque in pretio habitæ ſunt. Etenim ſi perpendamus, quo pacto ipſæ à rebus notiſſimis initium capientes ad abditiſſimarum rerum cognitionem brevi tempore nos perducant, ſicqúe mentem è terra quaſi in cœlum ſubvehant: facilè conſtabit, quam ob cauſam Veteres, quò ingenium adhuc infirmum in rectè judicando docile redderetur, eas ante alias omnes ſcientias ac artes excolendas ſibi duxerint. Hanc igitur viam ubi prudentiorum quiſpiam, ad præclara natus, ſeriò ſemel eſt ingreſſus, mirum quanto cum ſucceſſu tam in reliquis ſtudiis ritè pertractandis, quàm in ſummis muneribus fœliciter adminiſtrandis operam ille ſuam collocaverit. In te unum, Vir Illuſtriſſime, ſi intueâr, cui *μελετήματα* hæc ſacra eſſe volui, non eſt quod alios hîc in teſtes advocem, quippe tu, quanta ex Diſciplinis hiſce emolumenta dimanent, ſæpiùs accurato tuo judicio prudentiqúe conſilio comprobâſti. Teſtatur hoc eximius ille tuus in Mathematicas Scientias amor, quo in earum adyta non modò jam dudum penetrâſti ac in iiſdem recolendis, ubi graviora id tua permittunt negotia, etiamnum maximopere delectaris; ſed etiam ſolidiori eruditioni

tioni vel usque adeò faves, ut strenuos ejusdem cultores insigni benignitate foveas, atque multis honorum titulis prosequaris. Quâ adeò ex re contigit, ut reliqua tua sublimiora studia ea hactenus ingenii dexteritate tractaveris, ut cordatiorum omnium acclamationes & ἐυφημίαι ad te concordantibus eant suffragiis. Porrò quantâ in rebus agendis prudentiâ valeas, testis est splendidissima tui nominis fama, quæ virtutes tuas passim promulgans, ubi in aulam pervolavit, effecit, ut meritissimo tibi Christianissimus Rex suprema munera destinaverit. Vnde factum ut non solùm ipsius nomine ad Eruditissimam ac Serenissimam quondam Suecorum Reginam; & deinde ad Præpotentes ac Illustrissimos Fœderati Belgii Ordines Legatus Ordinarius missus fueris; verùm etiam, quò ubique sapienti prudentiqúe tuo consilio prodesses, Lubecæ in componendis Poloniæ ac Sueciæ litibus Mediator extiteris. Et verò ne Gallia ipsa, ortis in ea dissidiis, consilii tui fœlicitate orbata foret, cùm præsentia tua illîc quàm maximè exigebatur, tu inquam, Vir Illustrissime, domum revocatus tempore difficillimo, pacem inter dissentientes cum applausu conciliâsti. Quapropter, cum istam singularem sapientiam ac prudentiam unusquisque

in te veneretur, eximiiqúe insuper affectus tui erga verè eruditos testimonium hoc publicum extet, quòd monumentum Holmiæ admodum luculentum in perpetuam memoriam viri maximi ac Gallici nominis decoris sempiterni, RENATI DES CARTES, erigi curaveris; haùd committendum putavi, quum hoc studii genere tibi conjunctissimus sim, ut meum erga te affectum diutiùs occultarem. Hinc, quæ animo jam pridem volvere cœpi, atque in Mathematicarum Disciplinarum incrementum ac restitutionem molitus sum, sub tuo auspicio in publicum dare constitui. persuasus, quæ strenuis Matheseos cultoribus non ingrata fore intellexi, ea neque limato tuo judicio displicitura. Excipe ergo benigniter, Vir Illustrissime, hanc devotæ mentis meæ tesseram, &, qui me antehac inter tuos recepisti, patere conatus etiam hosce, tuo patrocinio munitos, sub Illustris Tui Nominis splendore in lucem prodire. Quod superest, Deum Opt. Max. supplex rogo, ut te literatis omnibus, studiorumqúe candidatis quàm diutissimè servet incolumem ac felicem.

Dabam Lugd. Bat. Kalendis Ianuariis, Anni CIↃ IↃC LVII.

Illustrißimo Nomini Tuo

devotissimus

FR. à SCHOOTEN.

PRÆ-

PRÆFATIO AD LECTOREM.

Lector benevole,

Geometriam olim à Græcis ad summum fastigium fuisse evectam, cum ex ingenii monumentis, vix dum ex naufragio nobis servatis; tum ex successorum testimoniis luculenter colligimus. Omnium tamen illorum, quæ ab ipsis ingeniosè & summo acumine in Geometrico negotio inquisita videntur (nostrâ quidem sententiâ) primam classem meretur Locus, ipsis vocatus ἀναλυόμενος, *hoc est, resolutus. De quo scripserunt Euclides, Apollonius Pergæus, & Aristæus senior. Est enim, teste Pappo Alexandrino in præfatione* VII *libri Collectionum Mathematicarum, hæc propria quædam materia, post communium Elementorum constitutionem, iis parata, qui in Geometricis sibi comparare volunt vim ac facultatem inveniendi Problemata, quæ ipsis proponuntur. Dictorum autem librorum, qui ad Resolutum Locum pertinent, ordo, juxta Pappum, talis est.*

Euclidis Datorum liber unus. Apollonii λόγου ἀποτομῆς, *h. e, de Rationis sectione libri duo.* χωρίου ἀποτομῆς, *h. e, de Spatii sectione duo.* Ἐπαφῶν, *h. e, Tactionum duo. Euclidis Porismatum tres. Apollonii* νεύσεων, *h. e, Inclinationum duo. Ejusdem* τόπων ἐπιπέδων, *h. e, Planorum Locorum duo. Apollonii Conicorum octo. Aristæi* τόπων στερεῶν, *h. e, Solidorum Locorum quinque. Euclidis* τόπων πρὸς ἐπιφάνειαν, *h. e, Locorum ad Superficiem duo. Eratosthenis de Medietatibus duo. Quorum omnium librorum sola Euclidis Data, unà cum quatuor prioribus libris Conicorum Apollonii ad manus nostras pervenerunt, reliqui omnes temporum injuriâ perierunt, magno sanè Reipublicæ Literariæ detrimento: Imò, nisi Pappus eorum mentionem fecisset, planè fuissent obliterati.*

Quapropter cum ipse breviter nonnulla recenseat Problemata & Propositiones istorum librorum, Recentiorum aliqui eorum jacturam dolentes summâ ope conati sunt istos ex Pappi relatione restituere, atq; sic quasi mortuis vitam redonare. Ita paucorum annorum decursu duo Apollonii libri de rationis sectione, duo de spatii sectione, duo determinatæ sectionis nobis per Willebrordum Snellium restaurati sunt, Tactionum per Franciscum Vietam, Inclinationum per Marinum Getaldum, & Alexandrum Andersonum, qui duos de determinatâ sectione postea aliter quoque quàm Snellius demonstravit. Quorum exemplo excitati, nos etiam in Apollonio nostras vires periclitari, ejusq; Loca Plana resuscitare aggressi sumus, juxta illa quæ Pappus prædicto loco nobis reservavit, quæq; secundùm Commandini versionem ita sonant.

De Locis Planis, ex Pappo.

Locorum omnium alii sunt ἑφεκτικοὶ, hoc est, in se ipsis tantùm consistentes, de quibus & Apollonius ante propria elementa dicit puncti quidem locum esse punctum, lineæ locum lineam, superficiei superficiem, & solidi solidum; alii autem διεξοδικοὶ, hoc est, sese extra tendentes, ut puncti locum lineam, lineæ superficiem, superficiei solidum. Locorum autem, qui in resoluto loco, alii quidem positione dati ἑφεκτικοὶ sunt, alii autem plani dicti, & solidi, & lineares: διεξοδικοὶ verò sunt punctorum, & alii ad superficies. ἀναστροφικοὶ quidem punctorum, διεξοδικοὶ autem linearum. Lineares loci ex iis qui sunt ad superficies demonstrantur.

Conferantur hæc cum iis, quæ extant pag. 39. lib. 2^di Geometriæ Renati des Cartes, ubi hæc clariùs explicantur.

Dicuntur autem plani loci tum hi, de quibus agemus, tum universè quicunque sunt rectæ lineæ, vel circuli. Solidi loci quicunque sunt conorum sectiones, parabolæ, vel ellipses, vel hyperbolæ. Lineares loci, quicunque lineæ sunt, neque rectæ, neque circuli, neque aliqua dictarum coni sectionum.

Loci autem ab Eratosthene inscripti ad medietates ex præ-

prædictis genere sunt à proprietate hypotheseon in illis.

Antiqui igitur horum planorum ordinem respicientes elementa tradiderunt, quem cum negligerent posteriores, alios apposuerunt, tanquam non infinitos multitudine, si quis velit ascribere quæ ordinem illum consequantur. itaque ponam propositi quidem posteriora, ordine autem priora, unâ propositione comprehendens, hoc modo:

Si duæ lineæ agantur, vel ab uno dato puncto, vel à duobus, & vel in rectam lineam, vel parallelæ, vel datum continentes angulum, vel inter se datam proportionem habentes, vel datum comprehendentes spacium: contingat autem terminus unius locum planum positione datum, & alterius terminus locum planum positione datum continget, interdum quidem ejusdem generis, interdum verò diversum, & interdum similiter positum ad rectam lineam, interdum contrario modo. Hæc autem fiunt juxta differentias subjectorum. Prop. 1.

At proposita in principio quidem tertii libri à Charmandro his congruunt.

Si rectæ lineæ positione datæ unus terminus datus sit, & alter circumferentiam concavam positione datam continget. 2.

Si à duobus punctis datis inflectantur rectæ lineæ, datum angulum continentes: commune ipsorum punctum continget circumferentiam concavam, positione datam. 3.

Si trianguli spacii magnitudine dati, basis positione & magnitudine data sit, vertex ipsius rectam lineam positione datam continget. 4.

Alia autem hujusmodi:

Si rectæ lineæ magnitudine datæ, & cuipiam positione datæ æquidistantis unus terminus contingat rectam lineam 5.

am positione datam, & alius terminus rectam lineam positione datam continget.

6. Si à puncto quodam ad positione datas duas rectas lineas parallelas, vel inter se convenientes ducantur rectæ lineæ in dato angulo, vel datam habentes proportionem, vel quarum una simul cum eâ, ad quam altera proportionem habet datam, data fuerit, continget punctum rectam lineam positione datam.

7. Et si sint quotcunque rectæ lineæ positione datæ, atque ad ipsas à quodam puncto ducantur rectæ lineæ in datis angulis, sit autem quod data linea & ducta continetur, unà cum contento data linea & altera ducta, æquale ei, quod data, & alia ducta, & reliquis continetur: punctum similiter rectam lineam positione datam continget.

8. Si ab aliquo puncto ad positione datas parallelas ducantur rectæ lineæ in datis angulis, quæ ad puncta in ipsis data abscindant rectas lineas, vel proportionem habentes, vel spacium continentes datum, vel ita ut species ab ipsis ductis vel excessus specierum æqualis sit spacio dato: punctum continget positione datas rectas lineas.

Secundus autem liber hæc continet.

1. Si à datis punctis rectæ lineæ inflectantur, & sint quæ ab ipsis fiunt dato spacio differentia: punctum positione datas rectas lineas continget. Si sint in proportione data, vel rectæ lineæ, vel circumferentiæ.

2. Si sit positione data recta linea, & in ipsa datum punctum, à quo ducatur quædam linea terminata, à termino autem ipsius ducatur & ad positionem, & sit quod fit à ducta æquale ei, quod à data, & abscissa, vel & ad datum punctum, vel ad alterum punctum datum, vel ad alterum datum in linea data positione: terminus ipsius positione datam circumferentiam continget.

Si à duobus punctis datis rectæ lineæ inflectantur, & sit quod

quod ab una efficitur eo, quod ab altera dato major, quàm in proportione: punctum positione datam circumferentiam continget.

Si à quotcunque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectæ lineæ, & sint species, quæ ab omnibus fiunt dato spacio æquales: punctum continget positione datam circumferentiam. 4.

Si à duobus punctis datis inflectantur rectæ lineæ, à puncto autem ad positione ductam lineam abscissa à recta linea positione data ad datum punctum, & sint species ab inflexis æquales ei, quod à data, & abscissa continetur: punctum ad inflexionem positione datam circumferentiam continget. 5.

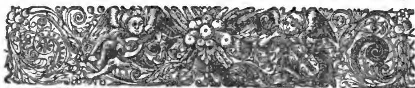
SI in circulo positione dato sit datum punctum, perque ipsum agatur quædam recta linea, & in ipsa punctum extra sumatur; sit autem quod fit à linea ducta usque ad punctum intra datum æquale ei, quod à tota & extra sumpta, vel soli, vel unà cum eo, quod duabus, quæ intra circulum portionibus continetur: punctum extra sumptum positione datam rectam lineam continget. Et si hoc quidem punctum contingat positione datam rectam lineam, circulus autem non ponatur: quæ sunt ad utrasque partes dati puncti contingent positione eandem datam circumferentiam. 6.

In pertractatione harum Propositionum, ab Apollonio, uti apparet, instar Theorematum traditarum, operæ pretium nos facturos judicavimus, si maximam illarum partem ut Problemata expediremus, ut tantò insignitior earum usus extaret: adeò quidem, ut non modò nuda istarum veritas cuique in proclivi esset; verùm ipse quoque easdem solvendi ac construendi modus indicaretur. Quoniam autem in plerisque harum propositionum propter casuum multitudinem plures figuræ fuissent exhibendæ, quibus hujus operis sumptus, magis quàm

par erat, excrevissent, & in quibus omnibus explicandis longiores fuissemus: idcirco casus tantùm præcipuos elegimus, ne illorum multitudine Lectorem confunderemus, nevé ipsius patientiâ abuteremur. Ubi porrò illud monendum duximus, nos consultò in id allaborasse, ut singula hîc Theoremata & Problemata, quantùm fieri posset, à se invicem essent distincta, ne concatenato ordine à capite usq; ad calcem forent evolvenda, sed ubique pro arbitrio Lectoris studium occuparetur.

Restat denique ut edocearis, Amice Lector, quo in primis consilio laborem hunc susceperimus: nimirum, ut novis exemplis ac nobilioribus Apollonii Problematîs Geometriæ Methodus, viri incomparabilis & nunquam satis laudati Renati des Cartes, in quam antehac commentaria edidimus, majorem lucem acciperet. Etenim ejus vestigiis, quibus in sua Geometria nobis præcessit, insistentes, ut calculi Geometrici studiosis ansam se exercendi subministraremus, nonnulla, ad ipsa universaliora reddenda, ab iisq; parum aliena, de nostro adjecimus. Ne autem frequentiori calculo dictæ Methodi imperitis aut minus exercitatis tædium excitaremus, nevé omnem ejus studiosis se exercendi materiam præriperemus; sed potiùs utrique parti, quantum in nobis est, satisfieret: ideo in his Locis restituendis, is noster scopus fuit, ut solùm in difficilioribus, quæ non neminem remorari possent, analysis nostra exerceretur; in reliquis verò vulgaris pertractandi modus observaretur. E quibus (uti confidimus) Candido Lectori satis superque constabit, quid causa fuerit, cur sola difficiliora per calculum Geometricum expediverimus, scilicet ut nimiam Lemmatum multitudinem, quibus aliàs difficulter carere licuisset, evitaremus; quamvis hac via æquè nobis in promptu fuisset, atque altera. Studio itaque nostro & inventis, quæ in artis propagationem elucubravimus, fave ac fruere. Vale.

APOL-



APOLLONII PERGÆI
LOCA PLANA
RESTITUTA.

IN

PRIMI LIBRI

PROPOSITIONES,

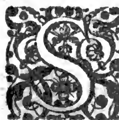
THEOREMATA

ET

PROBLEMATA.

In 1^mam Propositionem

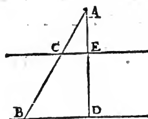
I THEOREMA.

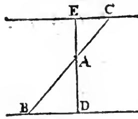


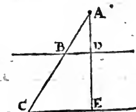
SI à dato puncto A in rectam lineam vel directum duæ agantur rectæ A B, A C, datam inter se habentes rationem; & B terminus unius A B contingat locum planum B D positione datum: similiter quoque C, terminus alterius A C, locum planum positione datum continget.

Constructio 1^{mi} *casus.*

Primò enim cadente B in recta linea BD, si ex alio quocunque in ea puncto D ad A recta linea perducatur, fiatque ut BA ad AC, ita DA ad AE: dico C punctum rectam lineam contingere, quæ per E ipsi BD ducitur parallela.







1^{mus} *casus, in quo punctum B contingit positione datam rectam BD.*

Demonstratio 1^{mi} *casus.*

Cum enim per constructionem BA ad AC sit, sicut DA ad AE: erit [a] juncta CE ipsi BD parallela. Hinc, quum una duntaxat recta per E duci possit, quæ ipsi BD parallela existat, necessum est, ut C punctum eandem contingat. Quod erat propositum.

a 2. libr. 6. Elem.

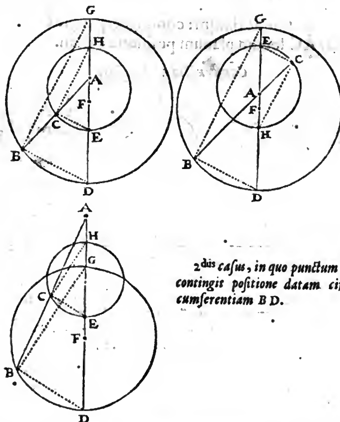
Constructio 2^{di} *casus.*

Deinde cadente B in circuli circumferentia BD, cujus centrum F, agatur per puncta A, F recta linea, utrinque circumferentiæ terminata in D & G, fiatque ut BA ad AC, sic DA ad AE; ac rursus ut BA ad AC, sic GA ad AH. Tum descripto circa diametrum EH circulo, dico punctum C cadere in ipsius circumferentiam.

De-

Demonstratio 2^di casus.

Junctis enim DB, BG, ut & EC, CH, quoniam per constructionem BA est ad AC, sicut DA ad AE; erit [b] recta BD rectæ CE parallela. Eodem modo, cum BA ad AC sit, sicut GA ad AH, erit recta BG rectæ CH parallela. Hinc, cum propter parallelas BD, CE an- *b p 2. libr. 6. Elem.*



2^dis casus, in quo punctum B contingit positione datam circumferentiam BD.

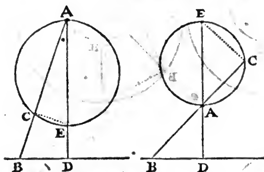
guli DBA & ECA [c] sint æquales, similiterque propter parallelas BG, CH anguli ABG & ACH æquales sint, erit quoque DBG ipsi ECH æqualis. Est autem [d] DBG, in semicirculo, rectus. Quare etiam ECH rectus erit. Ac proinde punctum C in circulo, cujus diameter EH. Quod erat propositum. *c p 29. libr. 1. Elem.* *d p 31. libr. 3. Elem.*

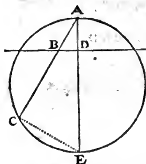
Si ergo à dato puncto A in rectam lineam vel directum, &c. Quod erat ostendendum.

II THEOREMA.

Si à dato puncto A in rectam lineam vel directum duæ agantur rectæ AB, AC, datum continentes spacium BAC; terminus autem B unius AB contingat locum planum BD positione datum: continget quoque C terminus alterius AC locum planum positione datum.

Constructio 1[mi] casus.





1[mus] casus, in quo punctum B contingit positione datam rectam BD.

Primò cadente B in recta linea BD, si ex A in ipsam demittatur perpendicularis AD; fiatque ut DA ad AB, ita CA ad AE, & circa diametrum AE circulus describatur: dico punctum C cadere in hujus circumferentiam.

Demonstratio 1[mi] casus.

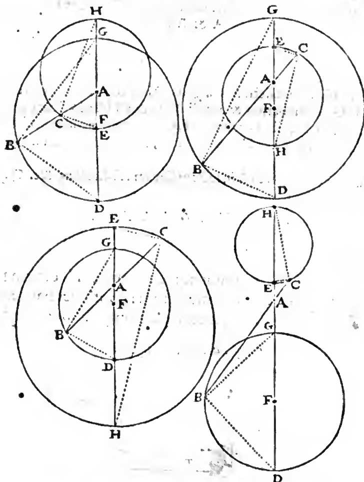
Etenim junctâ CE, cum in $\triangle^{lis}$ BAD, EAC latera circa communem aut æqualem angulum ad A ex constructione proportionalia existant, hoc est, DA ad AB, sicut CA ad AE: erunt quoque [a] anguli ad D & C æquales. Est autem D angulus in $\triangle^{lo}$ BAD per constructionem rectus. Quocirca & angulus ad C in $\triangle^{lo}$ EAC rectus erit, ac proinde punctum C in circulo, cujus diameter AE. Quod erat propositum.

[a] p 6. libr. 6. Elem.

Con-

Constructio 2^di casus.

Deinde cadente B in circuli circumferentia BD, cujus centrum F, si per puncta A, F recta linea agatur, utrinque circumferentiæ termi-



2^dus *casus, in quo punctum B contingit positione datam circumferentiam B D.*

nata in D & G, fiatque ut DA ad AB, ita CA ad AE; ac rursus, ut GA ad AB, ita CA ad AH, & diametro EH circulus describatur: Dico in hujus circumferentiam cadere punctum C.

De-

Demonstratio 2^di casus.

Junctis namque BD, BG, ut & CE, CH, quoniam in $\triangle^{lis}$ BAD, EAC circa communem aut æqualem angulum ad A latera ex constructione proportionalia sint, hoc est, DA ad AB, sicut CA ad AE: erunt quoque [b] anguli DBA & AEC æquales. Rursus cum in $\triangle^{lis}$ BAG, HAC latera circa communem aut æqualem angulum ad A ex constructione proportionalia existant, hoc est, GA ad AB, sicut CA ad AH: erunt similiter [c] anguli GBA & CHA æquales. Porrò, quoniam additis aut detractis angulis DBA & GBA [d] ex iis fit rectus DBG: erunt pariter & anguli AEC & CHA additi aut detracti recto æquales. E quibus, cum [e] & ECH rectum angulum esse constet, sequitur, punctum C fore in circulo, cujus diameter EH. Quod erat propositum.

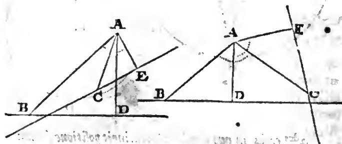
b p 6. libr. 6. Elem.
c p 6. libr. 6. Elem.
d p 31. libr. 3. Elem.
e p 32. libr. 1. Elem.

Ergo si à dato puncto A in rectam lineam vel directum &c. Quod erat ostendendum.

III THEOREMA.

Si à dato puncto A duæ lineæ ducantur AB, AC, datum angulum continentes BAC, datamque inter se habentes rationem; terminus autem B unius AB contingat locum planum BD positione datum: continget pariter & C, terminus alterius AC, locum planum, positione datum.

Constructio 1^mi casus.



1^mus *casus in quo punctum B contingit positione datam rectam BD.*

Primò cadente B in recta linea BD, si ex A super ipsam demittatur perpendicularis AD, ac juxta hanc ad punctum A construatur angu-

lus

lus DAE æqualis dato BAC; fiatque ut B A ad A C, ita D A ad A E: Dico punctum C cadere in rectam lineam per E ductam, huic A E perpendicularem.

Demonstratio 1^mi casus.

Quoniam enim [a] B A ad A C est, sicut D A ad A E; permutando erit [b] B A ad A D, sicut C A ad AE. Porrò cum æquales sint anguli B A C & D A E, & iisdem addito aut subtracto communi angulo DAC, angulus quoque BAD ipsi CAE est æqualis: erit, junctâ CE, △ BAD ipsi CAE [c] æquiangulum. Est autem angulus ad D in △^lo B A D [d] rectus. Quare etiam angulus ad E in △^lo C A E rectus erit, hoc est, juncta C E ipsi A E erit perpendicularis. Quum verò ad E non nisi una recta duci possit, quæ ipsi A E perpendicularis existat, manifestum est, C punctum eandem contingere. Quod erat propositum.

a Ex constructione.
b p 16. libr. 5. Elem.
c p 6. libr. 6. Elem.
d Ex constructione.

Constructio 2^di casus.

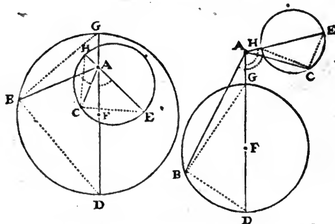
Deinde cadente B in circuli circumferentia BD, cujus centrum F, si per puncta A, F recta linea agatur, utrinque circumferentiæ terminata in D & G, ac juxta hanc ad A punctum constituatur angulus D A E æqualis dato B A C; fiatque ut B A ad AC, ita DA ad A E; ac rursus ut B A ad AC, ita A G ad A H: dico C punctum in circuli circumferentiam cadere, cujus diameter EH.

Demonstratio 2^di casus.

Etenim junctis B D, B G, ut & C E, C H, quoniam [e] B A est ad AC, sicut DA ad AE: permutando erit [f] BA ad AD, sicut CA ad A E. Porrò cum anguli B A C & D A E [g] sint æquales, &, iisdem addito aut subtracto communi angulo DAC, angulus item BAD ipsi CAE sit æqualis: erit pariter [h] & D B A angulus △^li B A D angulo E C A trianguli C A E æqualis. Rursus quia [i] B A est ad A C, sicut A G ad A H: permutando erit [k] B A ad A G, sicut C A ad A H. Unde cum hæc latera existant △^lorum B G A & C H A, quæ sunt circa æquales angulos B A G, C A H: erunt itidem anguli ABG & ACH in iisdem △^li, [l] æquales. Quia autem anguli D B A, A B G additi aut detracti faciunt rectum angulum D B G; at verò anguli E C A, A C H similiter additi aut detracti faciunt angulum E C H: erit pariter E C H rectus

e Ex constructione.
f p 16. libr. 5. Elem.
g Ex constructione.
h p 6. libr. 6. Elem.
i Ex constructione.
k p 16. libr. 5. Elem.
l p 6. libr. 6. Elem.

angulus, ac proinde C punctum in circulo, cujus diameter EH. Quod erat propositum.



2^dus casus, in quo punctum B contingit positione datam circumferentiam B D.

Ergo si à dato puncto A duæ lineæ ducantur AB, AC, &c. Quod erat ostendendum.

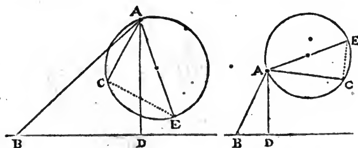
IV *THEOREMA.*

Si à dato puncto A duæ lineæ agantur AB, AC, datum angulum continentes B A C, datumque comprehendentes spacium B A C; & B terminus unius A B contingat locum planum B D, positione datum: continget quoque C terminus alterius A C locum planum, positione datum.

Con-

Constructio 1^{mi} *casus.*

Primò cadente B in recta linea B D, si ex A super eam demittatur perpendicularis A D, ac juxta hanc ad punctum A constituatur angu-



1^{mus} *casus, in quo punctum B contingit positione datam rectam B D.*

lus DAE æqualis dato B A C; fiatque ut D A ad A B, ita C A ad A E: Dico C punctum cadere in circumferentiam circuli, cujus diameter AE.

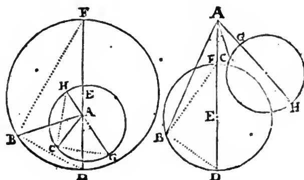
Demonstratio 1^{mi} *casus.*

Angulo enim D A E per fabricam æquali existente angulo BAC, si iis addatur auferaturvé communis angulus C A D: erit quoque angulus CAE ipsi BAD æqualis. Deinde junctâ C E cum latera △^{lorum} BAD & EAC circa hosce æquales angulos ex constructione proportionalia sint: nimirum, DA ad AB, sicut CA ad A E: erunt similiter qui ad D & C anguli in iisdem △^{lis}, per 6 prop.6^{ti} libr. Elem., æquales. Est autem qui ad D in △^{lo} BAD rectus. Quare etiam is, qui ad C, in △^{lo} EAC rectus erit: adeoque punctum C in circulo, cujus diameter A E. Quod erat propositum.

Constructio 2^{di} *casus.*

Deinde cadente B in circuli circumferentia B D, cujus centrum E, si per puncta A, E recta linea agatur, utrinque circumferentiæ terminata in D & F, ac juxta hanc ad A punctum constituatur angulus

D A G æqualis dato B A C; fiatque ut D A ad A B, ita C A ad AG; ac



2dus casus, in quo punctum B contingit positione datam circumferentiam BD.

rursus ut F A ad A B, ita C A ad A H: Dico C punctum cadere in circumferentiam circuli, cujus diameter GH.

Demonstratio 2di casus.

Junctis B D, C G, quoniam, ut supra, anguli B A D & CAG sunt æquales, atque circa eos latera in △lis BAD, CAG, per constructionem, proportionalia: videlicet, DA ad AB, sicut C A ad AG: erunt quoque anguli D B A & A G C in iisdem △lis, per 6 Prop. libr. 6. Elem., æquales. Rursus, quoniam junctis B F, C H, in △lis BFA & CHA latera, quæ circa æquales angulos BAF, CAH, ex fabrica sunt proportionalia: nimirum, FA ad AB, sicut CA ad AH: erunt similiter anguli ABF & CHA in iisdem △lis, per 6.6., æquales. Hinc cum anguli D B A & A B F additi aut detracti rectum efficiant angulum D B F: erunt pariter anguli A G C & CHA additi aut detracti recto æquales. E quibus cum & G C H angulum rectum esse, per 32 prop. 1. libr. Elem., constet, sequitur C punctum in circulo fore, cujus diameter est GH. Quod erat propositum.

Ergo si à dato puncto A duæ lineæ ducantur AB, AC, &c. Quod erat ostendendum.

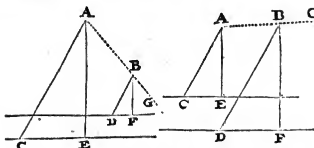
V *THEO-*

V THEOREMA.

SI à duobus datis punctis A & B duæ agantur rectæ parallelæ A C, B D, datam inter se habentes rationem A C ad B D; & C terminus unius A C contingat locum planum C E, positione datum: continget pariter & D, terminus alterius B D, locum planum positione datum.

Constructio 1[mi] *casus.*

Primò cadente C in recta linea C E, si ex A in ipsam demittatur perpendicularis A E, & ex B agatur ei parallela B F, fiatque ut C A



1[mus] *casus, in quo punctum C contingit positione datam rectam* C E.

ad D B, ita A E ad B F: Dico D punctum cadere in rectam lineam, ductam per F ipsi B F perpendicularem.

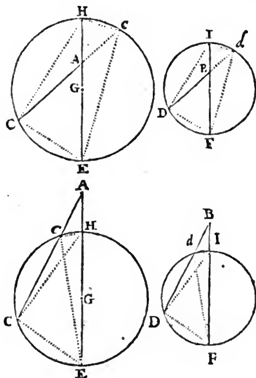
Demonstratio 1[mi] *casus.*

Quoniam enim, ductâ per puncta A, B rectâ lineâ A B G, anguli C A G, D B G, ut & E A G, F B G [a] sunt æquales, erunt quoque C A E & D B F æquales. Deinde cum [b] C A ad D B sit, sicut A E ad B F, permutando erit [c] C A ad A E, sicut D B ad B F. Hinc, junctâ D F, quoniam △[lorum] C A E, D B F anguli ad A & B sunt æquales, & latera circa eos proportionalia: erunt pariter [d] ad E & F anguli æquales. Est autem qui ad E in △[lo] C A E rectus. Quare & is, qui ad F in △[lo] D B F rectus erit; adeoque D F ipsi B F perpendicularis. Unde cum una tantùm recta per F duci possit, quæ ipsi B F perpendicularis existat, sequitur D punctum eandem contingere. Quod erat propositum.

a p. 29. libr. 1 Elem.
b p. Constructionem.
c p. 16. libr. 5. Elem.
d p. 6. libr. 6. Elem.

Constructio 2^{di} casus.

Dein cadente C in circuli circumferentia C E, cujus centrum G, agatur per puncta A, G recta linea, utrinque circumferentiæ terminata in E & H; ductâque per B rectâ BF ipsi AE parallelâ, fiat ut CA



2^{dus} casus, in quo punctum C contingit positione datam circumferentiam C E.

ad DB, ita AE ad BF; ac rursus ut CA ad D B, ita ÀH ad BI. Postea descripto circa diametrum F I circulo: Dico punctum D cadere in ipsius circumferentiam.

Demonstratio 2^{di} casus.

Etenim junctis C E, *c* H, ut & D F, *d* I, quoniam, ut supra, anguli CAE

CAE & DBF æquales sunt, & [e] CA ad DB, ut AE ad BF, hoc est, permutando [f] CA ad AE, ut D B ad B F: erunt quoque [g] qui ad C & D angulis in $\triangle^{lis}$ CAE & DBF æquales. Porrò cùm [h] CA ad DB sit, ficut AH ad BI: permutando erit [i] CA ad AH, ficut DB ad BI. Unde cum hæc latera existant $\triangle^{lorum}$ CHA & DIB, quæ circa æquales angulos CAH & DBI: erunt quoque [k] illi qui ad C & D anguli in iisdem $\triangle^{lis}$ æquales. Quoniàm autem anguli ECA & ACH additi aut detracti efficiunt rectum ECH; & anguli FDB & BDI similiter additi aut detracti faciunt angulum FDI: patet angulum FDI quoque rectum fore. Ac proinde D punctum in circulo, cujus diameter FI. Quod erat propositum.

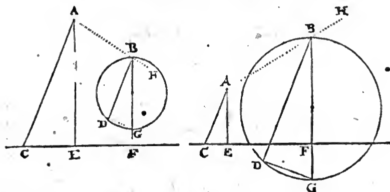
e p Constructionem.
f p 16. libr. 5. Elem.
g p 6. libr. 6. Elem.
h p Constructionem.
i p 16. libr. 5. Elem.
k p 6. libr. 6. Elem.

Ergo si à duobus datis punctis A & B, &c. Quod erat ostendendum.

VI THEOREMA.

Si à duobus datis punctis A & B duæ rectæ agantur parallelæ. AC, BD, datum comprehendentes spacium ▭ AC, BD; & C terminus unius AC contingat locum planum CE, positione datum: continget quoque D terminus alterius BD locum planum, positione datum.

Constructio 1[mi] casus.



1[mus] casus, in quo punctum C contingit positione datam rectam CE.

Primò cadente C in linea recta CE, si ex A in ipsam demittatur per-

perpendicularis A E, & ex B agatur ei parallela B F; fiatque ut E A ad D B, ita A C ad B G: Dico D punctum in circumferentiam circuli cadere, cujus diameter est B G.

Demonstratio 1^{mi} *casus.*

a p 29. libr. 1. Elem. b p Constructionem. c p 16. libr. 5. Elem. d p 6. libr. 6. Elem. e p Constructionem.

Ductâ enim per puncta A, B rectâ A B H, quoniam anguli C A H, D B H, ut & E A H, F B H [a] æquales sunt: erunt quoque anguli C A E, D B G æquales. Deinde cum [b] E A ad D B sit, sicut A C ad B G, permutando erit [c] E A ad A C, sicut D B ad B G. Hinc junctâ D G, quoniam $\triangle^{lorum}$ C A E, D B G anguli ad A & B sunt æquales, & latera circa eos proportionalia: erunt pariter anguli ad E & D [d] æquales. Est autem qui ad E in $\triangle^{lo}$ C A E [e] rectus. Quare & is, qui ad D in $\triangle^{lo}$ D B G rectus erit; adeoque D punctum in circulo, cujus diameter B G. Quod erat propositum.

Constructio 2^{di} *casus.*

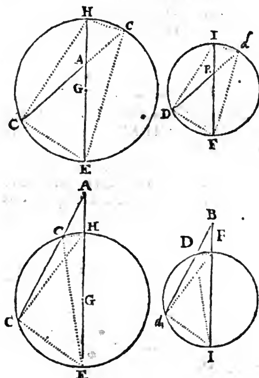
Deinde cadente C in circuli circumferentia C E, cujus centrum G, agatur per puncta A, G recta linea, utrinque circumferentiæ terminata in E & H: ductâque per B rectâ B F ipsi A E parallelâ, fiat ut E A ad D B, ita A C ad B F; ac rursus ut A H ad D B, ita A C ad B I. Postea descripto circa diametrum F I circulo, dico punctum D cadere in ejus circumferentiam.

Demonstratio 2^{di} *casus.*

f p 16. libr. 5. Elem. g p 6. libr. 6. Elem. h p 16. libr. 5. Elem. i p 6. libr. 5. Elem. k p 31. libr. 3. Elem. l p 32. libr. 1. Elem.

Junctis namque C E, C H, ut & D F, D I, quoniam, ut supra, anguli C A E & D B F sunt æquales, & E A ad D B, sicut A C ad B F, hoc est, permutando [f] E A ad A C, sicut D B ad B F: erunt quoque qui ad C & F anguli in $\triangle^{lis}$ C A E & D B F [g] æquales. Rursus cum A H ad D B sit, sicut A C ad B I, permutando erit [h] A H ad A C, ut D B ad B I. Unde cum in $\triangle^{lis}$ C A H, I B D latera circa æquales angulos ad A & B proportionalia existant: erunt similiter anguli, qui ad C & I in iisdem $\triangle^{lis}$ [i] æquales. Porrò, quoniam additis aut detractis angulis ad C, hoc est, E C A & A C H, ex iis [k] fit rectus E C H: erunt pariter & anguli ad F & I, hoc est, B F D & D I B, additi aut detracti recto æquales. E quibus cum & F D I [l] rectum angulum esse constet: sequi-

quitur D punctum fore in circulo, cujus diameter F I. Quod erat propositum.



2[dus] *casus, in quo punctum* C *contingit positione datam circumferentiam* C E.

Ergo si à duobus datis punctis A & B duæ rectæ parallelæ agantur AC, BD, &c. Quod erat ostendendum.

VII *THEOREMA.*

Si à duobus datis punctis A & B duæ lineæ ducantur AC, BD, datum angulum continentes E, datámque inter se habentes rationem, & C terminus unius AC contingat locum planum CF, positione datum: continget pariter & D terminus alterius BD locum planum, positione datum.

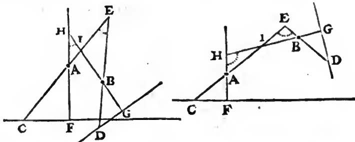
Constructio 1mi *casus.*

Primò cadente C in recta linea CF, si ex A super ipsam demittatur perpendicularis A F, & ex B ad hanc ducatur B H in dato angulo E, sicut 7mo Problemate 2di Tractatus est ostensum; fiatque ut C A ad BD, ita A F ad B G: Dico D punctum in rectam lineam cadere, ductam per G ipsi B G perpendicularem.

Demonstratio 1mi *casus.*

Cum enim anguli H & E in Δlis A H I & I E B, per constructionem, æquentur, angulique AIH, EIB ad verticem constituti [a] æquales existant: erunt pariter HAI & IBE anguli [b] æquales. Est autem angulus H A I æqualis angulo C A F, & I B E æqualis angulo DBG. Quare & anguli C A F & DBG æquales erunt. Porrò cum per constructionem C A ad B D sit, sicut AF ad BG, permutando erit [c] CA

a p 15. libr. 1. Elem.
b p 32. libr. 1. Elem.
c p 16. libr. 5. Elem.



1mus *casus, in quo punctum* C *contingit positione datam rectam* CF.

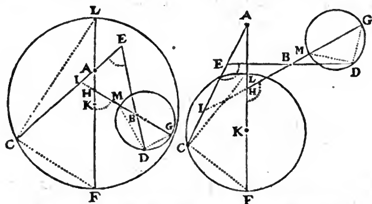
ad A F, sicut D B ad B G. Hinc, junctâ D G, quoniam Δlorum CAF, D B G latera circa æquales angulos ad A & B proportionalia sunt, erunt pariter & qui ad F & G anguli [d] in iisdem Δlis æquales. Est autem angulus ad F in Δlo C A F, per constructionem, rectus. Quocirca & is, qui ad G in Δlo D B G, rectus erit. Adeoque, cum ad G ipsi B G unam solummodo perpendicularem ducere obtingat, patet eandem à D puncto contingi. Quod erat propositum,

d p 6. libr. 6. Elem.

Constructio 2di *casus.*

Dein cadente C in circuli circumferentia, cujus centrum K; si per puncta A, K recta linea agatur, utrinque circumferentiæ terminata in

in F & L, & ex B ad hanc ducatur BH in dato angulo E, ſicut 7mo Problemate 2di Tractatus eſt oſtenſum; fiatque ut CA ad BD, ita AF



2dus *caſus, in quo punctum C contingit poſitione datam circumferentiam* CF.

ad BG; ac rurſus ut CA ad BD, ita AL ad BM: Dico D punctum in circumferentiam circuli cadere, cujus diameter GM.

Demonſtratio 2di caſus.

Producta GBH, donec occurrat ipſi CAE in I, quoniam angulus FHB e eſt æqualis ſibi oppoſito IHA, ſicque △la IAH, IEB præter communem angulum ad I etiam æquales habent angulos IHA & IEB: erit pariter & 3tius IAH æqualis 3tio IBE, hoc eſt, DBG f. Porrò, junctis CF, DG, quoniam per conſtructionem CA eſt ad BD, ſicut AF ad BG: permutando erit g CA ad AF, ſicut DB ad BG. Unde cum ∠lorum CAF & DBG anguli ad A & B æquales ſint oſtenſi, lateraque circa eos proportionalia: erunt ſimiliter h qui ad C & D anguli in iiſdem △lis æquales. Eodem modo, junctis CL, DM, quoniam per conſtructionem CA eſt ad BD, ſicut AL ad BM, permutando erit CA ad AL, ſicut DB ad BM. Unde cum △lorum CLA & DMB anguli ad A & B æquales ſint, lateraque circa eos proportionalia: erunt itidem qui ad C & D anguli in iiſdem △lis æquales. Quia autem ad C anguli, hoc eſt, FCA & ACL additi aut detracti faciunt rectum angulum FCL; angulique ad D, hoc eſt, GDB & BDM

e p 15. libr. 1. Elem.
f p 32. & 15. lib. 1. Elem.
g p 16. libr. 5. Elem.
h p 6. libr. 6. Elem.

 ſimi-

similiter additi aut detracti faciunt angulum G D M: erit pariter GDM angulus rectus. Ac proinde D punctum in circulo, cujus diameter GM. Quod erat propositum.

Ergo si à duobus datis punctis A & B duæ lineæ ducantur A C, BD, &c. Quod erat ostendendum.

N O T A,

Si lineæ A C, B D eo sensu ducendæ forent, quo ductæ sunt A E, B E: nimirum, ut inflexæ datum contineant angulum E, vel inter se datam obtineant rationem A E ad B E: punctum ad inflexionem E similiter locum planum positione datum continget. Sicut hîc post manifestum fit ex 2^do^ tum hujus, tum sequentis libri Problemate.

VIII *THEOREMA*.

Si à duobus datis punctis A & B duæ lineæ ducantur AC, BD, datum angulum continentes E, datumque comprehendentes spacium ▭ A C, B D; & C terminus unius AC contingat locum planum CF positione datum: & alterius quoque B D terminus D locum planum positione datum continget.

Constructio 1^mi^ *casus*.

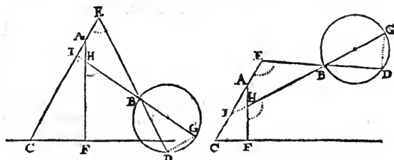
Primò cadente C in recta linea CF, si ex A super ipsam demittatur perpendicularis A F, & ex B ad hanc agatur B H in dato angulo E, sicut 7^mo^ Problemate 2^di^ Tractatus est ostensum; fiatque ut A F ad B D, ita A C ad B G: Dico D punctum in circumferentiam circuli cadere, cujus diameter B G.

Demonstratio 1^mi^ *casus*.

Productâ G B H, donec occurrat ipsi C A E in I, quoniam angulus FHB [a] æqualis est sibi opposito I H A, sicque △^la^ IAH, IEB præter communem angulum ad I etiam æquales habent angulos I H A & I E B: erit pariter & 3^tius^ angulus I A H æqualis 3^tio^ I B E, hoc est, D B G [b]. Porrò, junctâ D G, quoniam per constructionem A F est ad BD, sicut A C ad BG: permutando erit [c] FA ad A C, sicut DB ad B D. Unde cum △^lorum^ C A F, D B G anguli ad A & B æquales sint ostensi, & latera circa eos proportionalia: erunt similiter [d] qui ad F & D

a p 15. libr. 1. Elem.
b p 32. & 15. libr. 1. Elem.
c p 16. libr. 5. Elem.
d p 6. libr. 6. Elem.

& D anguli in iisdem Δ^{lis} æquales. Est autem angulus ad F in Δ^{lo} CAF per constructionem rectus. Quare & is, qui ad D in Δ^{lo}

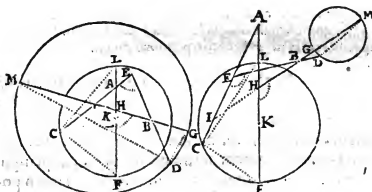


1^mus casus, in quo punctum C contingit positione datam rectam CF.

DBG, rectus erit. Ac proinde D punctum in circulo, cujus diameter BG. Quod erat propositum.

Constructio 2^di casus.

Dein cadente C in circuli circumferentia CF, cujus centrum K, si per puncta A, K recta linea agatur, utrinque circumferentiæ terminata in F & L, & ex B ad hanc in dato angulo E ducatur BH, sicut 7^mo Problemate 2^di Tractatus est ostensum; fiatque ut AF ad BD,



2^dus casus, in quo punctum C contingit positione datam circumferentiam CF.

 ita

ita AC ad BG; ac rursus ut AL ad BD, ita AC ad BM: Dico D punctum cadere in circumferentiam circuli, cujus diameter GM.

Demonstratio 2^di casus.

Etenim rectâ GBH secante productâ rectam CAE in I, junctisque CF, DG, quoniam, ut supra, anguli IAH & DBG æquales sunt, & latera circa eos in △^lis CAF, DBG proportionalia: erunt pariter

e p 6. libr. 6. Elem. — e anguli FCA & DGB in iisdem △^lis æquales. Porrò junctis CL, DM, quoniam per constructionem AL est ad BD, sicut AC ad BM:

f p 16. lib. 5. Elem. — permutando erit f LA ad AC, sicut DB ad BM. Unde cum in △^lis CLA, MDB latera circa æquales angulos ad A & B proportio-

g p 6 libr. 6. Elem. — nalia sint: erunt similiter g anguli ACL & DMB in iisdem △^lis æquales. Quia autem anguli FCA & ACL additi aut detracti efficiunt

h p 31. libr. 3. Elem. — rectum angulum FCL h: erunt pariter anguli DGB & DMB additi aut detracti recto æquales. E quibus, cum i & GDM rectum angu-

i p 32. libr. 1. Elem. — lum esse constet, sequitur, D punctum fore in circulo, cujus diameter GM. Quod erat propositum.

Ergo si à duobus punctis A & B duæ lineæ ducantur AC, BD, &c. Quod erat ostendendum.

NOTA,

Si loco rectarum AC, BD, à datis punctis A & B ducendarum, expeterentur rectæ AE, BE, datum spacium ▭ AEB comprehendentes: punctum ad inflexionem E locum Super-solidum continget, lineam scilicet curvam 2^di generis, positione datam.

Hinc;

Conclusio 1^mæ Propositionis. — Si duæ lineæ agantur vel ab uno dato puncto, vel à duobus, & vel in rectam lineam seu directum, vel parallelæ, vel datum continentes angulum, vel inter se datam rationem habentes, vel datum comprehendentes spacium; contingat autem terminus unius locum planum positione datum, & alterius terminus locum planum positione datum continget. Interdum quidem ejusdem generis, interdum verò diversum, & interdum similiter positum ad rectam lineam, interdum contrario modo.

Pro diversa scilicet datorum sive subiectorum consideratione. Quod erat demonstrandum.

SE-

SEQVVNTVR PROBLEMATA IN PRIMI LIBRI PROPOSITIONES.

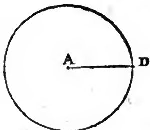
In 2^{dam} Propositionem

I *PROBLEMA.*

E dato puncto A rectam lineam ducere AD, datæ rectæ BC æqualem.

Constructio.

EX A, tanquam centro, intervallo BC describatur circulus; & ex A ad quodlibet in circumferentia punctum D agatur recta AD.



Dico AD æqualem esse BC. Cujus demonstratio è constructione manifesta est.

Hinc:

Si rectæ lineæ, magnitudine datæ, unus terminus datus sit, alter circumferentiã concavam, positione datam, continget. *Conclusio 2dæ Propositionis.*

Quod erat demonstrandum.

NOTA,

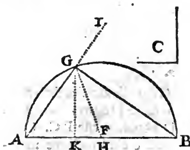
In conclusione dici: Si rectæ lineæ magnitudine datæ, &c. *non autem*, positione datæ, &c. Quod ipsum vult Apollonii Propositio, quæ intelligi nequit, nisi linea simul magnitudine data sit. Dato autem rectæ alicujus, positione & magnitudine datæ, termino uno, alter quoque datus esse intelligitur, per 27 Datorum Euclidis. Eo ipso tamen non dicimus, alterum hujus lineæ terminum indifferenter ad quodcunque in circumferentia punctum cadere, eo sensu, quem omnes

omnes Apollonii Propositiones hujus Tractatus præ se ferunt, sed in unum duntaxat locum determinatum, ad quem inveniendum nullâ circuli descriptione opùs est. Immutavimus igitur has voculas, scribarum ignorantiâ & negligentiâ procul dubio illapsas; prout hanc licentiam, eandem ob causam in conclusione plurium aliarum Propositionum hîc sequentium nobis sumpsimus.

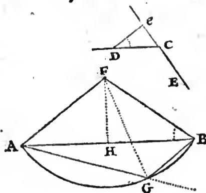
In 3tiam Propositionem,

II PROBLEMA.

A datis duobus punctis A, B duas rectas lineas inflectere A G, B G, continentes angulum AGB, dato angulo C æqualem.



1mus *casus, in quo datus angulus C est rectus.*



2dus *casus, in quo datus angulus C est obtusus.*

Constructio.

Primò. Si datus angulus C est rectus, ducta AB secetur bifariam in F, descriptoque ex F intervallo AF vel FB super AB semicirculo AGB: Dico, si ex punctis A, B ad quodlibet in circumferentia punctum G agantur rectæ AG, BG, angulum AGB æqualem esse dato C.

Quòd si datus angulus C sit obtusus, producto altero laterum DC, CE, erigatur ex aliquo puncto e, in producto, ad ipsũ perpendicularis e D, donec cum latere altero CD concurrat in D, & ad A & B anguli BAF & ABF æquales constituantur angulo CDe. Tunc descripto ex F, ubi lineæ æquales angulos comprehendentes concurrunt, circuli segmento AGB, intervallo FA vel FB, ad alteram

ram partem lineæ AB : Dico, si ex punctis A, B ad quodcunque in circumferentia punctum G agantur AG, BG, angulum AGB æqualem esse dato DCE.

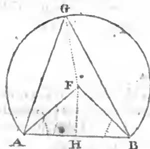


Figura A, ubi angulus AGB cadit supra angulum AFB.

Denique, si datus angulus C sit acutus, agatur è quolibet puncto E, in altero laterum DC, CE, ad ipsum perpendicularis ED, occurrens lateri DC in D. Tum ad AB constitutis angulis BAF & ABF, angulo EDC, (ut supra) æqualibus, descriptoque ex F super AB, intervallo AF vel FB, ad eandemque partem, circuli segmento AGB: Dico rursus, ductis ex A & B ad quodvis in circumferētia punctū G rectis AG, BG, angulum AGB æqualem esse dato C. *Figuræ 3tii casus, in quo datus angulus C est acutus.*

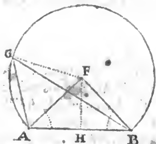


Figura B, ubi angulus AGB cadit juxta angulum AFB.

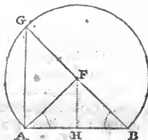


Figura C, ubi punctum G cadit in altera linearum productarum AF, FB.

Demonstratio.

Jungatur enim FG, & ex F in AB demittatur perpendicularis FH. Deinde in 1mo & 2do casu producatur AG ad I.

Quoniam itaque latera AF, FG △li AFG inter se æqualia sunt, erunt quoque [a] anguli AGF, FAG æquales. Eodem modo, cum latera BF, FG △li BFG sint æqualia, erunt etiam anguli BGF, FBG æquales. Ideoque in 1mo & 2do casu, ut & in figura A tertii casus, angulus AGB æqualis erit angulis FAG, FBG simul sumptis. At in *a 5. libr. 1. Elem.*

 figura

figura B angulus A G B erit æqualis angulo F A G, subtracto eidem angulo FBG.

b ℘ 32. libr. 1. Elem. Siquidem igitur in 1^mo^ casu [b] angulus externus B G I itidem est æqualis duobus angulis F A G & G B F, sequitur angulum A G B æqualem esse angulo BGI, adeoque illum in primo casu esse rectum, datoque angulo C æqualem.

c ℘ 32. lib. 1. Elem. Porrò cum in 2^do^ casu bini anguli F A G, G B F, hoc est, angulus AGB cum binis AGB, B F A [c] quatuor rectos angulos constituant; atque etiam angulus A G B cum binis B A G, GBA duos rectos efficiant: sequitur, si illic bis & hic semel auferatur angulus A G B, angulum reliquum B F A æqualem esse bis reliquis B A G, GBA, hoc est,

d ℘ 32. libr. 1. Elem. [d] duplo anguli BGI. Est autem angulus A F B duplus quoque anguli A F H vel D C e [e]. Quocirca in 2^do^ casu angulus B G I erit æqualis

e ℘ Constr. & 32. libr. 1. Elem. angulo DCe, & consequenter angulus AGB [f] æqualis angulo DCE.

f ℘ 13. libr. 1. Elem. Eodem modo, quoniam in fig. A tertii casus anguli B A F, F B A cum angulis FAG, GBF, hoc est, cum angulo AGB, unà cum eodem angulo AGB [g] duos rectos angulos efficiunt; atq; iidem anguli BAF,

g ℘ 32. libr. 1. Elem. FBA cum angulo A F B similiter duos rectos efficiant: erit angulus AFB in eadem figura duplus anguli AGB. Pari ratione, cum in fig. B anguli B A F, F B A cum angulo F A G, dempto eidem angulo FBG,

h ℘ 32. libr. 1. Elem. hoc est, cum angulo AGB, unà cum eodem angulo AGB [h] duos rectos constituant; itemque iidem anguli B A F, F B A cum angulo A F B duobus rectis sint æquales: erit angulus AFB in eadem figura duplus quoque anguli A G B. Hinc cum angulus A F B in hisce duabus figuris duplus sit anguli A G B, ac ipse quoque duplus sit anguli AFH vel C: patet angulum A G B in iisdem figuris esse æqualem dato angulo C.

i ℘ 32. libr. 1. Elem. Denique cum in fig. C [i] angulus externus AFB æqualis sit duobus internis oppositis & æqualibus angulis A G F, F A G, isque ideo duplus sit anguli AGF seu A G B; simulque AFB duplus sit anguli AFH vel C: manifestum est, angulum A G B in eadem figura æqualem esse dato angulo C.

A datis ergo duobus punctis A & B duas rectas lineas infleximus AG, BG, angulum efficientes AGB, dato angulo C æqualem. Quod erat faciendum.

E quibus liquet, cum in genere sit ostensum, lineas A G, B G, ex A & B ad quodcunque punctum G in circumferentia AGB eductas, angulum constituere AGB dato angulo C æqualem:

Quòd,

Quòd,

Si à duobus punctis datis duæ rectæ lineæ inflectantur, datum angulum continentes, commune ipsorum punctũ contingat circumferentiam concavam, positione datam. *Conclusio 3tiæ Propositionis.*

Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Hoc Problema unà cum præcedente aliter ab Euclide demonstratum est in Geometriæ Elementis, uti videre est Prop. 32 tertii, & 2da primi. Quoniam autem ex allata demonstratione aliarum insignium Propositionum Euclidearum veritas constat, ut 20, 21, & 31 tertii: operæ pretium nos facturos arbitrati sumus, si majoris exercitationis gratiâ operationem hîc adjiceremus.

Sit AH ∞ HB ∞ a
CE ∞ b
ED ∞ c
KH ∞ x, ergo KB ∞ $a+x$
KG ∞ y.

$$\begin{array}{r} a+x \\ \underline{a+x} \\ +ax+xx \\ \underline{aa+ax} \\ aa+2ax+xx \end{array}$$

add. $\left\{\begin{array}{ll} \square\ \text{KB.} & aa+2ax+xx \\ \square\ \text{KG.} & yy \end{array}\right.$

summa, seu $\square$ GB. $aa+2ax+xx+yy$

GB. $\sqrt{aa+2ax+xx+yy}$.

Pro qua radice scribatur brevitatis causâ z, & pro $aa+2ax+xx+yy$ scribatur zz.

Tum fiat propter similitudinem Δ^{rum} KGB, ABL

$$\begin{array}{ll} \text{GB} & \text{BA} \\ z \text{———} & 2a \end{array} \left\{\begin{array}{l} \text{KG. } y \\ \text{KB. } a+x \end{array}\right\} \text{ad} \left\{\begin{array}{l} \text{AL. } \dfrac{2ay}{z} \\ \text{BL. } \dfrac{2aa+2ax}{z} \end{array}\right.$$

quâ subtractâ ex GB, z, relinquitur LG $\dfrac{zz-2aa-2ax}{z}$.

Rursus cum propter similitudinem Δ^{rum} DCE, AGL proportionales sint,

$$\begin{array}{llll} \text{DE} & \text{EC} & \text{AL} & \text{LG} \\ c & b & \dfrac{2ay}{z} & \dfrac{zz-2aa-2ax}{z} \end{array}$$

: erit productum sub extremis DE, LG, æquale producto sub mediis EC, AL, *a 16. libr. 6. Elem.*

 hoc

hoc est, $\frac{czz - 2caa - 2cax}{z} \infty \frac{2bay}{z}$

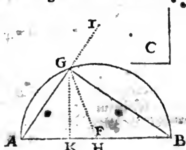
vel $czz - 2caa - 2cax \infty 2bay$

Dividatur utrinque per c, fit $zz - 2aa - 2ax \infty \frac{2bay}{c}$

Unde restituendo valorem ipsius zz, erit $aa + 2ax + xx + yy - 2aa - 2ax$, hoc est, $-aa + xx + yy \infty \frac{2ba}{c}y$, vel in debita forma: $yy \infty \frac{2ba}{c}y + aa - xx$.

Ad tollendam fractionem $\frac{2ba}{c}$, fiat, ut c ad b, hoc est, ut DE ad EC, ita $2a$ ad $\frac{2ba}{c}$, vel ita a, hoc est, AH, ad $\frac{ba}{c}$. quam voco d, & designare suppono lineam HF. Quâ ratione fit $y \infty d + \sqrt{dd + aa - xx}$. nimirum, si x minor sumatur quàm a, & datus angulus C sit acutus. Sed $y \infty -d + \sqrt{dd + aa - xx}$; si angulus sit obtusus. Et $y \infty d$ ☊ $\sqrt{dd + aa - xx}$, si x sit major quàm a, & angulus C acutus. ubi porrò patet, si datus angulus C sit obtusus, x non debere majorem sumi quàm a.

☊ *designat* + *vel* −



Præterea liquet etiam, xx non debere majus sumi quàm dd & aa simul juncta, hoc est, KH non majorem quàm AF vel FG. secus si fit, non inveniretur punctum G. quod quidem hîc, uti apparet, in circuli peripheriam cadit, cujus centrum est F, & radius AF.

Denique si datus angulus C est rectus, quoniam eo casu CE æqualis b est æqualis o: erit æquatio $yy \infty aa - xx$, hoc est, $y \infty \sqrt{aa - xx}$. Ostendens punctum G repertum iri in circumferentiam semicirculi, cujus diameter sit AB, & centrum H. Quo casu x semper minor erit quàm a.

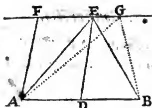
In

In 4tam Propositionem.

III PROBLEMA.

Super data recta AB triangulum describere AEB, dato rectilineo C æquale.

Constructio.



Secetur AB bifariam in D, & super AD in quovis angulo constituatur juxta 45 Prop.1mi libri Elem. parallelogrammum ADEF, æquale dato rectilineo C: junctisque AE, EB, erit △lum AEB dato rectilineo C æquale.

Demonstratio.

Per 34.1mi Elem. △ AFE est æquale △lo AED, & per 38 ejusdem △ AED est æquale △ DEB. Unde sequitur bina △la AFE AED, hoc est, parallelogrammum ADEF, esse æquale binis △lis AED, DEB, id est, △lo AEB. Est autem parallelogrammum ADEF per constructionem æquale rectilineo C. Æquale igitur etiam est △ AEB ipsi rectilineo C: adeoque super AB descriptum △ AEB, dato rectilineo C æquale. Quod erat faciendum.

Porrò, quoniam per 37.1mi Elem. omnia △la, ut AEB, AGB, super eadem basi AB, & inter eandem parallelam FEG constituta, æqualia sunt: patet, si ex duobus terminis lineæ AB ad quodcunque in linea FEG punctum G ducantur rectæ AG, BG, ipsas constituere △ AGB, dato rectilineo C æquale.

Si ergo trianguli spacii magnitudine dati, basis positione & magnitudine data sit: vertex ipsius continget rectam lineam, positione datam. *Conclusio 4tæ Propositionis.*

Quod erat demonstrandum.

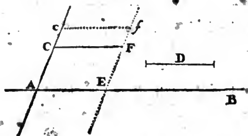
In 5tam Propositionem.

IV PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis lineis A B, A C, ad unam A C rectam lineam ducere C F, datæ rectæ D æqualem, & alteri AB parallelam.

Constructio.

Ex A, intersectione rectarum A B, A C, statuatur in A B linea AE æqualis datæ D, & per E ducatur E F parallela A C. Dico quòd, ex



puncto quolibet C in linea A C ducta CF parallela A B, donec attingat lineam E F, ipsa CF sit quæsita. Cujus Demonstratio ex 34. 1mi Elem. est manifesta.

Conclusio 5tæ Propositionis. Si ergo rectæ lineæ, magnitudine datæ, & cuipiam positione datæ æquidistantis, unus terminus contingat rectam lineam, positione datam: & alter terminus rectam lineam, positione datam, continget.

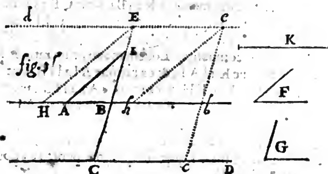
Quod erat demonstrandum.

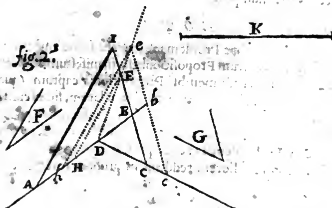
In

In 6^{tam} Propositionem.

V PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis parallelis vel concurrentibus A B, C D; invenire extra ipsas punctum E, à quo ad positione datas A B, C D eductæ duæ rectæ EH, EC in datis angulis F, G sint ad se invicem in ratione data *r* ad *s*.





Ponamus angulos B A I, D C B esse æquales datis angulis F, G; itemque lineas A I, C B (ubicunque ad A B, C D ductas) concurrere in I. Deinde sit A I ad K, sicut *r* ad *s*.

Con-

Constructio.

Fiat, ut excessus, quo K superat B I, ad B I, ita B C ad B E. Tum ductâ E *d* parallelâ A B vel C D (ut in 1ma figura), vel ductâ ex D per E rectâ (ut in 2da fig.): si ab aliquo in ea puncto *e* ad A B, C D ducantur rectæ *e b*, *e c* parallelæ A I, I C, hoc est, in datis angulis F, G: erit *b e* ad *e c*, sicut A I ad K, vel *r* ad *s*.

Demonstratio.

a p 18. libr. 5. Elem. Cum, per constructionem, excessus, quo K superat B I, sit ad B I, sicut B C ad B E; erit componendo [a] K ad B I, sicut C E ad E B. Jam autem ratio C E ad E B composita est ex ratione C E ad E H, & ex ratione H E ad E B, vel A I ad I B. Quocirca etiam ratio K ad B I ex iisdem rationibus erit composita. Eodem modo, cum ratio K ad B I sit composita ex ratione K ad A I, & ex ratione A I ad I B: erit ratio composita ex ratione C E ad E H, & ex ratione A I ad I B eadem cum illa, quæ componitur ex ratione K ad A I, & ex ratione A I ad I B. Unde sublatâ utrinque communi ratione A I ad I B, erit reliqua ratio C E ad E H eadem reliquæ rationi K ad A I, vel *s* ad *r*. Quod erat faciendum. Idem similiter liquet de quolibet puncto *e*, ubicunque in recta D E assumpto.

N O T A.

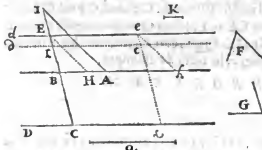
Quandoquidem ex hoc Problemate sequens facilè innotescit, ex eoque primum membrum Propositionis fit manifestum: non abs re erit ad faciliorem secundi membri Propositionis captum (quando una duarum linearum, à quæsito puncto ducendarum, simul cum illa, ad quam altera datam habet rationem, data est, idemque punctum similiter in rectam lineam positione datam cadit) præmittere sequentia duo VI & VII Problemata: cum ipsa non minus grata, quàm ad Propositionem universaliorem reddendam proficua fore judicaverimus.

VI PRO-

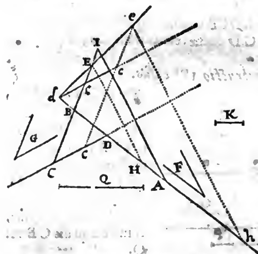
VI PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis parallelis vel concurrentibus A B, C D, invenire extra ipsas punctum E, à quo in datis angulis F, G eductis duabus rectis E C, E H ad positione datas A B, C D, altera E C ad alteram E H datâ lineâ Q sit major quàm in ratione data *r* ad *s*.

Sint (ut ante) anguli B A I, DCB æquales angulis F, G, & lineæ AI, CB, ubicunque ad A B, C B ductæ, concurrant in I. Deinde sit C c æqualis Q, & K ad A I, ut *r* ad *s*.



1mus *casus, in quo datæ lineæ AB, CD sunt parallelæ.*



2dus *casus, in quo datæ lineæ AB, CD concurrunt in D.*

Constructio.

Ductâ ex c rectâ c *d* parallelâ DC, occurrente in 2do casu cum AB in *d*, fiat, ut excessus, quo B I superat K, ad B I, ita B c ad B E. Tum ductâ E *d* parallelâ AB vel C D (ut in 1mo casu), aut ductâ ex *d* per E rectâ indefinitâ (ut in 2do casu), assumptoque in ea aliquo puncto e, à quo, si ad C D, A B ducantur rectæ e c, e *h* parallelæ ipsis C I, I A, hoc est, in datis angulis G & F: Dico c e ad e *h* datâ Q majorem esse, quàm in ratione data K ad A I, vel *r* ad *s*.

Similiter quoque invenitur punctum e, si c e ad e *h* datâ lineâ Q minor sit, quàm in ratione data K ad AI, vel *r* ad *s*.

De-

Demonstratio.

Cum, per constructionem, excessus, quo B I superat K, sit ad B I, sicut B c ad BE: erit invertendo dividendoque [a] K ad B I, sicut c E ad E B. Est autem ratio c E ad E B composita ex ratione c E ad E H, & ex ratione H E ad E B, vel A I ad I B. Quocirca etiam ratio K ad BI ex iisdem rationibus erit composita. Eodem modo, cum ratio K ad BI componatur ex ratione K ad AI, & ex ratione A I ad IB: erit ratio composita ex ratione c E ad E H, & ex A I ad IB eadem cum illa, quæ componitur ex ratione K ad A I, & ex A I ad I B. Hinc si utrinque auferatur communis ratio A I ad I B, erit ratio reliqua c E ad E H eadem rationi K ad A I, vel r ad s. Est autem C E datâ C c vel Q major quàm c E. Constat itaque CE ad EH datâ Q majorem esse, quàm in ratione data K ad A I, vel r ad s. Quod erat faciendum. Idem intelligendum de puncto quolibet *e*, in recta *d e* assumpto.

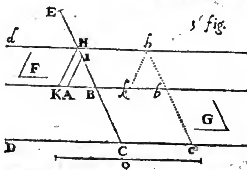
a 2 Cor. 4. Prop. libr. 5. & Prop. 17 lib. 5. Elem.

VII PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis parallelis vel concurrentibus A B, C D, invenire extra ipsas punctum H, à quo eductæ duæ rectæ HK, HC, in datis angulis F, G ad positione datas AB, CD, simul sumptæ æquales sint alteri datæ Q.

Sint, ut ante, anguli BAI, DCB æquales angulis F, G, & lineæ AI, CB, ubicunque ad AB, CD ductæ, concurrant in I; sitque porrò CE æqualis Q.

Constructio I^mi casus.



I^mus *casus, in quo datæ lineæ AB, CD sunt parallelæ.*

Fiat ut summa ipsarum A I, I B ad IB, ita BE ad BH; ductaque *d* H parallelâ A B vel D C, & ex in aliquo ea puncto *h* ductis *h k*, *h* c parallelis AI, I C, hoc est, in datis angulis F, G: erit *h k* simul cum *h* c æqualis C E vel Q.

De-

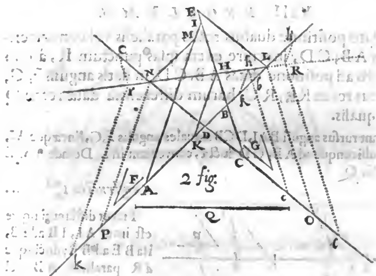
Demonstratio 1*mi* *casus.*

Cum Δla KHB, AIB similia sint, [a] erit KH ad HB, ut AI ad IB, & componendo [b] KH, HB ad HB, ut AI, IB ad IB. Sed sicut AI, IB ad IB, ita per constructionem est quoque BE ad BH. [c] Æquales itaque sunt KH, HB simul sumptæ ipsi BE. Unde communi additâ BC, erunt quoque KH, HC simul sumptæ æquales EC, hoc est, Q. Eadem est ratio de quolibet puncto *b*, ubicunque in recta *d* H assumpto.

a p 4. libr. 6. Elem.
b p 18. libr. 5. Elem.
c p 9. libr. 5. Elem.

Constructio 2*di* *casus.*

Ducatur ex E recta EL parallela DC, occurrens ipsi AB in L. Deinde sumatur AM æqualis CE, ducaturque ex M recta MN parallela AB, occurrens ipsi DC in N, jungaturque NL. Dico, si ex ali-



2*dus* *casus, in quo data lineæ AB, CD concurrunt in D.*

quo in ea puncto *b* ad positione datas AB, CD ducantur *bk*, *bc* parallelæ AI, IC, hoc est, in datis angulis F, G, quòd aggregatum ipsarum *kb*, *bc* sit æquale datæ rectæ CE vel Q.

Demonstratio 2[di] casus.

Ductis L O, N P parallelis C I, I A, occurrentibus datis D C, A B in O & P: erit L O [d] æqualis C E, & N P æqualis A M vel C E. Porrò cum propter similitudinem $\triangle^{orum}$ N H C, N L O, N H sit ad N L, ut H C ad L O vel E C; itemque propter similitudinem $\triangle^{rum}$ L H K, L N P, L H sit ad L N, ut H K ad N P, hoc est, C E: erit quoque [e], (quia N H, ceu prima, est ad N L, ceu secundam, sicut H C, ceu 3[tia], ad E C, ceu 4[tam]; nec non H L, ceu 5[ta], ad N L 2[dam], sicut H K, ceu 6[ta], ad E C 4[tam]), ut aggregatum ipsarum N H, H L, 1[mæ] & 5[tæ], ad 2[dam] N L, ita aggregatum ipsarum H C, H K, 3[tiæ] & 6[tæ], ad 4[tam] E C. Quocirca sicut aggregatum ipsarum N H, H L est æquale ipsi N L, ita quoque aggregatum ipsarum H C, H K erit ipsi E C vel Q æquale. Eadem est ratio de quovis puncto *h*, ad libitum assumpto in recta N L, inter puncta N, L. Datis ergo positione &c. Quod faciendum erat.

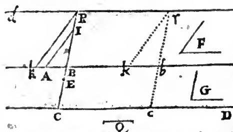
d 5. 34. libr. 1. Elem.

e 5. 24. libr. 5. Elem.

VIII PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis parallelis vel concurrentibus A B, C D, invenire extra ipsas punctum R, à quo eductis ad positione datas A B, C D, in datis angulis F, G, duabus rectis R k, R C, harum differentia datæ rectæ Q sit æqualis.

Fiant rursus anguli B A I, D C B æquales angulis F, G, lineæque A I, C B, ubicunque ad A B, C D ductæ, conveniant in I. Deinde fit C E æqualis Q.



1[mus] *casus, in quo datæ lineæ A B, C D sunt parallelæ.*

Constructio 1[mi] casus.

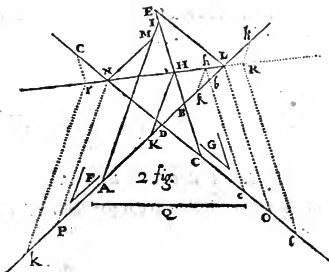
Fiat ut differentia, quæ est inter A I, I B ad I B, ita B E ad B R; ductâque *d* R parallelâ A B vel C D, agatur ex aliquo in ea puncto r ad ipsas A B, C D rectæ r k, r c parallelæ A I, I C, hoc est, in datis angulis F, G: eritque differentia ipsarum c r, r k æqualis datæ C E vel Q.

De-

Demonstratio 1^mi *casus.*

Quoniam, propter similitudinem Δ^{rum} ꝁ R B, A I B [a], ꝁ R est ad R B, ut A I ad I B, erit dividendo [b] sicut differentia ipsarum ꝁ R, R B ad R B, ita differentia ipsarum A I, I B ad I B. Sed ut differentia ipsarum A I, I B ad I B, ita quoque per constructionem est B E ad B R. Quocirca [c] differentia ipsarum ꝁ R, R B æqualis est ipsi D E, ideoque & R ꝁ æqualis R E; ac proinde C E, hoc est, Q, differentia, quæ est inter R C, R ꝁ. Idem similiter accipe de quolibet puncto r, ubicunque in recta *d* R assumpto.

a *p* 4. *libr.* 6. *Elem.*
b *p* 17. *libr.* 5. *Elem.*
c *p* 9. *lib.* 5. *Elem.*



2^dus *casus, in quo datæ lineæ AB, CD concurrunt in D.*

Constructio 2^di *casus.*

Inventâ, ut priùs in 2^do casu præcedentis Problematis, lineâ N L, eductisque à puncto aliquo R, in ea utrinque producta assumpto, rectis R ꝁ, R ȼ parallelis A I, I C, hoc est, in datis angulis F, G ad positione datas A B, C D: erit differentia ipsarum R ȼ, R ꝁ æqualis datæ C E vel Q.

Demonstratio 2^di casus.

d p 4. libr. 6. Elem. Cum $\triangle^{la}$ N R $\mathfrak{r}$, N L O [d] similia sint, erit N R ad N L, ut R $\mathfrak{r}$ ad L O vel C E. Rursus, quoniam $\triangle^{la}$ L R $\mathfrak{k}$, L N P similia sunt, erit L R ad L N, sicut R $\mathfrak{k}$ ad N P vel C E. Quocirca cum N R ceu 1^ma sit ad N L 2^dam, sicut R $\mathfrak{r}$ ceu 3^tia ad E C 4^tam; itemque L R ceu 5^ta ad N L 2^dam, sicut R $\mathfrak{k}$ ceu 6^ta ad E C 4^tam: erit quoque [e] differentia inter primam N R & 5^tam L R ad 2^dam N L, sicut differentia, quæ est inter 3^tiam R $\mathfrak{r}$ & 6^tam R $\mathfrak{k}$, ad 4^tam E C. Est autem differentia ipsarum NR, LR æqualis 2^dæ N L. Quare etiam differentia ipsarum R $\mathfrak{r}$, R $\mathfrak{k}$ est æqualis 4^tæ EC, hoc est, datæ Q. Idem similiter accipiendum est de quovis puncto r, in producta LN, ad libitum assumpto, extra puncta N & L. Datis ergo positione &c. Quod erat faciendum.

e Vide Clavium ad 24. libr. 5. Elem.

Corollarium.

Ex his liquet, ductis à quolibet puncto *h* in linea N L, assumpto inter puncta N & L, ad positione datas AB, CD duabus rectis *h k*, *h c* parallelis A I, I C, summam ipsarum *h k*, *h c* ipsi C E fore æqualem; At assumpto puncto r utcunque in producta N L extra N & L, differentiam ipsarum r k, r c ipsi C E esse æqualem.

IX. PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis parallelis vel concurrentibus AB, CD, invenire extra ipsas punctum H, à quo eductis in datis angulis F, G ad positione datas AB, C D duabus rectis H a, H C, ut harum una HC simul cum HK, eâ, ad quam altera H a datam habet rationem *r* ad *ſ*, sit æqualis datæ rectæ Q.

Fiant, ut ante, anguli BAI, DCB æquales datis F, G; & lineæ A I, C B, ubicunque ad A B, C D ductæ, concurrant in I. Deinde sit A I ad IF, ut *r* ad *ſ*; & CE, sicut ante, æqualis Q.

Con-

Constructio 1^{mi} *casus.*

Fiat ut aggregatum ipsarum FI, IB ad IB, ita BE ad BH; ductâque *d* H parallelâ AB vel D C: dico, si ex B per F agatur recta B F K, do-

1^mus casus, in quo data linea AB, D C sunt parallelæ.

nec occurrat rectæ a H ipsi A I parallelæ in K, a H esse ad H K, sicut A I ad I F, vel *r* ad *s*; & H C simul cum HK esse æqualem ipsi C E vel Q.

Demonstratio 1^{mi} *casus.*

Quoniam [a] Δ^la a H B, AIB, ut & KHB, F I B similia sunt: erit a H ad HB, ut AI ad IB; & HB ad HK, ut IB ad IF: ideoque [b] a H ad HK, ut AI ad IF. Porrò cum KH sit ad HB, sicut FI ad IB; componendo

a p 4. libr. 6 Elem.
b p 22. libr. 5. Elem.

2^dus casus, in quo data linea A B, C D concurrunt in D.

c p 18. libr. 5. Elem. nendo erit [c] ſicut aggregatum ipſarum KH, HB ad HB, ita aggregatum ipſarum FI, IB ad IB. Eſt autem per conſtructionem BE ad BH, d p 9. libr. 5. Elem. ſicut aggregatum ipſarum FI, IB ad IB. Æquale igitur eſt [d] aggregatum ipſarum KH, HB ipſi BE. Quarum unicuique additâ communi BC, erunt & KH, HC ſimul ſumptæ ipſi EC vel Q æquales. Id quod ſimiliter eſt accipiendum de quolibet puncto *b*, ubicunque in lineâ *d* H aſſumpto.

Conſtructio 2di caſus.

Ductâ ex E rectâ EB parallelâ DC, occurrente ipſi AB in B, fiat ut FI ad IA, ita CE ad AG. Deinde ductâ G *d* parallelâ AB, donec ipſi CD occurrat in *d*; itemque *d* L parallelâ AI, donec occurrat ipſi AB in L: dico, ſi jungatur *d* B, & à quolibet in ea puncto *h* ad AB, CD ducantur rectæ *h a*, *h c* parallelæ AI, IC, hoc eſt, in datis angulis F, G, ſumaturque *d* M æqualis CE, & jungatur MB, quòd *a h* ſit ad *h k*, ut AI ad IF, hoc eſt, *r* ad *ſ*; & quòd *hc* ſimul cum *h k* ſit æqualis ipſi CE vel Q.

Demonſtratio 2di caſus.

Per 34. 1mi Elem. L *d* eſt æqualis AG, & per conſtr. *d* M æqualis CE, & FI ad IA, ut CE ad AG, hoc eſt, *d* M ad *d* L: & invertendo [e] L *d* ad *d* M, ut AI ad IF. Quoniam autem [f] △la L *d* B, a HB, ut & M *d* B, KHB, ſimilia ſunt, & idcirco L *d* ad *d* B, ut a H ad HB; & *d* B ad *d* M, ut HB ad HK: erit etiam [g] L *d* ad *d* M, ut a H ad HK. Sed ut L *d* eſt ad *d* M, ita AI erat ad IF. Quocirca erit ut a H ad HK, ſic AI ad IF, hoc eſt, ut *r* ad *ſ*.

e p Cor. 4. lib. 5. Elem. f p 4. lib. 6. Elem. g p 22. libr. 5. Elem.

Porrò, quòd HC ſimul cum HK, ad quam a H, ut oſtenſum eſt, eam habet rationem, quam AI ad IF, vel *r* ad *ſ*, ſit æqualis CE vel Q, patet ex demonſtratione 2di caſus VII Problematis: cum omnes lineæ HC, HK, ductæ à puncto H, utcunque aſſumpto in linea *d* B inter duo puncta *d* & B, ad rectas DC, KB ipſis CI, IA parallelæ, ſint ſimul ſumptæ ipſi CE vel Q æquales. Datis ergo poſitione &c. Quod erat faciendum.

NOTA,

Cum ſequens Problema ejuſdem ferè ſit argumenti cum ſuperiori, faciliique viâ per illud ſolvi poſſit, placuit nobis id hîc ſubjungere, ut ſequitur.

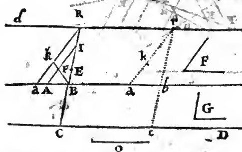
X PRO-

X PROBLEMA.

Datis poſitione duabus rectis parallelis vel concurrentibus A B, C D, invenire extra ipſas punctum R, à quo eductis in datis angulis F, G ad poſitione datas A B, C D, duabus rectis R a, R c, differentia inter harum unam R C & aliam R k, ad quam altera R a datam habet rationem r ad ſ, ſit æqualis datæ rectæ lineæ Q.

Fiant anguli B A I, D C B, ut ante, æquales angulis F, G, & rectæ A I, C B, ubicunque ad A B, C D ductæ, concurrant in I. Deinde ſit A I ad I F, ut r ad ſ; ſitque C E æqualis Q, ut ante.

Conſtructio 1mi caſus.



1mus *caſus, in quo data lineæ AB, CD ſunt parallelæ.*

Fiat ut differentia ipſarum F I, I B ad I B, ita B E ad B R; agaturque d R parallela A B vel C D. Tum ductâ ex R rectâ R a parallelâ A I, & ex B per F rectâ B F k, occurrente ipſi a R in k, erit a R ad R k, ſicut A I ad I F, hoc eſt, ut r ad ſ; itemque differentia inter R C & R k æqualis C E vel Q.

Demonſtratio 1mi caſus.

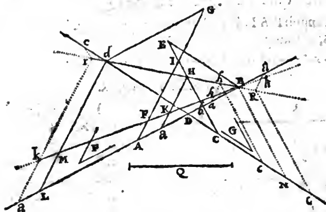
Quoniam [a] Δla a R B, A I B, ut & k R B, F I B ſimilia ſunt, erit a R ad R B, ſicut A I ad I B; & R B ad R k, ſicut I B ad I F: & per conſequens [b] a R ad K k, ſicut A I ad I F.

Porrò cum k R ſit ad R B, ut F I ad I B; erit dividendo [c] ut differentia ipſarum k R, R B ad R B, ita differentia ipſarum F I, I B ad I B. Eſt autem per conſtructionem B E ad B R, ſicut differentia ipſarum F I, I B ad I B. [d] Æqualis itaque eſt differentia ipſarum k R, R B ipſi B E: ideòque k R æqualis R E, & per conſequens C E vel Q æqualis differentiæ, quæ eſt inter R C, R k. Quod eodem modo intelligendum eſt de quolibet puncto r, in linea d R aſſumpto.

a p 4. libr. 6. Elem.
b p 22. libr. 5 Elem.
c p 17. libr. 5 Elem.
d p 9. libr. 5. Elem.

Constructio 2^di casus.

Inventâ, ut in 2do casu præcedentis Problematis, lineâ *d*B, ductisque à puncto aliquo R, in ea utrinque producta, ad A B, C D rectis R a, R c, parallelis A I, I C, hoc est, in datis angulis F, G: erit



2dus *casus, in quo data lineæ AB,* CD *concurrunt in* D.

a R ad R k, ut AI ad IF, vel *r* ad *f*; & R k subducta ex R c æqualis CE vel Q.

Demonstratio 2^di casus.

Quòd a R sit ad R k, ut A I ad IF, vel *r* ad *f*, patet ex eadem ratione, quâ in 2do casu superioris Problematis demonstravimus, a H esse ad HK, ut A I ad I F, vel *r* ad *f*. Eodem modo liquet ex demonstratione 2di casus VIII Problematis, differentiam ipsarum R c, R k æqualem esse C E vel Q. Quod similiter intelligendum est de quolibet puncto r, ubicunque assumpto in producta *d* B ad alteram partem. Datis ergo positione &c. Quod erat faciendum.

Hinc;

Hinc:

Si à puncto quodam ad positione datas duas rectas lineas parallelas vel inter se convenientes ducantur duæ rectæ lineæ in datis angulis, datam inter se habentes rationem; vel quarum una, simul cum aut minus datâ lineâ, ad alteram sit in ratione data; vel quarum aggregatum aut differentia sit datæ rectæ æqualis; vel denique quarum una simul cum ea aut minus eâ, ad quam altera datam habet rationem, datæ rectæ sit æqualis: continget punctum rectas lineas, positione datas. *Conclusio 6tæ Propositionis.*

Quod erat demonstrandum.

In 7mam Propositionem.

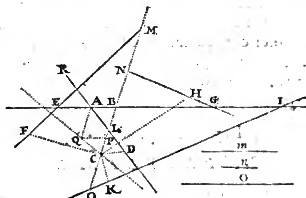
XI *PROBLEMA.*

Datis positione quotcunque rectis lineis AB, AD, EF, GH, IK: invenire extra ipsas punctum C, à quo eductis in datis angulis CBA, CDA, CFE, CHG, CKO ad positione datas AB, AD, EF, GH, IK rectis CB, CD, CF, CH, CK, id, quod sub data linea *m* & una ducta CB comprehenditur rectangulum, unà cum eo, quod sub alia ducta CD & data *n* comprehenditur, æquale sit ei, quod sub alia data *o* & reliquis ductis CF, CH, & CK continetur.

Cum propter datarum linearum atque angulorum multitudinem explicatio constructionis prolixior futura esset, quàm ut votis hujus & alterius responderet, brevitati consulentes satis fore duximus, si calculo Geometrico operationem expediremus, ut sequitur.

Primò itaque rem ut jam factam suppono, atque, ut ex omnium harum linearum confusione me expediam, considero unam ex datis atque unam ex quæsitis, ut ex. gr. AB & CB, velut præcipuas, & ad quas reliquas omnes referre conor. Pono itaque lineam AB vocari *x*, BC autem vocari *y*, & alias lineas datas omnes productas esse, donec secent hasce duas, etiam productas, si opùs fuerit, & ipsis non sint parallelæ, utputa AB, in punctis A, E, G, I; at BC in punctis L,

M, N, & O. Deinde obſervans angulos Δ^{li} ABL eſſe datos, datamque ideo rationem laterum ipſius A B ad B L, quam pono ut z ad a: erit, exiſtente A B ∞x, B L $\infty \frac{ax}{z}$, & C L $\infty y - \frac{ax}{z}$, nimirum, ſi punctum L cadit inter B & C; cadente verò B inter C & L, erit C L ∞



$y + \frac{ax}{z}$; & $-y + \frac{ax}{z}$, ſi C ceciderit inter B & L. Eodem modo, datis angulis Δ^{li} L C D datur & ratio laterum, quæ eſt inter CL & CD, quæ ſi ponatur eſſe, ut z ad b: erit, exiſtente C L $\infty y - \frac{ax}{z}$, C D $\infty \frac{by}{z} - \frac{abx}{zz}$. Porrò, quoniam lineæ AB, AD, EF poſitione datæ ſunt, dabitur etiam intervallum inter puncta A & E, quod ſi vocetur i, erit E B $\infty i + x$; at $i - x$, ſi punctum B ceciderit inter A & E; & $- i + x$, cadente E inter A & B. Similiter, datis angulis Δ^{li} E B M, datur ratio laterum, quæ eſt inter E B & B M, quæ ſit ut z ad c. Cumque E B ſit $i + x$, erit BM $\infty \frac{ci + cx}{z}$, & CM $\infty \frac{zy + ci + cx}{z}$. Haud ſecus datis angulis Δ^{li} FCM, datur ratio laterum, quæ eſt inter CM & CF. Quæ ſi ponatur ut z ad d, erit CF $\infty \frac{dzy + cdi + cdx}{zz}$. Pari ratione, datis poſitione rectis lineis A B, A D, & G H, datur quoque intervallum inter puncta A & G, quod ſi vocetur k, erit B G $\infty k - x$; at $k + x$, cadente A inter B & G; & $- k + x$, cadente G inter A & B. Eodem modo, cùm dantur anguli Δ^{li} BNG, datur & ratio laterum, quæ eſt inter

inter BG & BN. Quæ ſi ponatur ut z ad e, BG exiſtente $k - x$, erit BN $\propto \frac{ek - ex}{z}$, & CN $\propto \frac{zy + ek - ex}{z}$. Rurſus datis angulis Δ^li CNH, dabitur ratio laterum, quæ eſt inter CN & CH. Quæ ſi ponatur ut z ad f: erit CH $\propto \frac{fzy + efk - efx}{zz}$. Denique, cum, datis poſitione rectis AB, AD, KI, detur & AI, intervallum inter puncta A & I: id quod ſi vocetur l, erit BI $\propto l - x$; ſed $l + x$, cadente A inter B & I; & $-l + x$, cadente I inter A & B. Porrò, cum, datis angulis Δ^li OBI, detur ratio laterum BI ad BO: ſi ponatur illa ut z ad g, erit, exiſtente BI $\propto l - x$, BO $\propto \frac{gl - gx}{z}$; & CO $\propto \frac{-zy + gl - gx}{z}$. Eodem modo datis angulis Δ^li OCK, atque ideo ratione laterum, quæ eſt inter CO & CK: ſi illa ponatur ut z ad h, erit CK $\propto \frac{-hzy + ghl - ghx}{zz}$. Et ſic ulteriùs, ſi plures lineæ poſitione datæ fuerint.

Ubi conſtat, datis poſitione quotcumque lineis rectis, in ſimilibus terminis inveniri ſemper quantitatem cujuſque lineæ, ex puncto C ad quamlibet datarum linearum in dato angulo eductæ.

Notandum autem, quòd ſi datæ lineæ ſunt ipſi AB parallelæ, in nulla iſtarum quantitatum x reperiri. Aſt ubi datæ lineæ ipſi CB ſunt parallelæ, nullos invenitum iri terminos, quantitatem y involventes. Denique quod attinet ſigna $+$ & $-$, poſſunt ipſa tot modis variari, quot excogitari queunt datarum linearum poſitiones. Tandem cum conſtet longitudinem cujuſque ductarum linearum iis terminis exprimi, in quibus ſolummodò x vel y continetur, non autem xx vel yy: ſequitur, non obſtante multiplicatione uniuſcujuſque earundem linearum per quantitatem alterius datæ, nunquam tamen ad xx vel yy adſcendi. Id quod arguit punctum C in rectam lineam cadere, poſitione datam, ut hîc deinceps oſtenditur.

Idcirco ad determinandum punctum C, cum CB, hoc eſt, y, multiplicata per m producat my; & CD, hoc eſt, $\frac{by}{z} - \frac{abx}{zz}$ multiplicata per n, producat $\frac{bny}{z} - \frac{abnx}{zz}$; ac porrò CF, CH, & CK multiplicatæ per o producant $\frac{dozy + cdio + cdox + fozy + efko - efox - hozy + ghlo - ghox}{zz}$:

erit æquatio $my + \frac{bny}{z} -- \frac{abnx}{zz} \propto \frac{dozy + cdio + cdox + fozy + efko -- efox -- bozy + ghlo -- ghox}{zz}$. Hoc est, multiplicatis utrinque per zz, & æqualitate ad legitimam formam reductâ:

$$y \propto \frac{\begin{matrix} cdio + abnx \\ + efko + cdox \\ + ghlo - efox \\ - ghox \end{matrix}}{mzz + bnz - doz - foz + boz.}$$

Nempe si ponatur $mz + bn + bo$ majus quàm $do + fo$. Cum aliàs, si $mz + bn + bo$ minus esset quàm $do + fo$, signa + & -- forent immutanda. Quòd si contigerit y esse æqualem nihilo aut minorem quàm o, postquam suppositum fuerit punctum C cadere intra angulum DAE, oporteret idipsum quoque sumere intra angulum DAG, GAR, vel RAE, mutando ad hoc signa + & —, prout requiritur. Quòd si verò in hisce quatuor positionibus, y deprehenderetur esse æqualis o, indicio esset Problema hujusmodi conditionibus circumvallatum esse impossibile. Posito autem quòd sit possibile, pro $\frac{cdio + efko + ghlo}{mzz + bnz -- doz -- foz + boz}$ scribatur, brevitatis causâ, p; & loco $\frac{abn + cdo -- efo -- gho}{mzz + bnz -- doz -- foz + boz}$ scribatur $\frac{q}{r}$ habebiturque $y \propto p +$ vel $- \frac{q}{r}x$. Nimirum erit $y \propto p + \frac{q}{r}x$, si $abn + cdo$ majus sit quàm $efo + gho$; sed $y \propto p - \frac{q}{r}x$, si $abn + cdo$ est minus quàm $efo + gho$.

Quapropter cum omne illud, quod in Problemate requirebatur, sit peractum, nihilque amplius relictum sit cujus ope æquatio inveniri possit ad obtinendam quantitatem indeterminatam x, liberum erit x pro lubitu sumere; ita ut hoc pacto innumera puncta C, quæsito satisfacientia, inveniri queant.

Hinc sumptâ AB ad lubitum, fiat BP æqualis p, ponaturque à B versùs C, si habeatur $+p$; quæ aliàs versùs N esset sumenda, si haberetur $-p$; aut, si p fuisset æqualis nihilo, nullo modo ducenda fuisset. Deinde eductâ ex P lineâ PQ parallelâ & æquali AB, duco QC, ita ut QP sit ad PC, ut r ad q. hoc est, si QP est x, tum PC sit $\frac{qx}{r}$; ita ut

pun-

punctum C cadat inter B & P, si habeatur $-\frac{qx}{r}$. Contra si habeatur $+\frac{qx}{r}$, faciendum est, ut C cadat ad alteram partem extra P. quemadmodum hîc factum apparet. Ubi observandum, nullo modo ducendam fuisse lineam QC, si $\frac{qx}{r}$ fuisset æqualis o. Id quod argumento fuisset, punctum quæsitum C casurum fuisse in inventa PQ, ab utraque parte in infinitum producta.

Eodem modo sumendo aliam semper atque aliam magnitudinem pro AB, hoc est, ducendo CB in dato angulo CBA, ex alio atque alio puncto B, invenientur innumera puncta C, quæsito satisfacientia. Quæ quidem omnia cadent in rectam lineam QC, utrinque in infinitum productam.

Ubi porrò notandum ducimus, quo pacto quæsitum punctum C non solùm in rectam lineam sit casurum, quæ positione est data, quotiescunque illud, quod sub data *m* & ducta CB, unà cum eo, quod sub data *n* & ducta CD continetur, æquale est ei, quod sub data *o* & reliquis CF, CH, & CK comprehenditur; verùm etiam quoties unum productum ad alterum datam habet rationem; sicut etiam quoties unaquævis ductarum CF, CH, & CK per peculiarem quandam datam fuerit multiplicata, & producta ipsarum ad se invicem utcunque fuerint comparata.

Patet igitur:

Si sint quotcunque rectæ lineæ positione datæ, atque ad ipsas à quodam puncto ducantur rectæ lineæ in datis angulis, sit autem quod sub data linea & ducta continetur, unà cum contento sub data linea & altera ducta, æquale ei, vel datam habens rationem ad illud, quod sub data & alia ducta & reliquis continetur: punctum rectam lineam positione datam contingere. *Conclusio 7mæ Propositionis.*

Quod erat demonstrandum.

In

In 8vam Propositionem.

XII *PROBLEMA.*

Datis positione duabus rectis parallelis AB, CD, invenire extra ipsas punctum H, à quo eductæ in datis angulis F, G ad positione datas AB, CD duæ rectæ HI, HD, ipsæ ad data puncta A & C in positione datis AB, CD intercipiant rectas AI, CD, datam inter se habentes rationem *c* ad *b*.

Fiant anguli BAE, DCB æquales datis angulis F, G; rectæque AE, CB productæ concurrant in E. Deinde sit FE ad EB, sicut *c* ad *b*.

Constructio.

Ductâ AF, agatur per E ipsi parallela EH; ductisque ex aliquo in ea puncto H ad positione datas AB, CD duabus rectis HI, HD, ipsis AE, EC parallelis, hoc est, in datis angulis F, G: erit AI ad CD, ut FE ad EB, vel *c* ad *b*.

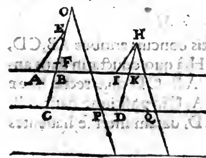
Demonstratio.

Ductâ HE occurrente ipsi AB in G; & ex E ductâ EL parallelâ
a p 4. libr. AB, secante IH in M, & ipsi DKE occurrente in L: erit propter
6. Elem. similitudinem △rum ELH, GBE, ut & EMH, GAE a, LE ad EH,
b p 22. libr. ut BG ad GE; & EH ad EM, ut GE ad GA: ac proinde ex æquo
5. Elem. b LE ad EM, hoc est, CD ad AI, ut BG ad GA. Porrò cum c BA
c p 2. libr. 6. Elem. sit ad AG, ut BF ad FE, hoc est, componendo d BG ad GA, ut BE
d p 18. libr. ad EF; atque etiam BG sit ad GA, sicut CD ad AI: e erit CD ad AI,
5. Elem. ut BE ad EF, hoc est, ut *b* ad *c*. Quod erat faciendum. Idem similiter
e p 11. libr. intelligendum est de quovis puncto in linea EH assumpto.
5. Elem.

NOTA

NOTA 1^{ma}.

Quamvis hæc Propositio universalis sit, & in quotcunque rectis lineis parallelis locum obtineat, operæ pretium tamen nos facturos existimavimus, si ad majorem ejus perfectionem sequentem operationem hîc adjiceremus.



In 3^{bus} lineis.

Sit AB $\propto a$
BE $\propto b$
EF $\propto c$
OC $\propto d$
CP $\propto e$
BC vel DK $\propto f$
CD ad MN, ut d ad g
AK $\propto x$
KH $\propto y$.

BE AB KH
$b - a - y$ | IK. $\frac{ay}{b}$ } subtr. AK. x

FE EB
$c - b$ — AI. $\frac{bx - ay}{b}$ | CD. $\frac{bx - ay}{c}$ } add.

OC CP DH
$d - e - y + f$ | DQ. $\frac{ey + ef}{d}$

CQ. $\frac{bdx - ady + cey + cef}{cd}$

subtr. CP. e

CD
$d - g - \frac{bx - ay}{c}$ | PQ vel MN. $\frac{bdx - ady + cey + cef - cde}{cd}$

$bdx - ady + cey + cef - ced \propto bgx - agy$

$agy - ady + cey \propto bgx - bdx + ced - cef$

fit $y \propto \frac{bgx - bdx + ced - cef}{ag - ad + ce}$.

Quod arguit punctum H in rectam lineam cadere, positione datam.

Idem similiter liquet de quotcunque datis parallelis.

NOTA 2da.

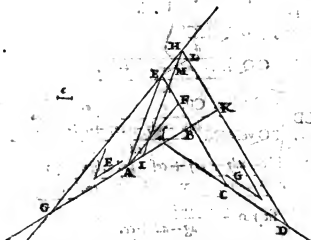
Quoniam quæsitum non tantùm in lineis parallelis, prout ab Apollonio propositum est, sed in concurrentibus quoque locum habet, ideo sequens addere nobis placuit

PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis concurrentibus AB, CD, invenire extra ipsas punctum H, à quo eductæ in datis angulis F, G ad positione datas AB, CD duæ rectæ lineæ HI, HD, ipsæ ad data puncta A, C in positione datis AB, CD intercipiant rectas AI, CD, datam inter se habentes rationem.

Fiant, ut ante, ad A & C anguli BAE & *d* CB æquales angulis F & G; rectæque AE, CB æquales hosce angulos constituentes concurrant in E. Deinde sit data ratio ut *c* ad EB.

Constructio.



Fiat ut B *d* ad *d* C, ita *c* ad EF; junctæque AF agatur per E parallela EH. Tum ductis ex aliquo in ipsa puncto H ad AB, CD rectis HI, HD parallelis AE, EC, hoc est, in datis angulis F, G: erit AI ad CD, ut *c* ad EB.

De-

Demonstratio.

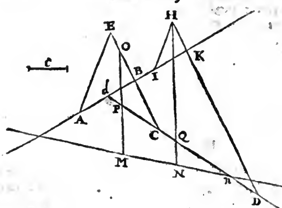
Cum propter Δ^{la} similia ELH; GBE, ut & EMH, GAE [a], LE sit ad EH, sicut BG ad GE; & EH ad EM, sicut GE ad GA: ex æquo erit [b] LE ad EM, hoc est, KB ad AI, sicut BG ad GA. Porrò cum [c] BA sit ad AG, ut BF ad FE, hoc est, componendo [d] BG ad GA, ut BE ad EF; atque etiam BG sit ad GA, ut KB ad AI: [e] erit KB ad AI, ut BE ad EF; & invertendo [f] AI ad BK, ut FE ad EB. Sed ut BK ad CD, ita est B*d* ad *d*C; itemque ut B*d* ad *d*C, ita per constructionem *c* est ad EF. [g] Erit igitur BK ad CD, ut *c* ad EF. Hinc cum AI, BK & CD sint 3 magnitudines ab una parte, & *c*, FE, & EB 3 aliæ ab altera parte, quæ binæ sint in eadem ratione, sitque earum proportio perturbata, [h] erit quoque ex æquo 1^{ma} AI ad 3^{am} CD (in 3^{bus} primis), sicut 1^{ma} *c* ad 3^{tiam} EB (in 3^{bus} postremis). Quod erat faciendum. Idem similiter intelligi debet de quolibet puncto in linea EH assumpto.

a p. 4. libr. 6 Elem.
b p. 22. libr. 5. Elem.
c p. 2. libr. 6. Elem.
d p. 18. libr. 5. Elem.
e p. 11. lib. 5. Elem.
f p. Cor. 4. libr. 5. Elem.
g p. 11. libr. 5. Elem.
h p. 23. libr. 5. Elem.

NOTA.

Cum hæc Propositio verificetur in tot lineis concurrentibus, quot quis voluerit, itaque ad majorem ejus perfectionem sequentem operationem adjecimus

In 3^{bus} lineis.



Esto AB ∞ *a*
BE ∞ *b*
AI ad CD, ut *c* ad *b*
B*d* ∞ *d*
BC ∞ *e*
OC ∞ *f*
CP ∞ *g*
P*n* ∞ *h*
*n*M ∞ *i*
CD ad MN, ut *b* ad *k*
AK ∞ *x*
KH ∞ *y*

$$\left.\begin{array}{l} AK.\ x \\ \overset{BE\ \ AB\ \ HK}{b - a - y} \mid IK.\ \dfrac{ay}{b} \end{array}\right\}\text{subtr.}$$

$$\overset{BE}{c - b} - AL.\ \frac{bx - ay}{b} \mid CD.\ \frac{bx - ay}{c}$$

$$BK.\ x - a$$

$$\overset{dB\ \ BC}{d - e} - \text{add. } dB.\ d \qquad \text{add. } CP.\ g$$

$$dK.\ x - a + d \mid KD.\ \frac{ex - ae + de}{d} \qquad PD.\ \frac{bx - ay + cg}{c}$$

$$\text{add. } HK.\ y$$

$$f - g - HD.\ \frac{ex - ae + de + dy}{d} \mid DQ.\ \frac{egx - aeg + deg + dgy}{df} \quad \text{subtr.}$$

$$\overset{Pn\ \ nM}{h - i} - PQ.\ \frac{bdfx - adfy + cdfg - cegx + aceg - cdeg - cdgy}{cdf},$$

$$\text{ad } MN.\ \frac{bdfix - adfiy + cdfgi - cegix + acegi - cdegi - cdgiy}{cdfh}.$$

$$\overset{CD}{} \qquad\qquad \overset{MN}{}$$

$$h - k - \frac{bx - ay}{c},\ \text{ad } \frac{bdfix - adfiy + cdfgi - cegix + acegi - cdegi - cdgiy}{cdfh}.$$

$$bdfix - adfiy + cdfgi - cegix + acegi - cdegi - cdgiy \infty bdfkx - adfky$$

$$adfiy + cdgiy - adfky \infty bdfix - cegix - bdfkx + cdfgi + acegi - cdegi$$

$$\text{fit } y \infty \frac{+ bdfix + cdfgi - cegi + acegi - bdfk - cdegi}{adfi + cdgi - adfk}.$$

Id quod arguit, punctum H cadere in rectam lineam, positione datam.

Idem similiter liquet de quotcunque positione datis rectis concurrentibus.

Hinc:

Conclusio prioris partis 8vae Propositionis. Si ab aliquo puncto ad quotcunque positione datas parallelas vel concurrentes in datis angulis ducantur rectæ lineæ, quæ ad data in ipsis puncta abscindant rectas lineas datam inter se rationem habentes; punctum continget positione datam rectam lineam.

Quod erat demonstrandum.

NOTA.

NOTA.

Cum in 7[ma] Propoſitione ulteriùs quoque habeatur, quòd, ſi abſciſſæ rectæ lineæ datum ſpatium comprehendant, quæſitum punctum contingat rectam lineam poſitione datam, nec tamen id ipſum ſive in parallelis ſive in concurrentibus locum inveniat, quoniam punctum eâ ratione non in rectam lineam ſed Hyperbolam cadit: idcirco caſum iſtum, ceu ab imperito quodam inſertum, neglex imus & repudiavimus, ejuſque loco ſequens Problema 13, genuinam illius mentem exponere nobis viſum, ſubrogavimus. Deinde cum ibidem adhuc dicatur, quòd, ſi rectæ poſitione datæ ſunt parallelæ, & ſpecies ab ipſis ductis vel exceſſus ſpecierum dato ſpacio eſt æqualis, punctum ſimiliter contingat poſitione datas rectas lineas: idcirco illud oſtenſuri, antequam poſteriorem 7[mæ] Propoſitionis partem concluderemus, duo reliqua ſequentia 14 & 15 Problemata huic adplicavimus.

XIII *PROBLEMA.*

Datis poſitione duabus rectis parallelis A B, C D, invenire extra ipſas punctum H, à quo eductis ad poſitione datas A B, C D in datis angulis F, G duabus rectis H I, H D, rectangulum I H D, ſub ipſis comprehenſum, dato ſpacio ſit æquale.

Fiant, ut ante, anguli BAE, cDE æquales angulis F, G; lineæque AE, DB, ubicunque ad AB, CD ductæ, concurrant in E. Deinde datum ſpacium eſto illud, quod ſub AE & BK continetur.

Constructio.

Inventâ inter EB & BK mediâ proportionali BF, ſeccetur BD bifariam in G jungaturque GF. Porrò factâ GH æquali GF, agatur per H recta H *h* parallela AB vel CD; ductiſque ab aliquo in ea puncto H ad

AB, CD rectis HI, HD parallelis AE, ED, hoc est, in datis angulis F, G: dico quod sub IH, HD continetur rectangulum esse æquale dato spacio sive rectangulo contento sub AE, BK.

Demonstratio.

Descripto ex G intervallo DG vel GB circulo DMBL, secetur ejus circumferentia ab FG in L, atque ab eadem producta in M: [a] eritque ▭ MFL, hoc est, DHB æquale □to ex BF. Est autem [b] □tum ex BF etiam æquale ▭lo KBE. Æquale igitur est ▭ DHB ipsi ▭lo KBE. Unde erit [c] ut DH ad KB, ita BE ad BH. Sed ut BE ad BH, ita est quoque [d] AE ad IH. Quare erit ut DH ad KB, sic AE ad IH: ideoque [e] id, quod sub extremis continetur ▭ DHI æquale ▭lo sub mediis KB, AE, hoc est, dato spacio. Quod erat faciendum.

a p Cor 36. libr.3.Elem.
b p 14. libr. 2. vel 17. libr.6.Elem.
c p 16. libr. 6. Elem.
d p 4. libr.6. Elem.
e p 16. libr. 6. Elem.

Idem similiter intelligendum de quolibet puncto *h* in linea H*h* assumpto.

XIV PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis parallelis AB, CD, invenire extra ipsas punctum H, à quo eductis ad positione datas AB, CD in datis angulis F, G duabus rectis HI, HD, quæ ab ipsis fiunt quadrata simul sumpta sint æqualia dato spacio.

Fiant, ut ante, anguli BAE, *c* DE æquales angulis F, G; lineæque AE, DE, ubicunque ad AB, CD ductæ, concurrant in E. Deinde sit datum spacium, illud, quod continetur sub BD, DG.

Constructio.

Inventâ ad AE, EB tertiâ proportionali EN, hoc est, ut AE sit ad EB, sicut EB ad EN: fiat ut AEN ad EN, ita DB ad BK. Porrò inventâ inter KB, BG mediâ proportionali BF, junctâque KF, fiat eidem æqualis KH, & per H agatur recta H*h* parallela AB vel CD. Tum eductis ex aliquo in ipsa puncto H ad AB, CD rectis HI, HD, parallelis AE, ED, hoc est, in datis angulis F, G: dico summam □torum ex IH, HD dato spacio BDG esse æqualem.

De-

Demonstratio.

Descripto ex K intervallo KB circulo OMBL, secetur ejus peripheria ab FK in L, atque ab eadem producta in M: eritque [a] ▭ MFL, hoc est, OHB æquale □^{to} ex BF. Est autem [b] □^{tum} ex BF æquale ▭^{lo} KBG. Quare etiam ▭ OHB æquale erit ▭^{lo} KBG. Porrò,

a 36. Cor. 36. libr. 3. Elem.
b 14. libr. 2, vel 17. lib. 6. Elem.

quoniam per constructionem AE est ad EB, sicut EB ad EN. id est, [c] AE ad EN, sicut □^{tum} ex AE ad □^{tum} ex EB, vel ut □^{tum} ex IH ad □^{tum} ex HB: erit componendo [d] ut AEN ad EN, hoc est, DB ad BK, ita summa □^{torum} ex IH, HB ad □^{tum} ex HB. Quoniam verò [e] DB est ad BK, sicut ▭ DBK ad ▭ HBK, vel [f] sicut duplum ▭ DBH ad duplum ▭ HBK, hoc est, ad ▭ HBO: erit quoque summa □^{rum} ex IH, HB ad □^{tum} ex HB, sicut duplum ▭ DBH ad ▭ HBO. Ac proinde, per 12.5, ut summa □^{rum} ex IH, HB unà cum duplo ▭ DBH ad summam □^{ti} ex HB & ▭^{li} HBO, hoc est [g], ad ▭ OHB, ita summa □^{rum} ex IH, HB ad □^{tum} ex HB, seu DB ad BK. Sed ut DB ad BK, ita quoque [h] est ▭ DBG ad ▭ KBG. Quocirca ut summa □^{rum} ex IH, HB unà cum duplo ▭ DBH ad ▭ OHB, ita ▭ DBG ad ▭ KBG. Et invertendo [i] ut ▭ OHB ad summam □^{rum} ex IH, HB unà cum duplo ▭ DBH, ita ▭ KBG ad ▭ DBG.

c 1. Cor. 20. libr. 5. Elem.
d 18. libr. 5. Elem.
e 1. libr. 6. Elem.
f 15. libr. 5. Elem.
g 3. libr. 2. Elem.
h 1. libr. 6. Elem.
i 4. Cor. 4. lib. 5. Elem.

▭ DBG. Unde, cum ▭ OHB æquale sit ostensum ▭^{lo} KBG,
k p 14. libr. erit quoque [k] summa □^{tum} ex IH, HB unà cum duplo ▭ DHB
5. Elem. æquale ▭^{lo} DBG. Et proinde si addatur utrinque □^{tum} ex DB,
l p 4. & 3. erit [l] summa □^{rum} ex IH, HD æqualis dato spacio seu ▭^{lo} BDG.
libr. 1. Elem. Quod erat faciendum. Idem similiter intelligendum de quolibet puncto *h*, in linea H*h* assumpto.

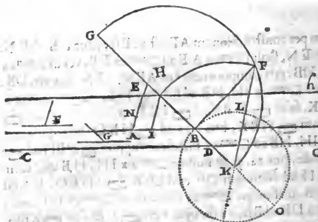
XV PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis parallelis AB, CD, invenire extra ipsas punctum H, à quo eductis ad positione datas AB, CD in datis angulis F, G, duabus rectis HI, HD, differentia quadratorum ex ipsis dato spacio sit æqualis.

Fiant, ut ante, anguli BAE, CDE æquales angulis F, G; lineæque AE, DE, ubicunque ad AB, CD ductæ, concurrant in E. Deinde sit datum spacium, illud, quod continetur sub BD, DG.

Constructio.

Inventâ ad BE, AE, 3^{tia} proportionali EN, hoc est, ut BE sit ad EA, sicut AE ad EN: fiat ut differentia ipsarum BE, EN ad EN,



ita DB ad BK. Tum inventâ inter KB, BG mediâ BF, jungatur KF, fiatque KH æqualis KF. Deinde per H ductâ rectâ H*h* parallelâ AB vel

vel CD, ductisque ex aliquo in ea puncto H ad AB, CD rectis HI, HD parallelis AE, ED, hoc est, in datis angulis F, G: erit differentia □[rum] ex DH, HI æqualis dato spacio BDG.

Demonstratio.

Descripto ex K intervallo KB circulo OMBL, secetur ejus peripheria ab FK in L, atque ab eadem producta in M: [a] eritque ▭ MFL, hoc est, OHB æquale □[to] ex BF. Est autem □[tum] ex BF [b] æquale ▭[lo] KBG. Quare ▭ OHB æquale quoque erit ▭[lo] KBG. Porrò cum per constructionem BE sit ad EA, ut AE ad EN. id est [c], BE ad EN, sicut □[tum] ex BE ad □[tum] ex EA, vel ut □[tum] ex BH ad □[tum] ex HI: erit quoque [d] per conversionem rationis & invertendo ut differentia rectarum BE, EN ad BE, hoc est, per constr. ut DB ad BK, ita differentia □[rum] ex BH, HI ad □[tum] ex BH. Quoniam verò DB est ad BK [e], sicut ▭ DBH ad ▭ HBK, vel [f], ut duplum ▭ DBH ad duplum ▭ HBK, hoc est, ad ▭ HBO: erit quoque differentia □[rum] ex BH, HI ad □[tum] ex BH, sicut duplum ▭ DBH ad ▭ HBO: & per consequens, per 12. 5, ut excessus, quo □[tum] ex BH simul cum duplo ▭ DBH superat □[tum] ex HI, ad summam □[ti] ex BH & ▭[li] HBO, hoc est, ad ▭ OHB, ita differentia □[rum] ex BH, HI, ad □[tum] ex BH, vel ut DB ad BK. Sed ut DB ad BK, ita [g] est quoque ▭ DBG ad ▭ KBG. Quocirca ut excessus, quo □[tum] ex BH unà cum duplo ▭ DBH superat □[tum] ex HI ad ▭ OHB, ita ▭ DBG ad ▭ KBG. Et invertendo [h] ut ▭ OHB ad excessum, quo □[tum] ex BH unà cum duplo ▭ DBH superat □[tum] ex HI, ita ▭ KBG ad ▭ DBG. Unde, cum ▭ OHB sit æquale ostensum ▭[lo] KBG, erit etiam [i] excessus, quo □[tum] ex BH unà cum duplo ▭ DBH superat □[tum] ex HI, æqualis ▭[lo] DBG. Ac proinde si utrinque addatur □[tum] ex DB, erit quoque [k] differentia □[rum] ex DH, HI æqualis dato spacio seu ▭[lo] BDG. Quod erat faciendum.

a p Cor. 36. libr. 3. Elem.
b 14. libr. 2, vel 17. lib. 6. Elem.
c p Cor. 20. libr. 6. Elem.
d p Cor. 19. & Cor. 4. libr 5. Elem.
e p 1. libr. 6. Elem.
f p 15. libr. 5. Elem.
g p 1. libr. 6. Elem.
h p Cor. 4. libr. 5 Elem.
i p 14. libr. 5. Elem.
k p 4 & 3. libr. 2. Elem.

Idem similiter intelligendum de quolibet puncto *h* in recta H*h* assumpto.

NOTA,

Cum 7[ma] Propositio in genere doceat, quòd, si species vel excessus specierum, quæ à ductis fiunt, sint dato spacio æquales, quæsitum punctum rectam lineam contingat positione datam (id quod in binis proximè præcedentibus Problematis de quadratis tantùm

oſtendimus) : ſciendum erit, poſtquam ex demonſtratione 77^{mæ} Prop^{nis} Datorum Euclidis conſtet, datis ſpecie duabus figuris ad invicem datam rationem habentibus, quadratum quoque cujuſlibet lateris unius ad quadratum cujuſlibet lateris alterius datam rationem habere, quòd, datâ ratione iſtarum figurarum, detur quoque ratio horum quadratorum. Id quod ſimiliter in ſequentibus Problematibus, in quibus de figuris, ſpecie datis, ſermo fit, intelligendum eſt. quo ipſo ſeptimæ Propoſitioni colophonem imponimus.

Hinc:

Concluſio poſterioris partis 8væ Propoſitionis.

Si ab aliquo puncto ad poſitione datas duas parallelas ducantur duæ rectæ lineæ in datis angulis datum ſpatium continentes; vel quarum ſpecies vel exceſſus ſpecierum ſit dato ſpacio æqualis: punctum continget poſitione datas rectas lineas.

Quod erat demonſtrandum.

SE-

SEQVVNTVR PROBLEMATA IN SECUNDI LIBRI PROPOSITIONES.

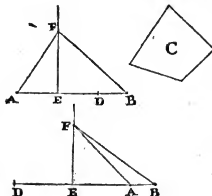
In primam Propositionem

I PROBLEMA.

A datis duobus punctis A, B duas rectas lineas inflectere AF, BF, ut illorum, quæ ab ipsis fiunt, differentia sit æqualis dato spatio C.

Constructio.

Ductâ AB, fiat ▭ ABD æquale dato spatio C, seceturque AD bifariam in E. Tum ex E ductâ EF ad angulos rectos super AB, & ex A & B ad aliquod in ea punctum F ductis duabus rectis AF, BF; erit differentia □rum ex BF, AF æqualis dato spatio C.



Demonstratio.

Per 6. 2di Elem. □tum ex EB superat □tum ex AE vel ED, ▭lo ABD, hoc est, dato spatio C. Sed quoniam inæqualibus adjunctis æqualibus totorum excessus æqualis est excessui eorum, quæ erant à principio, constat, addito utrinquè communi □to ex EF, □ta ex EB, EF, simul sumpta, tantùm excedere □ta ex AE, EF, simul sumpta, quantum □tum ex EB exce-

a p 47. libr. 1. Elem.

dit □tum ex AE. Sunt autem a bina □ta ex EB, EF æqualia □to ex BF, & bina □ta ex AE, EF æqualia □to ex AF. Quocirca si □tum ex EB excedit □tum ex AE dato spatio C, excedet quoque □tum ex BF ipsum □tum ex AF eodem spatio C. Quod erat faciendum.

Idem similiter intelligendum de quolibet puncto in linea EF assumpto, estque manifestum de omnibus figuris, datâ specie super AF, BF descriptis.

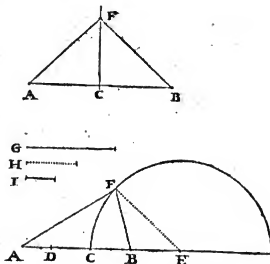
In 1mam Propositionem.

II PROBLEMA.

A datis duobus punctis A, B duas rectas lineas inflectere AF, BF, datam inter se rationem habentes, AC ad CB.

Constructio 1mi casus.

Primò sit AC æqualis CB, ductâque CF ipsi AB perpendiculari, agantur ex A & B ad quodlibet in ea punctum F rectæ AF, BF:



eritque AF æqualis BF. Cujus demonstratio manifesta est ex 4ta 1mi Elementorum.

Con-

Constructio 2^di casus.

Esto jam A C major quàm C B, lineâ AD; fiatque ut A D ad D C, ita CB ad B E. Tum ex E intervallo C E descripto circulo, eductisque ex A & B ad aliquod in circumferentia punctum F duabus rectis: erit AF ad FB, ut A C ad CB.

Demonstratio 2^di casus.

Junctâ F E, quoniam per constructionem A D est ad D C, ut C B ad B E, hoc est, componendo [a] A C ad C D vel C B, ut C E ad E B: erit quoque per 12.5. AE ad CE, hoc est, EF, sicut CE vel EF ad EB. Hinc cum $\triangle^{num}$ A E F, FEB, communem habentium angulum E, latera circa ipsum proportionalia sint: erunt quoque [b] reliqua latera A F, F B ad se invicem, ut A E ad E F, vel E F, hoc est, C E, ad E B. Sed ut CE ad EB, ita est AC ad CB. Quapropter erit ut A F ad F B, ita A C ad C B. Quod erat faciendum. Idem similiter intelligendum de quolibet puncto F in circumferentia assumpto.

a ꝑ 18. libr. 5. Elem.

b ꝑ 6. libr. 6. Elem.

Quod ipsum aliter quoque demonstratum reperitur ab Eutocio in principio Commentariorum suorum in Apollonii Conica.

NOTA.

Hinc quoque dimanat constructio sequentis Problematis, ejusdem fermè cum præcedente argumenti.

Adhuc in 1^mam Propositionem.

III *PROBLEMA.*

A datis duobus punctis A, B duas rectas lineas inflectere AF, BF, ut, quæ ab ipsis fiunt, datam inter se habeant rationem G ad I.

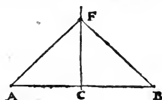
Primò, si G sit æqualis I, agatur, ut ante, ex C, medio ipsius AB ad ipsam perpendicularis C F: ductisque ex A & B ad aliquod in ea punctum F rectis AF, BF, erunt, propter harum æqualitatem, etiam

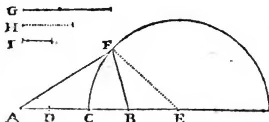
 quæ

quæ ab ipsis fiunt quadrata sibi invicem æqualia, cadetque punctum F, ut in 1mo casu præcedentis Problematis, in rectam CF.

a p 13. libr. 6. Elem.
b p 10. libr. 6. Elem.

Sin autem G major sit quàm I, inventâ [a] inter G & I mediâ proportionali H, secetur AB in C [b], ita ut AC sit ad CB, sicut G ad H:





c p 22. libr. 6 Elem.
d p Cor. 20. libr. 6. Elem.

eritque, si fiat, ut ante, AF ad FB, sicut AC ad CB, [c] ut □tum ex AF ad □tum ex FB, sic □tum ex AC ad □tum ex CB, vel □tum ex G ad □tum ex H, id est [d], sicut G ad I. Quod erat faciendum. Idem similiter liquet de quolibet puncto F, in circumferentia assumpto.

Eodem modo patet: si à duobus punctis duæ rectæ lineæ inflectantur, habeantque figuræ, datâ specie super ipsis descriptæ, datam inter se rationem, punctum quæsitum contingere rectam lineam aut circuli circumferentiam.

Hinc:

Conclusio 1mæ Propositionis.

Si à datis duobus punctis duæ rectæ lineæ inflectantur, ut illorum, quæ ab ipsis fiunt, differentia sit æqualis dato spatio, punctum inflexionis continget rectam lineam positione datam. At verò rectam lineam aut circuli circumferentiam, si inflexæ, vel quæ ab ipsis fiunt, datam inter se habeant rationem.

Quod erat demonstrandum.

In

In 2^dam Propositionem.

IV *PROBLEMA.*

A dato puncto A in positione data recta linea A D rectam lineam terminatam ducere AC, ita ut, si ab ejus termino C ad positione datam A D ducatur alia C D ipsi æqualis, id quod ab ea fit æquale sit rectangulo sub data A B, & alia E D, quæ ad datum punctum E in positione data AD à ducta C D abscinditur.

Constructio.

Inventâ mediâ proportionali B F inter E B & B A, describatur ex B intervallo B F circulus C F, ductâque ex A ad aliquod in circumfe-

1^ma *figura.*

rentia punctum C rectâ A C, & ex C rectâ C D æquali C A : erit □^tum ex CD æquale ▭^lo sub A B, E D.

Demonstratio.

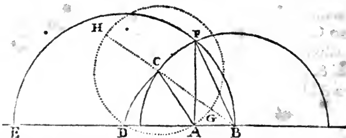
Descripto enim ex C intervallo C D vel C A circulo A G D H, juncta C B occurrat producta circumferentiæ in G & H, eritque in 1^ma fig., cum G H sic bifariam sit secta in C, & non bifariam in B, ^a ▭ GBH, sub inæqualibus segmentis, unà cum □^to ex B C vel B F, ^a *a 5. libr. 2. Elem.*

in-

intermedia sectionis, æquale □^{to} dimidiæ G C, hoc est, C D. Est autem [b] ▭ G B H æquale ▭^{lo} A B D, & □^{tum} ex B F æquale ▭^{lo} A B E. Æquale igitur est □^{tum} ex C D duobus ▭^{lis} A B D & ABE, hoc est, [d] æquale ▭^{lo} sub tota ED & data AB.

b p 35. libr. 3. Elem.
c p Cor. 8. Sexti, & 17. lib.6. Elem.
d p 1. libr. 2. Elem.

2da *figura.*

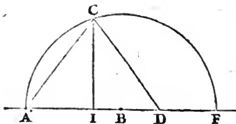


Assumpto autem puncto C ad alteram partem perpendicularis A F, ut in 2da fig. quoniam sic G H bifariam secatur in C, eidemque in directum adjungitur G B: erit [e] ▭ H B G, sub tota H B & adjuncta BG, unà cum □^{to} dimidiæ CG, hoc est, CD, æquale □^{to} ex C B vel B F, dimidia scilicet & adjuncta. Est autem [f] ▭ H B G æquale ▭^{lo} D B A, & □^{tum} ex B F [g] æquale ▭^{lo} E B A. Æquale igitur est ▭ EBA ipsi ▭^{lo} DBA, unà cum □^{to} ex CD. Unde dempto utrinque ▭^{lo} DBA, erit ▭ EBA minus ▭^{lo} DBA, hoc est, ▭^{lum} sub differentia ED & data AB, æquale □^{to} ex CD.

e p 6. lib. 2. Elem.
f p Cor. 36. libr. 3. Elem.
g p Cor. 8. & 17. libr. 6. Elem.

Porrò C cadente in F, hoc est, A C super A F, vel A C congruente cum C D; cum, ut ante, □^{tum} ex B F æquale sit ▭^{lo} EBA; & □^{tum} ex BF [h] æquale duobus □^{tis} ex F A & A B; sed ▭ E B A [i] æquale ▭^{lo} E A B unà cum □^{to} ex A B: sequitur, ablato communi □^{to} ex A B, □^{tum} ex F A æquale fore ▭^{lo} E A B, contento sub abscissa E A & data A B. A dato ergo puncto A in positione data recta linea &c. Quod erat faciendum.

h p 47. libr. 1. Elem.
i p 3. libr. 2. Elem.



Eodem modo, si ex A sit ducenda recta A C, & ex ejus termino C alia C D ipsi æqualis; ita ut □^{tum} ab ea descriptum sit æquale ▭^{lo} sub data A B & linea A D, quæ à ducta C D ad punctum A abscin-

inditur: oportet tantùm ex B intervallo B A describere circulum ACF, & ex A ad aliquod in circumferentia punctum C ducere rectam A C, tum C D eidem æqualem, eritque □tum quod ab ipsa describitur æquale ▭lo sub data A B & abscissa A D. Quod manifestum est demittendo ex C super AB perpendicularem C I.

Est enim k □tum ex A C vel C D æquale ▭lo F A I vel B A D, ut requirebatur. Id quod similiter de quolibet in circumferentia puncto est intelligendum.

k 8 Cor. 8. Sexti ut & 17. Sexti Elem.

Aliud in 2dam Propositionem.

V *PROBLEMA.*

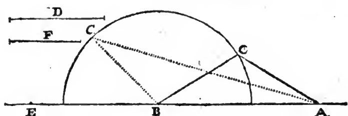
A dato puncto A in positione data recta linea A B rectam lineam ducere AC, ita ut, si ab ejus termino C ad positione datam AD ducatur alia recta CB datæ D æqualis, quadratum, quod ab hac C B describitur, sit æquale rectangulo sub data F, & alia EB, quæ ad datum punctum E in positione data A B à ducta CB abscinditur.

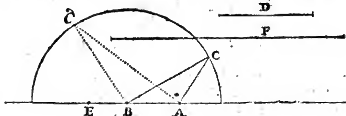
Constructio.

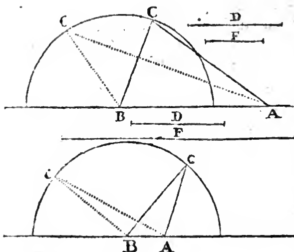
Fiat ut F ad D, ita D ad E B, & ex B intervallo D describatur circulus. Tum ex A ductâ ad aliquod in circumferentia punctum C rectâ A C, & à C ad B rectâ C B: erit □tum quod ab ipsa describitur æquale ▭lo contento sub data F & abscissa E B.

Quod erat faciendum.

Idem liquet de quolibet puncto C in circumferentia assumpto.







Ad eundem modum, si ex A sit ducenda recta AC, & ex C alia CB datæ D æqualis, cujus □tum sit æquale ▭lo sub data F & linea AB, quæ ad punctum A à ducta CB abscinditur, fiat rursus ut F ad D, ita D ad AB; descriptoque ex B, ut ante, circulo intervallo D, & ex A ductâ ad aliquod in circumferentia punctum rectâ AC, tum CB: erit ipsa datæ D æqualis, & □tum ab ea descriptum [a] æquale ▭lo contento sub lineis F & AB, ut requirebatur. Quod similiter de quolibet in circumferentia puncto est intelligendum.

[a] p 17. libr. 6. Elem.

Ad-

Adhuc aliud in 2^dam Propositionem.

VI PROBLEMA.

A dato puncto A in positione data recta linea A D rectam ducere lineam A C, ita, ut, si ab ejus termino C ad positione datam A D ducatur alia C D in dato angulo E, quadratum à primò ducta A C descriptum sit æquale rectangulo sub data AB & alia A D, quæ ad datum punctum A in positione data AD ab ultimò ducta CD abscinditur.

Constructio.

Descripto super A B per 33. 3^tii Elem., vel per 2 Probl. 1^mi hujus segmento circuli ACB, quod capiat angulum A C B æqualem dato E; ductâque ex A ad aliquod in circumferentia punctum C rectâ A C, & ex C rectâ C D in dato angulo E: erit □^tum ex A C æquale ▭^lo B A D, contento sub data A B & abscissa A D.

Demonstratio.

Junctâ C B, cum angulus C A D utrique △^lo A C B, A D C sit communis, & anguli ad C & D sint æquales: erit 3^tius quoque 3^tio [a] æqualis, ac proinde [b] BA ad A C, sicut A C ad A D: adeoque ▭^lum sub extremis B A, A D [c] æquale □^to mediæ A C. Quod erat faciendum. Idem similiter constat de quolibet puncto C in circumferentia circuli A C B C assumpto.

[a] p. Cor. 32. libr. 1. Elem.
[b] p. 4. libr. 6. Elem.
[c] p. 17. libr. 6. Elem.

Eodem fermè modo solvitur sequens.

VII PROBLEMA.

A dato puncto A in positione data recta linea A D rectam lineam terminatam ducere A C, ita, ut, si ab ejus termino C ad positione datam A D ducatur alia recta C D in dato angulo E, quadratum primò ductæ A C æquale sit rectangulo sub data A B & alia F D, quæ ad datum punctum F in positione data A D ab ultimò ducta C D abscinditur.

Constructio.

a p 33. libr. 3. Elem, vel 2 Probl. 1mi hujus.

Descripto, ut ante, super A B [a] segmento circuli A G B, quod capiat angulum dato angulo E æqualem, inventâque inter F A, A B mediâ proportionali A H; ponatur ipsa ut in A contingat circulum A G B, hoc est, perpendicularis ad A I, quæ ab A ducitur ad ejusdem

centrum I; descriptoque ex I per punctum H circulo H L K C, & ex A ad aliquod in ejus circumferentia punctum C ductâ rectâ A C, tum ex C rectâ C D in dato angulo E: erit □tum ex A C æquale ▭lo sub data A B & abscissa F D.

De-

Demonstratio.

Productis H A, C A donec circumferentiæ occurrant in K & L, demissâque ex I super A G perpendiculari I M, jungatur GB. Quoniam itaque angulus C A D utrique △^lo AGB, ADC communis est, & angulus ad G æqualis angulo ad D, erit quoque 3^tius 3^tio æqualis [b], ac proinde [c] BA ad AG, sicut AC ad AD,& per consequens [d] ▭^lum sub extremis B A, A D æquale ▭^lo sub mediis C A, A G. Porrò cum I M sit perpendicularis ad AG, erit AM [e] æqualis MG, ut & LM æqualis M C, quibus à se invicem subductis, erit quoque L A æqualis G C. Eodem modo, cum I A per constructionem sit perpendicularis ad HK, erit quoque HA æqualis AK. Hinc cum ▭ CAL, hoc est, A C G [f], sit æquale ▭^lo K A H, hoc est, □^to ex A H; & hoc sit æquale ▭^lo F A B [g]: erit etiam ▭ ACG æquale ▭^lo F A B. Est autem ▭ C A G æquale ostensum ▭^lo B A D. Quare cum [h] duo ▭^la C A G, A C G simul sumpta sint æqualia □^to ex A C; itemque duo ▭^la BAD, FAB [i] simul sumpta æqualia ▭^lo sub A B, F D: erit □^tum ex AC æquale ▭^lo sub AB, FD. Quod erat faciendum. Idem similiter patet de quolibet puncto c in circumferentia HLKC assumpto.

b p Cor 32. libr.1.Elem.
c p 4. libr.6. Elem.
d p 16. libr. 6. Elem.
e p 3. libr. 3. Elem.
f p 35. libr. 3. Elem.
g p Constr. & 17. libr. 6. Elem.
h p 2. libr.2. Elem.
i p 1. libr.2. Elem.

His adjunge sequens.

VIII *PROBLEMA.*

A dato puncto A extra positione datam rectam lineam NP rectam lineam terminatam ducere A C, ita ut, si ab ejus termino C ad positione datam NP alia ducatur recta C P in dato angulo E, quadratum primò ductæ A C sit æquale rectangulo sub data AB & alia NP, quæ ad datum punctum N in positione data NP ab ultimò ducta CP abscinditur.

Constructio.

Etenim ductâ per A rectâ FD parallelâ NP, in eaque assumptâ AB æquali datæ, agatur ex N recta N F in dato angulo E, donec occurrat ipsi FD in F: eritque, operando ulteriùs ut in præcedenti Probl., $\square^{um}$ ex A C æquale $\square^{lo}$ sub AB & FD, hoc est, NP, ut requirebatur. Cujus demonstratio liquet ex præcedenti, & ad quodlibet punctum C in circumferentia assumptum referri potest.

Hinc:

Conclusio 2dæ Propositionis. Si sit positione data recta linea, & è dato in ipsa puncto ducatur recta linea terminata, & ab ejus termino alia ad positione datam, quæ vel eidem vel alii datæ sit æqualis; ita ut, quod ab ipsa fit, sit æquale rectangulo sub data & alia, quæ vel ad datum punctum, vel ad aliud in positione data abscinditur, continget ejus terminus circuli circumferentiam, positione datam.

Quod erat demonstrandum.

Similiter liquet:

Additamentum. Si sit positione data recta linea, & à puncto in vel extra ipsam dato agatur recta linea terminata, ita ut, quod ab ipsa fit sit æquale rectangulo sub data & alia, ad datum punctum in positione data, aliudve in ipsa datum, abscissâ à recta linea, quæ à primæ termino in dato angulo ad positione datam ducitur: continget ejus terminus circumferentiam circuli positione datam.

In

In 3^tiam^ Propositionem.

IX *PROBLEMA.*

A datis duobus punctis A, B duas rectas lineas inflectere AC, BC; ita ut, quod ab una AC efficitur, eo quod fit ab altera BC, sit dato spatio BAE majus, quàm in ratione data AD ad DB.

Constructio.

Inventâ inter ED, DB mediâ proportionali FD, describatur ex D intervallo FD circulus FC; ductisque ex A & B ad aliquod in circumferentia punctum C rectis AC, BC: dico excessum, quo □^tum^ ex AC superat ▭ BAE, esse ad □^tum^ ex BC, sicut AD ad DB.

Praeparatio ad demonstrationem.

Junctâ CD, agatur ex A eidem parallela AG, donec ipsi CB productae occurrat in G. Deinde facto ▭^lo^ CAH aequali ▭^lo^ BAE, ducatur BH; demptoque CAH, hoc est, BAE, à □^to^ ex AC: dico reliquum ▭ ACH ad □^tum^ ex CB esse, sicut AD ad DB.

Demonstratio.

Cum ex hypothesi ▭ CAH sit aequale ▭^lo^ BAE: erunt [a] puncta H, E, B, C in circuli circumferentia. Similiter, cum □^tum^ ex FD vel DC [b] sit aequale ▭^lo^ EDB, continget DC circumferentiam circuli,

a p Cor. 36. libr. 3. Elem.
b p Constr. & 17. libr. 6. Elem.

c p 37. libr. 3. Elem. culi, per 3[a] puncta E, B, C descripti, in C [c]. Hinc, quoniam circulus per 3[a] puncta E, B, C transiens transire quoque est ostensus per 4[tum] punctum H: erit angulus B C D ad contactum [d] æqualis angulo B H C in alterno circuli segmento. Est autem angulus B C D [e] æqualis angulo G. Quocirca æquales etiam inter se sunt anguli B H C & G. Porrò cum angulus B H C simul cum angulo B H A, qui ei est deinceps [f], sit æqualis 2[bus] rectis: erunt similiter anguli A H B & G duobus rectis æquales, ac proinde [g] quadrilaterum A H B G in circulo, atque ideo [h] ▭ ACH æquale ▭[lo] G C B. Demque cum propter similia △[la] A B G, B C D [i] A B sit ad B D, sicut G B ad B C; & componendo [k] A D ad D B, sicut G C ad C B, hoc est [l], assumptâ communi altitudine CB, sicut ▭ GCB ad □[tum] ex CB: erit quoque ut ▭ ACH ad □[tum] ex CB, ita AD ad DB. Quod erat faciendum.

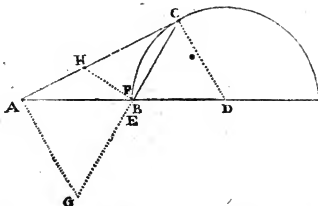
d p 32. libr. 3. Elem.
e p 29. libr. 1. Elem.
f p 13 libr. 1. Elem.
g p Cor. 22. libr. 3 Elem.
h p Cor. 36. libr. 3 Elem.
i p 4. libr. 6. Elem.
k p 18. libr. 5. Elem.
l p 1. libr. 6. Elem.

Idem similiter constat de quolibet puncto C in circumferentia assumpto.

NOTA.

Quamvis constructio hujus Problematis sit universalis, at, puncto E cadente in B, ac proinde etiam F, demonstrationis principium nonnihil sit immutandum: idcirco, ut huic casui respondeat, mutetur illud modo sequenti.

Cum ▭ C A H, ex hypothesi, sit æquale ▭[lo] B A E, hoc est, □[to]



m p 37 libr. 3. Elem. ex AB: continget AB [m] circuli circumferentiam, per 3[a] puncta H, B,

H, B, C transeuntem, in B; eritque [n] angulus CBD ad contactum æqualis angulo BHC, in alterno circuli ſegmento. Hinc, cum [o] angulus CBD ſit æqualis angulo DCB, erunt etiam anguli BHC & DCB inter ſe æquales. Eſt autem angulus BCD æqualis angulo G, &c. *n ꝑ 32. libr. 3. Elem.* *o ꝑ 5 libr. 1. Elem.*

Quod autem hîc demonſtratum eſt de □^tis ſuper AC & CB deſcriptis, intelligendum quoque erit de aliis figuris, datâ ſpecie ſuper ipſas deſcriptis.

Hinc:

Si à datis duobus punctis duæ rectæ lineæ inflectantur, & ſit quod ab una efficitur eo, quod ab altera dato majus quàm in ratione data: punctum inflexionis continget poſitione datam circumferentiam. *Concluſio 3^tiæ Propoſitionis.*

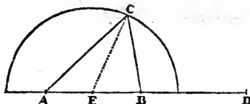
Quod erat demonſtrandum.

In 4^tam Propoſitionem.

X PROBLEMA.

A duobus pluribuſvé datis punctis A, B rectas lineas inflectere AC, BC; ut, quæ ab ipſis fiunt, ſint æqualia dato ſpatio DAB.

Conſtructio.



Sectâ AB bifariam in E, inveniatur inter AE, ED media proportionalis EC; deſcriptoque ex E intervallo EC circulo, ductiſque à punctis A, B ad aliquod in circumferentia punctum C rectis AC, BC: erunt, quæ ab ipſis fiunt □^ta, ſimul ſumpta, æqualia dato ſpatio DAB. *a ꝑ 18. Prop. 2dæ partis, Primi tractatus.*

Demonſtratio.

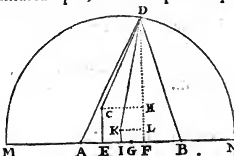
Junctâ EC, erunt [a] bina □^ta ex AC, CB dupla □^rum ex AE, EC ſimul ſumptorum. Eſt autem □^tum ex EC [b] æquale ▭^lo AED, & □^tum ex AE unà cum ▭ AED [c] æquale ▭^lo DAE. Æqualia igitur ſunt bina □^ta ex AC, CB duplo ▭^lo DAE. Hinc, cum ▭ DAB du- *b ꝑ Conſtr. & 17. libr. 6. Elem.* *c ꝑ 3. libr. 2. Elem.*

duplum quoque sit $\square^{li}$ DAE: erunt bina $\square^{ta}$ ex A C, C B æqualia $\square^{lo}$ D A B. Quod erat faciendum.

Idem similiter intelligendum de quolibet puncto C, in circumferentia circuli assumpto.

Sequitur resolutio atque operatio Problematis.

A datis 3^{bus} punctis A, C, & B tres rectas lineas inflectere A D, C D, & B D, ut quæ ab ipsis fiunt quadrata, simul sumpta, sint dato spatio æqualia.



Demissâ ex C super AB perpendiculari CE, secetur A B bifariam in G, ponaturque AG vel GB $\propto a$, EG $\propto b$, & EC $\propto c$. Deinde ad inveniendum punctum D, sit GF $\propto x$, & perpendicularis D F $\propto y$: eritque A F $\propto a + x$, cujus $\square^{to}$ $aa + 2ax + xx$ si addatur $\square^{tum}$ ex D F, fit [d] $aa + 2ax + xx + yy$, $\square^{tum}$ ex AD.

d p 47. libr. 1. Elem.

Eodem modo, cum G B sit $\propto a$, & GF $\propto x$: erit F B $\propto a - x$, cujus $\square^{to}$ $aa - 2ax + xx$ si addatur $\square^{tum}$ ex D F $\propto yy$, fit $aa - 2ax + xx + yy$, $\square^{tum}$ ex D B.

Similiter addendo bina $\square^{ta}$ ex C H, H D, ut $bb + 2bx + xx$ & $yy - 2cy + cc$, erit summa $bb + 2bx + xx + yy - 2cy + cc$, $\square^{tum}$ ex C D.

Hinc, additis 3^{bus} $\square^{tis}$ ex AD, CD, & BD, erit aggregatum $2aa + bb + cc + 2bx - 2cy + 3xx + 3yy$ æquale dato spatio, quod sit $2aa + 2bb + 2cc + \frac{4}{3}dd$. Quæ æquatio, ad simplicissimam formam reducta, erit

$$yy \propto + \tfrac{2}{3}cy + \tfrac{1}{3}bb$$
$$+ \tfrac{1}{3}cc$$
$$+ \tfrac{4}{9}dd$$
$$- \tfrac{2}{3}bx$$
$$- xx.$$

Ad quam solvendam cum nulla in Problemate supersit materia perveniendi ad æquationem pro x: argumentum est, Problema propositum non esse penitus determinatum, sed infinita esse puncta, ut D, quæsito satisfacientia. Quæ igitur omnia inveniuntur, subinde su-

ſumendo ad arbitrium aliam atque aliam lineam pro x. Quocirca y æquali exiſtente $\frac{1}{3}c + \sqrt{\frac{1}{3}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{2}{3}bx - xx}$, cum pro $\frac{1}{3}bb$ poni poſſit $\frac{4}{9}bb - \frac{1}{9}bb$, poterit pro $y \infty \frac{1}{3}c + \sqrt{\frac{1}{3}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{2}{3}bx - xx}$ ſcribi $y \infty \frac{1}{3}c + \sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb - \frac{2}{3}bx - xx}$. Oſtendens longitudinem lineæ D F, prout x indeterminata exiſtit, ac proinde G F ad arbitrium ſumitur.

Atque ita videre eſt, datis quotcunque punctis, ſemper ejuſmodi terminos inveniri; præterquam quòd quidam ex illis interdum abeſſe poſſint, ſignaque $+$ & $-$ diverſimodè mutari. *Conſtructio.*

Ad conſtructionem fiat I G $\infty \frac{1}{3}b$, & ex I erectâ ſuper A B perpendiculari I K $\infty \frac{2}{3}c$, deſcribatur centro K intervallo $\sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd}$ circulus M D N, & quodlibet in circumferentia punctum D quæſito ſatisfaciet. *Demonſtratio.* Quod manifeſtum eſt ſumendo KD $\infty \sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd}$, & K L, hoc eſt, I F $\infty \frac{1}{3}b + x$: nimirum, æqualem radici ex $\frac{1}{9}bb + \frac{2}{3}bx + xx$. quæ etiam eſſe poteſt $\frac{1}{3}b = x$, quando perpendicularis D F cadit inter G & I, vel extra I, quemadmodum illam hîc inter G & B ſumpſimus. Unde L D fit $\sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb - \frac{2}{3}bx - xx}$, vel etiam $\sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb + \frac{2}{3}bx - xx}$, & DF $\infty \frac{1}{3}c + \sqrt{\frac{1}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb - \frac{2}{3}bx - xx}$. qualem illam hîc invenimus, vel etiam $\infty \frac{1}{3}c + \sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb + \frac{2}{3}bx - xx}$. nimirum, ſi $\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}dd + \frac{1}{3}cc$ eſt majus quàm $\frac{1}{9}bb + \frac{2}{3}bx + xx$, vel $\frac{1}{9}bb - \frac{2}{3}bx + xx$.

$=$ ſignificat differentiã inter $\frac{1}{3}b$ & x, cum non exprimitur aut cognoſcitur penes quas ſit exceſſus.

Quæ etiam eſſe poteſt $\frac{1}{3}c - \sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb - \frac{2}{3}bx - xx}$, vel $\frac{1}{3}c - \sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb + \frac{2}{3}bx - xx}$. nimirum, quando $\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}dd + \frac{1}{3}cc$ eſt minus quàm $\frac{1}{9}bb + \frac{2}{3}bx + xx$, vel $\frac{1}{9}bb - \frac{2}{3}bx + xx$.

Porrò notandum, pro dato ſpatio ſumi potuiſſe $2aa + {}^{2}bb + {}^{2}cc - \frac{4}{3}dd$, nimirum, minus duobus □^tis ex A C, CB: ſicut hoc loco illud majus aſſumpſimus, ſine reliqui immutatione.

Id quod oſtendit, quo pacto à datis tribus vel pluribus punctis ad unum punctum rectæ lineæ duci poſſint, quarum □^ta, ſimul ſumpta, ſint dato ſpatio æqualia. Quod erat faciendum.

Denique cum in 4^ta Propoſitione in genere fiat ſermo de figuris datâ ſpecie ſuper ductas deſcriptis: id, quod hîc ſpeciatim de □^tis oſtendimus, aliis quoque figuris datæ ſpeciei applicare licebit.

 Quo-

Quoniam enim per 49 Prop^nem Datorum Euclidis, si ab eadem recta duo rectilinea quælibet datâ specie describantur, ipsa ad invicem rationem habent datam: sequitur, si rationem □^ti ex A D ad figuram datâ specie super A D descriptam ponamus ut e ad f; eamque □^ti ex C D ad datâ specie figuram super C D ut e ad g; & denique rationem □^ti ex B D ad figuram specie datam super B D ut e ad h; summam harum trium figurarum fore $\frac{aaf + 2afx + fxx + fyy, + bbg + 2bgx + gxx + gyy - 2cgy + ccg, + aah - 2ahx + hxx + hyy.}{e}$

Hinc si datum planum supponamus esse dd, æquatio ad legitimam formam reducta, erit $yy \propto + \frac{2cgy}{f+g+h} + \frac{dde - aaf - bbg - ccg - aah}{f+g+h}$
$$\frac{-2afx - 2bgx + 2ahx}{f+g+h}$$
$$- xx.$$

℞ significat + vel —.

Vel in simplicioribus terminis: $yy \propto + 2iy + kk$
$$℞\ 2lx$$
$$- xx.$$

Hoc est, scribendo $2i$ pro $\frac{2cg}{f+g+h}$, & kk pro $\frac{dde - aaf - bbg - ccg - aah}{f+g+h}$, & + vel − $2l$ pro $\frac{-2af - 2bg + 2ah}{f+g+h}$. Datis enim omnibus hisce quantitatibus, licebit iis ad arbitrium nomina imponere. Quocirca cum hæc æquatio non sit diversæ formæ à præcedente, continget punctum D, ut ante, circumferentiam circuli positione datam. Idem similiter liquet de quotcunque punctis.

Conclusio 4^tæ Propositionis.

Hinc:

Si à quotcunque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectæ lineæ, & sint species, quæ ab omnibus fiunt, dato spatio æquales: continget punctum positione datam circumferentiam.

Quod erat demonstrandum.

In

In 5^tam Propositionem.

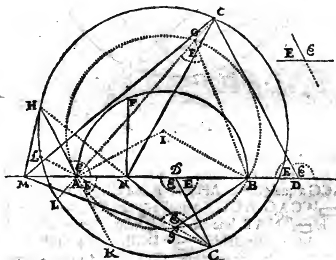
XI PROBLEMA.

A datis duobus punctis M, N in positione data recta linea AD duas rectas lineas inflectere M C, N C; Ita ut, si à puncto inflexionis C ducatur recta C D in dato angulo E ad positione datam A D, quadrata ab inflexis M C, N C æqualia sint rectangulo sub data 2 A B, & alia M D, quæ ad alterutrum datorum punctorum M, vel aliud quodpiam in positione data A D ab ultimò ducta C D abscinditur.

Constructio.

Sectâ M N bifariam in A, describatur super A B, dimidiâ datæ rectæ, [a] segmentum circuli A G B, capiens angulum dato angulo E

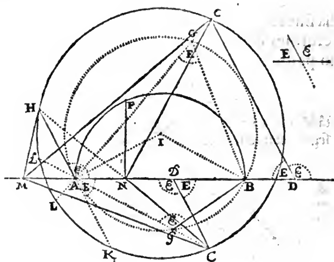
a p 33. libr. 3. Elem. vel per 2 Probl. 1mi hujus.



æqualem: inventâque inter A N, N B mediâ proportionali N F, eâque positâ ab A ad H, (hoc est, in linea A H, quæ cum M A angulum

 facit

facit dato angulo E æqualem) deſcribatur ex I centro circuli A G B per H circulus H C K L: Dico, ſi à punctis M, N ad aliquod in circumferentia punctum C ducantur rectæ MC, NC, tum recta C D ipſi A H parallela, hoc eſt, in dato angulo E, quòd □ᵗᵃ ipſarum M C, N C ſimul ſumpta ſint æqualia ▭ˡᵒ contento ſub data 2 A B & abſciſſa M D.



Demonſtratio.

Junctâ A C, ſecante circulum A G B in G, ducatur G B: eritque ut in 7ᵐᵒ Problemate hujus, ▭ C A G æquale ▭ˡᵒ D A B, & ▭ A C G æquale □ᵗᵒ ex A H vel N F, hoc eſt, ▭ A N B. Sunt autem
b p 2. libr. 2. Elem. bina ▭ˡᵃ C A G, A C G ᵇ æqualia □ᵗᵒ ex A C; itemque ▭ A N B
c p 3. libr. 2. Elem. ᶜ æquale ▭ˡᵒ N A B, hoc eſt, M A B minus □ᵗᵒ ex A N. Quocirca □ᵗᵘᵐ ex A C æquale eſt binis ▭ˡⁱˢ D A B, M A B, minus □ᵗᵒ ex A N,
d p 1. libr. 2. Elem. hoc eſt, ᵈ æquale erit ▭ˡᵒ ſub M D & A B, dempto eidem □ᵗᵒ ex A N. Atque adeò □ᵗᵘᵐ ex A C minus eſt ▭ˡᵒ ſub M D, A B quadrato ex A N; hoc eſt, erit illud unà cum □ᵗᵒ ex A N æquale ▭ˡᵒ ſub
e p 18 Prop. 2dæ partis 1ᵐⁱ tractat. M D, A B. Hinc cum ᵉ bina □ᵗᵃ ex M C, C N ſint binorum □ᵗᵒʳᵘᵐ ex C A, A N dupla: erunt □ ex M C, C N ſimul ſumpta æqualia duplo ▭ˡᵒ

▭lo sub MD, AB, hoc est, æquale ▭lo sub MD & 2 AB. Quod erat faciendum.

Idem similiter liquet de quolibet puncto C in circumferentia circuli HCKL assumpto.

Eodem modo invenitur punctum C, cùm bina □ta ex MC, NC æqualia requiruntur ▭lo sub data 2AB & linea ND, quæ à ducta CD ad alterum datum punctum N abscinditur. Quo casu manente eâdem figurâ punctum C cadet in circumferentiam minoris segmenti, prout illâ inversâ tantùm litera M in N, & N in M transmutatæ fuerint, ad quæsitum obtinendum.

NOTA.

Nota. In hac figura lineam NH omissam esse.

Quod attinet ad demonstrationem puncti H, illa sic absolvitur: Ductis duabus lineis MH, NH, quoniam □tum ex HA æquale est ▭lo ANB: erunt, addendo utrique □tum ex AN, bina □ta ex HA, AN [f] æqualia ▭lo BAN seu BAM. Unde, cum [g] bina □ta ex MH, HN dupla sint binorum □torum ex HA, AN, erunt ipsa æqualia duplo ▭lo

f p 3. libr. 2. Elem.

g p 18 Prop. 2dæ partis, 1mi tractat.

▭lo B A M, hoc eſt, æqualia ▭lo ſub data 2 A B & recta A M, quæ à ducta A H ad datum punctum M in poſitione data A B abſcinditur. ut requirebatur.

Sequitur Conſtructio & Demonſtratio, cùm bina □ta ex M C, C N æqualia requiruntur ▭lo ſub data 2 A B & recta O D, quæ ad aliud quodpiam datum punctum, ut O, in poſitione data A D à ducta C D abſcinditur.

Conſtructio.

Invento, ut ante, puncto H, ponatur in linea HI recta PH æqualis rectæ O M, & H Q æqualis A B; inventâque inter ipſas mediâ proportionali H R, & ex I per punctum R deſcripto circulo: Dico, ſi ex duobus punctis M & N ad aliquod in circumferentia punctum C ducantur rectæ M C, N C, □ta quæ ab ipſis fiunt, ſimul ſumpta, eſſe æqualia ▭lo, contento ſub data 2 A B & abſciſſa O D.

Demonſtratio.

Productâ R H ad circumferentiam in V, ut & H A eandem utrinque terminante in punctis S & T: erit, ut in 7mo Problemate hujus, ▭ CAG æquale ▭lo DAB, & ▭ ACG æquale □to ex AS. Hinc, cum bina ▭la CAG, ACG ſint [h] æqualia □to ex A C, erit □tum ex AC æquale ▭lo DAB unà cum □to ex A S. Eſt autem □tum ex A S [i] æquale ▭lo S H T unà cum □to ex A H. Quocirca etiam □tum ex AC æquale erit binis ▭lis DAB, SHT unà cum □to ex AH. Porrò, cum [k] ▭ SHT ſit æquale ▭lo RHV, hoc eſt, □to ex H R, quod [l] æquatur ▭lo PHQ, hoc eſt, ▭lo ſub OM & AB; itemque □tum ex A H, ut ante, æquale ▭lo M A B, dempto eidem □to ex A N: erit □tum ex A C æquale 3bus ▭lis ſub D A, A B, ſub M A, A B, & ſub O M, A B, multatis □to ex AN. Sunt autem 3a ▭la ſub D A, A B, ſub M A, A B, & ſub O M, A B [m] æqualia ▭lo ſub O D & A B. Æquale igitur eſt □tum ex AC ▭lo ſub OD, AB multato □to ex AN: ac proinde □tum ex A C unà cum □to ex A N æquale ▭lo ſub O D, AB. Unde cum [n] bina □ta ex MC, CN ſint dupla □torum ex CA, AN, liquet, illa ſimul ſumpta æqualia eſſe duplo ▭lo ſub O D & A B, hoc eſt, æqualia ▭lo ſub O D & 2 A B. Quod erat faciendum.

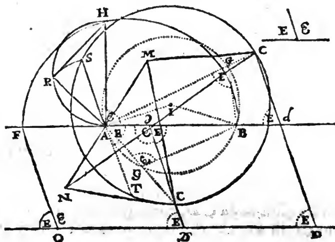
h p 2. libr. 2. Elem.
i p 5. libr. 2. Elem.
k p 35. libr. 3. Elem.
l p Conſtr. & 17. lib. 6. Elem.
m p 1. libr. 2. Elem.
n p 18. Prop. 2dæ partis primi tract.

Idem ſimiliter intelligendum de quolibet puncto C in circumferentia R C T aſſumpto; ut & de aliis figuris datâ ſpecie ſuper M C, N C deſcriptis.

XII

XII PROBLEMA.

A datis duobus punctis M, N extra positione datam rectam lineam O D duas rectas lineas inflectere MC, NC; ita ut, si à puncto inflexionis C agatur recta C D in dato angulo E ad positione datam O D, quæ ab inflexis M C, N C fiunt quadrata, simul sumpta, æqualia sint rectangulo sub data 2 A B & alia O D, quæ ad datum punctum O in positione data OD ab ultimò ducta CD abscinditur.



Constructio.

Junctâ N M, eâque bifariam sectâ in A, agatur F A B parallela O D; sumptâque in ipsa rectâ A B, æquali semissi datæ lineæ, describatur super ea [a] segmentum circuli AGB, capiens angulum æqualem dato E. Deinde ductâ ex O rectâ O F, faciente cum O D angulum æqualem angulo E, inveniatur [b] inter FA, A B media proportionalis A H, & super ipsa describatur semicirculus ARH. In quo si [c] aptetur H R æqualis N A vel A M, jungatur R A. Tum sumptâ A S æquali A R, eâque positâ, ut angulus S A F sit æqualis dato E, describatur ex I centro circuli AGB per S circulus SCT; & ex punctis M, N ad

a p 33. libr. 3. Elem, vel p 2 Probl. 1mi hujus.
b p 13. libr. 6. Elem.
c p 1. libr. 4. Elem.

aliquod in circumferentia punctum C ducantur M C, N C, tum ex C ad O D recta C D, in dato angulo E: eruntque, quæ ab M C, N C, fiunt □ᵗᵃ, simul sumpta, æqualia ▭ˡᵒ, contento sub data 2 A B & abscissa O D.

Demonstratio.

Per 7ᵐᵘᵐ Problema hujus ▭ C A G est æquale ▭ˡᵒ *d* A B, & ▭ A C G æquale □ᵗᵒ ex A S vel A R. Est autem [d] □ᵘᵐ ex A R unà cum □ᵗᵒ ex R H, hoc est, A M æquale □ᵗᵒ ex A H, hoc est, [e] ▭ˡᵒ F A B. Hinc cum [f] bina ▭ˡᵃ C A G, A C G sint æqualia □ᵗᵒ ex A C, & bina ▭ˡᵃ *d* A B, F A B [g] æqualia ▭ˡᵒ sub F *d* & A B, hoc est, sub O D & A B: erit □ᵘᵐ ex A C unà cum □ᵗᵒ ex A M æquale ▭ˡᵒ sub O D & A B. Sed [h] bina □ᵗᵃ ex A C, A M, subdupla sunt □ᵗᵒʳᵘᵐ ex M C, N C. Quocirca bina quadrata ex M C, N C æqualia erunt ▭ˡᵒ sub O D & 2 A B. Quod erat faciendum. Idem similiter liquet de quolibet puncto C in circumferentia S C T assumpto; ut & de aliis figuris, datâ specie super M C, N C descriptis.

His adde duo sequentia Problemata.

d p 31. libr. 3, & 47. libr. 1. Elem.
e p Constr. & 17. libr. 6 Elem.
f p 2. libr. 2. Elem.
g p 1. libr. 2. Elem.
h p 18. Prop. 2dæ partis, 1ᵐⁱ tractat.

XIII *PROBLEMA.*

A datis duobus punctis M, N in positione data recta linea A D duas rectas lineas inflectere M C, N C; ita ut, si à puncto inflexionis C ad positione datam A D in dato angulo E agatur recta C D, eorum, quæ ab inflexis fiunt, differentia, sit æqualis rectangulo sub data 4 A B & alia O D, quæ ad datum punctum O in positione data A D ab ultimò ducta C D abscinditur.

Constructio.

Sectâ M N bifariam in A, statuatur A B æqualis $\frac{1}{4}$ᵗᵃᵉ parti datæ rectæ, ducaturque A H in dato angulo E. Tum ductâ A I perpendiculari super A H, donec occurrat perpendiculari B I in I, jungatur M I. Deinde [a] ad M B, B A, & O A inventâ 4ᵗᵃ proportionali A F, (hoc est, ut M B sit ad B A, sicut O A ad A F) agatur ex F recta infinita F H C, secans M I ad angulos rectos in G. Dico si ab M & N ad aliquod in ea punctum C ducantur M C, N C, tum C D parallela A H, hoc est, in dato angulo E, differentiam □ᵗᵒʳᵘᵐ ex M C, N C esse æqualem ▭ˡᵒ sub 4 A B & O D.

a p 12. libr. 6. Elem.

De-

Demonstratio puncti H, in quo FC secatur ab AH.

Demissâ ex H super A D perpendiculari H K, cum angulus KFH utrique $\triangle^{lo}$ KHF & MGF sit communis, ipsorumque anguli ad K & G sint recti : erit 3^{tius} quoque K H F 3^{tio} G M F [b] æqualis. Eodem modo $\triangle$ MBI æquiangulum erit $\triangle^{lo}$ MGF, ideoque $\triangle$ KHF æqui- *b p Cor.32. libr.1.Elem.*

angulum $\triangle^{lo}$ MBI. Unde erit [c] ut MB ad BI, ita H K ad K F. Rursus, cum [d] externus angulus K A I sit æqualis 2^{bus} internis & oppositis A B I & A I B; & anguli H A I, ABI, per constructionem, sint recti: erit angulus K A H æqualis angulo A I B, ac per consequens angulus KHA æqualis angulo BAI. Unde erit [e] ut BI ad AB, ita K A ad HK. Quocirca cum M B, B I, & A B sint 3 magnitudines, & K A, H K, & K F 3 aliæ, quarum, binis in eadem ratione sumptis, proportio sit perturbata : erit quoque ex æquo [f] ut MB ad B A, sic A K ad KF. Et per conversionem rationis [g] MB ad M A, sicut A K ad AF. [h] Æquale igitur est ▭^{lum} sub MB & A F ▭^{lo} sub MA & A K. Hinc cum per constructionem MB sit ad BA, sicut OA ad AF; & idcirco ▭^{lum} sub MB & A F etiam [i] æquale ▭^{lo} sub B A & AO : erit similiter ▭^{lum} sub MA & AK, æquale ▭^{lo} sub BA & A O. Est autem duplum ▭^{lum} sub

c p 4.libr.6. Elem.
d p 32.libr.1. Elem.
e p 4.libr.6. Elem.
f p 23. libr. 5.Elem.
g p Cor. 19. libr.5.Elem.
h p 16. libr. 6. Elem.
i p 16. libr. 6. Elem.

k p 18. Prop. 2dæ partis, 1mi tractat. ſub M N & AK, hoc eſt, quadruplum ▭lum ſub M A & AK [k] æquale differentiæ □torum ex NH, MH. Quocirca etiam quadruplum ▭lum ſub B A & A O, hoc eſt, ▭lum ſub data 4B A & abſciſſa A O eidem differentiæ □torum ex NH & MH æquale erit. Ut requirebatur.

Demonſtratio puncti C, ubicunque in linea FGC aſſumpti.

l p 2. libr. 6. Elem. m p 11. libr. 5. Elem. n p 16. libr. 5. Elem. o p 17. libr. 5. Elem. p p 11. libr. 5. Elem. q p 16. libr. 6. Elem. r p 18. Prop. 2dæ partis, 1mi tractat.

Demiſſâ ex C ſuper AD perpendiculari CL, cum [l] L K ad K F ſit, ſicut C H ad H F; itemque D A ad A F, ſicut C H ad H F: erit etiam [m] LK ad KF, ſicut DA ad AF. Et permutando [n] LK ad AD, ſicut KF ad FA. Eſt autem MB ad MA, ut AK ad AF, hoc eſt, dividendo [o] BA ad AM, ut KF ad FA. Quocirca erit [p] ut LK ad AD, ita BA ad AM: ac proinde [q] ▭lum ſub L K & M A æquale ▭lo ſub AD & AB. Eſt autem ▭lum ſub K A & M A æquale ▭lo ſub O A & A B. Æqualia igitur ſunt bina ▭la ſub L K, M A & ſub K A, M A, hoc eſt, ▭lum ſub tota LA & MA binis ▭lis ſub A D, AB & ſub O A, AB, hoc eſt, ▭lo ſub tota O D & A B. Hinc cum quadruplum ▭lum ſub L A, M A vel duplum ▭lum ſub L A, M N ſit æquale [r] differentiæ □torum ex NC, MC: erit ſimiliter quadruplum ▭lum ſub OD, AB, vel ſub OD & 4AB æquale eidem differentiæ. Quod erat faciendum.

Idem ſimiliter liquet de quolibet puncto C in recta F G C aſſumpto; ut & de aliis figuris, datâ ſpecie, ſuper MC, NC deſcriptis.

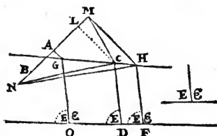
Eodem modo operandum, ſi differentia □torum ex NC, MC æqualis requiratur ▭lo ſub data 4AB & recta MD, quæ ad alterutrum datorum punctorum, ut M, à recta CD abſcinditur. nimirum ſi punctum O tantùm coïncidere fingatur puncto M, ſine ulla conſtructionis aut demonſtrationis immutatione.

XIV PROBLEMA.

A datis duobus punctis M, N extra poſitione datam rectam lineam OD duas rectas lineas inflectere MC, NC; ita ut, ſi à puncto inflexionis C agatur recta C D in dato angulo E ad poſitione datam OD, eorum, quæ ab inflexis fiunt MC, NC, differentia ſit æqualis rectangulo ſub data 4A B & alia O D, quæ ad datum punctum O in poſitione data OD ab ultimò ducta CD abſcinditur.

Con-

Constructio.



Juncta N M secetur, ut ante, bifariam in A; sumptâque A B æquali $\frac{1}{4}$^{ta} parti datæ rectæ, inveniatur ad B A, A M 3^{tia} proportionalis O F, ducanturque O G, F H in dato angulo E, occurrentes perpendicularibus A G, M H in G & H. Per quæ si agatur recta linea infinita, & ex punctis N, M ad aliquod in ipsa punctum C, extra G, ducantur N C, M C; tum C D parallela O G vel F H, hoc est, in dato angulo E: erit differentia □^{torum} ex N C, M C æqualis ▭^{lo} sub data 4 A B & abscissa O D.

Demonstratio puncti H.

Junctâ N H, quoniam □^{tum} ex N H [a] excedit □^{tum} ex M H quadrato ex N M, hoc est, 4^{plo} □^{to} ex N A vel A M: sequitur, cum per constructionem B A ad A M sit, ut A M ad O F, & idcirco ▭^{lum} sub B A, O F sit æquale □^{to} ex A M, quòd 4^{plum} ▭^{lum} sub B A, O F, hoc est, ▭^{lum} sub 4 B A & O F, sit æquale 4^{plo} □^{to} rectæ A M, seu differentiæ □^{torum} ex N H, M H. Ut requirebatur. a p 47. lib. 1. Elem. b p 17. libr. 6. Elem.

Demonstratio puncti C.

Demissâ C L perpendiculari super N M, cum [c] □^{tum} ex N C majus sit □^{to} ex M C duplo ▭^{lo} sub N M & A L, hoc est, duplo ▭^{lo} sub A M & A L; & B A sit ad A M, sicut A M ad O F, vel A L ad O D, & idcirco [d] ▭^{lum} sub B A, O D æquetur ▭^{lo} sub A M, A L: sequitur quadruplum ▭^{lum} sub B A, O D, hoc est, ▭^{lum} sub 4 B A & O D esse æquale quadruplo ▭^{lo} sub A M & A L seu differentiæ □^{torum} ex N C, M C. Quod erat faciendum. c p Cor. 4. Prop. 6. 2^{dæ} partis, 1^{mi} tractat. d p 16. libr. 6. Elem.

Idem similiter liquet de quolibet puncto C in recta G C H extra G assumpto; ut & de aliis figuris datâ specie super N C, M C descriptis.

Hinc:

Conclusio 5tæ Propositionis. Si sit positione data recta linea, & à duobus punctis in vel extra ipsam datis duæ rectæ lineæ inflectantur, & à puncto inflexionis ad positione datam in dato angulo recta agatur linea, quæ ad alterutrum datorum punctorum vel aliud quodpiam in ipsa datum abscindat rectam lineam, comprehendentem cum alia data rectangulum æquale iis, quæ datâ specie ab inflexis fiunt: punctum inflexionis continget circumferentiam circuli positione datam. At verò rectam lineam, si differentia earundem specierum sit dicto rectangulo æqualis.

Quod erat demonstrandum.

His adde duo sequentia Problemata.

XV *PROBLEMA.*

A terminis A & B datæ rectæ lineæ A B duas rectas lineas inflectere A G, B G; ut, quæ ab ipsis fiunt, habeant ad triangulum A G B, à data AB & inflexis A G, B G comprehensum, rationem datam R ad S.

Sit A B bifariam secta in E, & ex E super AB erecta perpendicularis EF. Deinde sicut R est ad S, ita sit quadruplum ipsius EF ad EB.

Constructio.

Descripto super EF semicirculo E C F, aptetur in eo E C æqualis E B, & ex F intervallo F C circulus describatur. Quo facto, si ex punctis A, B ad aliquod in circumferentia punctum G ducantur rectæ AG, BG: erunt, quæ ab ipsis fiunt □ta, ad △lum A G B, ut 4 E F ad E B, seu R ad S. Quæ quidem ratio hîc non minor requiritur, quàm quæ est ipsius 4 ad 1.

Præ-

Præparatio ad demonstrationem.

Demissâ ex G super AB perpendiculari GD, junctâque FG, agatur GH parallela AB. Deinde fiat FK æqualis FH, & FI æqualis FE.

Demonstratio.

Quoniam itaque [a] □tum ex FH unà cum □to ex HG æquale est □to ex FG vel FC, hoc autem cum □to ex CE vel EB [b] sit æquale □to ex EF: erunt □ta ex FH, HG, & EB simul sumpta æqualia □to ex EF. Est autem [c] □tum ex EF æquale □to ex FH unà cum ▭ HEK. Quare etiam □ta ex FH, HG, & EB æqualia erunt □to ex FH unà cum ▭ HEK. Unde ablato communi □to ex FH, erunt similiter reliqua □ta ex HG, EB vel AE, ED reliquo ▭lo HEK æqualia. Est autem [d] ▭ HEK vel IHE æquale ▭lo IEH, dempto eidem □to ex EH. Quocirca etiam □ta ex AE, ED æqualia sunt ▭lo IEH, multato □to ex EH. Hinc si utrinque addatur □tum ex EH vel DG: erunt 3a □ta ex AE, ED, & DG, simul sumpta, æqualia ▭lo IEH. Ac proinde quoque eorum dupla, hoc est [e], □ta ex AD, DB, unà cum □to ex DG bis sumpto, æqualia duplo ▭lo IEH, hoc est, ▭lo

a ℘ 47. libr. 1. Elem.
b ℘ 31. libr. 3, & 47. libr. 1. Elem.
c ℘ 6. libr. 2. Elem.
d ℘ 3. libr. 2. Elem.
e ℘ 9. vel 10. libr. 2. Elem.

sub

ſub EF & DG, quater ſumpto. Sunt autem □ᵗᵃ ex AD, DB unà cum □ᵗᵒ ex D G bis ſumpto [f] æqualia □ᵗⁱˢ ex A G, G B. Æqualia igitur ſunt bina □ᵗᵃ ex AG, GB rectangulo ſub EF & DG 4ᵗᵉʳ ſumpto. Sed ut ▭ˡᵘᵐ ſub E F & D G 4ᵗᵉʳ ſumptum eſt ad ▭ˡᵘᵐ ſub E B & D G, hoc eſt, ad △ˡᵘᵐ A G B, ita eſt [g] 4ᵖˡᵃ ipſius E F ad E B. Quare etiam bina □ᵗᵃ ex A G, G B ad △ˡᵘᵐ A G B erunt, ut 4 E F ad E B. Quod erat faciendum.

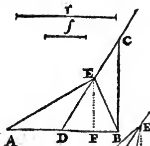
f p 47. libr. 1. Elem.

g p 1. libr. 6. Elem.

Idem ſimiliter liquet de quolibet puncto G, in circuli circumferentia aſſumpto; idemque pariter conſtat de aliis figuris, datâ ſpecie ab inflexis deſcriptis.

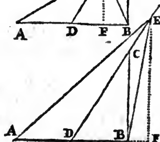
XVI PROBLEMA.

A terminis A & B datæ rectæ lineæ A B duas rectas lineas inflectere A E, BE; ut eorum, quæ ab ipſis fiunt, differentia ad triangulum A E B, à data A B & inflexis A E, BE comprehenſum, datam habeat rationem r ad ſ.



Conſtructio.

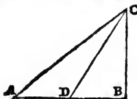
Fiat ut r ad ſ, ita dupla A B ad perpendicularem B C. Deinde ſectâ A B bifariam in D, educatur ex D per C recta linea infinita DEC. Tum ex A & B ductis ad aliquod in ea punctum E rectis A E, BE: dico differentiam □ᵗᵒʳᵘᵐ ex AE, EB ad △ A E B eſſe, ut dupla A B ad BC, ſeu ut r ad ſ.



Demonſtratio puncti C.

Junctâ AC, cum [a] □ᵗᵘᵐ ex A C excedat □ᵗᵘᵐ ex CB quadrato ex A B, id eſt, ▭ˡᵒ ſub dupla AB & DB; hoc autem [b] ad ▭ˡᵘᵐ ſub DB & BC, hoc eſt, ad △ ACB [c] ſit, ſicut dupla A B ad ad BC: patet differentiam □ᵗᵒʳᵘᵐ ex A C, CB ad △ ACB eſſe, ſicut dupla A B ad B C, ſeu ut r ad ſ. uti requirebatur.

a p 47. libr. 1. Elem.
b p 1. libr. 6. Elem.
c p 41. libr. 1. Elem.



De-

Demonstratio puncti E, ubicunque sumpti in linea DCE.

Cum A D sit æqualis D B, & idcirco A F æqualis B D, D F: erit $\square^{tum}$ ex A F [d] æquale $\square^{to}$ ex F B unà cum ▭ B D F quater sumpto, seu, quod idem est, $\square^{tum}$ ex AF majus erit $\square^{to}$ ex F B quadruplo ▭^{lo} B D F, hoc est, ▭^{lo} sub dupla A B & DF. Unde si utrinque addatur $\square^{tum}$ ex FE, erunt bina $\square^{ta}$ ex AF & FE, hoc est [e], $\square^{tum}$ ex AE, majora binis $\square^{tis}$ ex F B & F E, hoc est, [f] $\square^{to}$ ex E B rectangulo sub dupla AB & DF. Sed ut DB est ad BC, ita est [g] D F ad FE; & per consequens ▭^{lum} sub D B & F E, hoc est [h], △ A E B, æquale ▭^{lo} sub B C & D F. Similiter [i] ▭^{lum} sub dupla A B & D F est ad ▭^{lum} sub B C & D F, sicut dupla A B ad B C. Quare etiam excessus quo $\square^{tum}$ ex AE superat $\square^{um}$ ex EB ad △ AEB erit, sicut dupla A B ad B C, seu ut *r* ad *f*. Quod erat faciendum.

[d] p 8. libr. 2. Elem.
[e] p 47. libr. 1. Elem.
[f] p 47. libr. 1. Elem.
[g] p 4. libr. 6. Elem.
[h] p 16 Sexti, & 41. libr. 1. Elem.
[i] p 1. libr. 6. Elem.

Idem similiter liquet de quolibet puncto in linea D E assumpto, atque etiam manifestum est de quibuslibet aliis figuris, datâ specie ab inflexis AE, BE descriptis.

E quibus igitur binis Problematis constat sequens

PROPOSITIO.

Si à terminis datæ rectæ lineæ duæ rectæ lineæ inflectantur; ita ut figuræ datâ specie ab ipsis descriptæ ad triangulum sub data & inflexis comprehensum datam habeant rationem: punctum ad inflexionem continget circumferentiam circuli positione datam. At verò rectam lineam, si differentia earundem figurarum ad dictum triangulum datam habeat rationem.

Quod erat demonstrandum.

In 6tam Propositionem.

XVII *PROBLEMA.*

Extra datum positione circulum CHD punctum invenire G, à quo si per punctum intra circulum datum A recta ducatur linea GHAI, circumferentiam secans in H & I; ut quadratum lineæ AG, inter hæc puncta interceptæ, sit æquale rectangulo IGH, contento sub tota secante IG & exteriùs assumpta GH.

Constructio.

Ductâ per A & centrum B rectâ lineâ, secante circumferentiam in C & D; sumatur EB æqualis BA, fiatque ut EA ad AD, ita AD ad DF. Tum per F ductâ FG ad angulos rectos ipsi CAD: dico, si ex puncto aliquo in ea G per A agatur recta GHAI, circumferentiam secans in H & I; □tum ex AG esse æquale ▭lo IGH.

Demonstratio puncti F.

Cum CB sit æqualis BD, & EB æqualis BA: erit etiam CE æqualis AD. unde & CA æqualis ED. Porrò cum [a] EA sit ad AD, ut AD ad DF, hoc est, componendo [b] ED vel CA ad AD, sicut AF ad FD: erit quoque [c] CF ad FA, sicut AF ad FD: ac proinde [d] □tum ex AF æquale ▭lo CFD. Ut requirebatur.

a p Constructionem.
b p 18. libr. 5. Elem.
c p 12. libr. 5. Elem.
d p 17. libr. 6. Elem.

Demonstratio puncti G.

Demissâ ex B super IG perpendiculari BK, secabit ipsa [e] rectam IH bifariam in K. Hinc si LK, ut supra, sumatur æqualis KA, erit similiter IL æqualis HA. Deinde cum [f] propter similitudinem △lorum ABK, AGF, BA sit ad AG, sicut KA ad AF; & idcirco EA ad AG,

e p 3. libr. 3. Elem.
f p 4. libr. 6. Elem.

A G, ſicut L A ad A F: erit g ▭ E A F æquale ▭lo L A G. Sed per g p 16. libr.
conſtructionem E A eſt ad A D, ſicut A D ad D F, hoc eſt, per 12. 5ti 6 Elem.
Elem., E A ad A D, ſicut E D, hoc eſt, C A, ad A F; ac proinde h h p 16. libr.
▭ E A F æquale ▭lo C A D, hoc eſt i, ▭lo I A H. Quocirca cum 6. Elem.
▭ E A F ſit æquale oſtenſum ▭lo L A G, idemque ſimiliter ſit æqua- i p 35. libr.
le ▭lo I A H: erunt etiam ▭la L A G & I A H inter ſe æqualia. Unde 3. Elem.
erit k ut A G ad A H, ita I A ad A L; & dividendo l G H ad H A, ſicut k p 16. libr.
I L, hoc eſt, H A, ad A L. Cum igitur G H, H A, & A L ſint 3 rectæ 6. Elem.
proportionales, ſicut etiam F D, D A, & A E; illic autem I L ſit l p 17. libr. 5. Elem.
æqualis H A, ſicut hic C E æqualis D A: erit ſimiliter, ut ſupra, □tum
ex A G æquale ▭lo I G H. Quod erat faciendum.

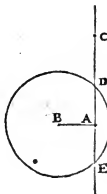
Idem ſimiliter intelligendum de quolibet puncto G in recta F G aſſumpto.

Aliud in 6tam Propoſitionem.

XVIII *PROBLEMA.*

Extra datum poſitione circulum D E invenire punctum C, à quo ſi per punctum intra circulum datum A recta ducatur linea C D A E, circumferentiam ſecans in D & E; ut quadratum lineæ A C inter hæc puncta interceptæ ſit æquale rectangulo E C D, contento ſub tota ſecante E C & exterius aſſumpta C D, unà cum rectangulo E A D, comprehenſo ſub duabus intra circulum portionibus E A, A D.

Conſtructio.



Ductâ ex centro B ad punctum A rectâ B A, erigatur in A ad ipſam perpendicularis A C. Dico, ſi in ea extra circulum ſumatur aliquod punctum C, ▭lum E C D unà cum ▭lo E A D eſſe æquale □to ex A C. Quod erat faciendum. Idem ſimiliter intellige de quolibet puncto C, in recta A C extra circulum aſſumpto.

Cujus demonſtratio ex 6ta 2di, & 3tia 3tii Elementorum Euclidis eſt manifeſta.

Hinc:

Conclusio 6ᵗᵃ Propositionis.

Si in circulo positione dato sit datum punctum, per que ipsum agatur quædam recta linea, & in ipsa punctum extra sumatur; sit autem quod fit à linea ducta usque ad punctum intra datum æquale ei, quod à tota & extra sumpta, vel soli, vel unà cum eo, quod duabus, quæ intra circulum portionibus, continetur: punctum extra assumptum positione datam rectam lineam continget.

Et si hoc quidem punctum contingat positione datam rectam lineam, circulus autem non ponatur: quæ sunt ad utrasque partes dati puncti contingent positione eandem circumferentiam.

Quod erat demonstrandum.

FINIS.

FRAN-

FRANCISCI à SCHOOTEN
LEYDENSIS
In Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris,

EXERCITATIONUM MATHEMATICARUM,

LIBER IV.

SIVE DE

ORGANICA

CONICARUM SECTIONUM IN PLANO DESCRIPTIONE,

TRACTATUS.

GEOMETRIS, OPTICIS;
Præsertim verò
GNOMONICIS & MECHANICIS
UTILIS.

LUGD. BATAV.
Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII,
Academiæ Typographi.
CIↃ IↃC LVII.

Nobilissimis atque Amplissimis

DOMINIS,

ILLUSTRIS ACADEMIÆ LUGDUNO-BATAVÆ, CURATORIBUS,

D. AMELIO BOUCHORST, Domino de Wimmenum, Rhenolandiæ Balivo & Chomarcho, atque in Consessu Præpotentum Illustrissimorumque Belgii Confœderati Ordinum ex Equestri Hollandiæ Ordine Delegato.

D. GERARDO SCHAEP, ad Sereniss. & Potentiss. Daniæ Regem nomine Præpot. & Illustriss. Belgii Confœd. Ordinum nuper Legato, nunc verò Urbis Amstelodamensis Consuli.

D. CORNELIO à BEVEREN, Equiti, Strevelshouckii & West-Iselmundæ Toparchæ, Comitatus Hollandiæ Consiliario ac in Zuidt-Hollandia Quæstori Generali, antehac ad Sereniss. & Potentiss. Magnæ Britanniæ & Daniæ Reges Legationibus perfuncto, jam autem in Consessu Præpot. & Illustriss. Belgii Confœd. Ordinum Hollandiæ Delegato.

UT ET,

D. CLEMENTI à BAERSDORP JCto
D. ADRIANO van STAVEREN
D. NICOLAO vander MEER
D. FOYTO van ZYP
} *Florentissimæ Reip. Lugd. Bat. Consulibus.*

NEC NON,

Amplissimo, Prudentissimoqúe Viro,

D. JOANNI à WEVELICHOVEN JCto, Reip. Lugd. Bat. Syndico, iisdemque D. D. Curatoribus à Secretis.

Nobi-

Uemadmodum inter complures Mathematicæ scientiæ partes, Geometria reliquas ferè omnes ut basis sustinet, ita etiam in ea addiscenda Græci olim summam operam posuerunt. Cum autem eandem simul cũ aliis scientiis ac artibus, felici successu, suo idiomate exercerent, factum inde quoque fuit ut illius utilitatem è vestigio deprehenderent, tam in cæteris faciliùs addiscendis, excolendisq;, quàm in ritè dirigendis artibus omnibus Mechanicis, nec non variis instrumentis excogitandis, quę ad quotidianum usum spectarent. Ei igitur parti quæ tractat de Conicis Sectionibus, cujus usum cum longè lateque se extendere agnoscerent, maximum studium adhibuerunt. Inter quos, qui ex professo hanc tractare susceperunt, nullus Euclide antiquior reperitur, qui quatuor libros eâ de re conscripsit. Apollonius autem post universaliùs hæc inspiciens, easdem Sectiones in unoquoque Cono ostendit; qui plurimis ingeniosis & pulcherrimis Theorematîs Conicorum doctrinam locupletavit, & Euclidis libros quatuor ad octo perduxit. Quâ quidem re scientia hæc incredibile incrementum cepit, illeque inde magnam gloriam consequutus est, ita ut eo & sequentibus seculis Geometræ magni nomen meruerit. Sed cum, injuriâ temporis, nulla eorum monumenta vel aliorum, qui ipsis posteriores sunt ad nos pervenerint, aut saltem (quod sciam) publicè extent, in quibus modus ipsas Sectiones uno ductu in plano describendi ostendatur; quarum tamen descripto in praxi quotidiana quàm maximè requiritur: Id ipsum materiam mihi subministravit, ut idonea instrumenta excogitarem: quibûsque modis Conicæ lineæ Organicè, & quovis casu, in plano describi possent, peculiari tractatu demonstrare conarer. Quem, primitias studiorum meorum, Vobis Nobilissimi, Amplissimique Viri, offerre non erubui: Vobis inquam, qui sem-

per

per eximii scientiarum omnium artiumque liberalium Mecœnates extitistis, ac etiamnum ad eas promovendas, atque Academiæ vestræ ornamentum, curam omnem & favoris operam confertis. Quam porrò eò protulistis, ut illa singularis in hoc appareat ac nunquam non laudanda sit, quòd etiam Mathematicas artes, exemplo clarorum olim Græcorum, vernaculâ linguâ in Academia Vestra doceri volueritis, Batavosque & aliarum linguarum ignaros iis imbui. Magno sanè Reipublicæ commodo, communique omnium applausu: ut scilicet ipsæ usui publico inserviant, nec non Vos earum fructus in gubernanda Republica, tam belli quàm pacis tempore, ubique sentiatis. Denique quandoquidem, defuncto parente meo, benevolentiâ vestrâ in ejus locum surrogatus fui, ut disciplinas hasce publicè profiterer, officii mei esse duxi, grati animi aliquâ testificatione eidem respondere, & quæ in usum publicum meditatus sum, Illustribus Vestris Nominibus dedicare. Hunc igitur laborem qualemcunque, Viri Nobilissimi atque Amplissimi, in clientelam Vestram accipite benignè; quippe qui Vobis omni animi observantiâ à me offertur; eundemque accepti beneficii gratitudinis ergo auspiciis Vestris in lucem prodire sinite. Quod superest, DEUM OPT. MAX. rogo ut vos incolumes ac felices quàm diutissimè conservet. Dabam Leydæ, Kal. Novemb. Anni MDCXLVI.

Nobilitatibus atque Amplitudinibus Vestris

devotissimus.

FR. à SCHOOTEN.

PRÆ-

PRÆFATIO AD LECTOREM.

QVANTVM incrementum Geometria, amice Lector, ex Conicorum doctrina, postquam Veteres ei sedulò incubuerunt, acceperit, quantaqúe ipsi dignitas accesserit; partim eorum monumenta; partim verò singularis eorum usus testantur. Inter quos, qui id sunt aggressi, nullus Euclide prior reperitur: qui Conum ex circumvolutione Trianguli rectanguli definivit, manente uno eorum, quæ circa rectum angulum sunt, latere: statuens præterea tres Conorum differentes species, secundùm triplicem angulorum ad verticem differentiam: deinde verò unumquemque horum trium secari plano ad unum Coni latus recto, unde tres illas ut Coni rectanguli, obtusanguli, & acutanguli sectiones deduxit. Verùm postea Apollonius universaliùs Conum definiens ex conversione rectæ lineæ indefinitæ, circa Circuli circumferentiam, transeuntis continuò per aliquod punctum in sublimi, quousque ad eum locum redeat, à quo moveri cœpit: universè inspexit in omni Cono, tam recto quàm scaleno, unamquamque trium prædictarum sectionum inveniri, pro diversa nempe plani secantis in Cono contemplatione. Qui porrò ante nominatas sectiones, rectanguli quidem Coni sectionem Parabolen, obtusanguli Hyperbolen, acutanguli verò Ellipsin appellavit, unicuique ex hisce tribus ab aliquo proprio accidente ejusmodi nomen imponens. Vt quilibet ex libris ejus, qui Conica Elementa inscribuntur, addiscere potest. Quorum propositiones, quantùm iis ad demonstrationem indiguimus, eorum, quæ hoc tractatu afferuntur, citavimus. Cæterùm, quantopere ille hac in parte Geometriam ditarit, quantaqúe ejus inventis præstantissimæ huic scientiæ dignitas accesserit, vix dici potest. Hic namque Euclidis libros quatuor, ea de re conscriptos, ad octo perduxit. Et quàm-

vis dolendum sit, quatuor duntaxat primos ad nos hactenus pervenisse, atque reliqui quidem temporis injuriâ periisse videantur; futurum tamen confidimus ut eosdem, ex genuina Arabum versione Latinè redditos, Vir Clarissimus D. Iacobus Golius haud diutiùs desiderari sinat: quàm primùm alio opere, cujus editione impræsentiarum distinetur, fuerit defunctus.

Verùm ut ad usum harum Sectionum accedamus, ostendamusq; ad qua earum descriptio in plano deserviat: sciendum primò est, eam in Geometria ad solutionem Solidorum Problematum adeò requiri, ut quemadmodum illa solvi nequeunt, nisi in constructionem adhibeatur aliqua trium Coni Sectionum supra dictarum; ita etiam earum descriptionem nequaquam ibidem negligere decet.

Quod verò ad Opticam, jucundissimam Matheseos partem attinet, quæq; præter Visum, Lucem, Vmbram, & Colores, objectorum quoque diversas apparentias contemplatur, ac earundem rationes reddit: considerando videlicet ea infinitis radiis ab objecto prodeuntibus conspici, qui in oculo simul conveniant: Quàm opportunum sit illîc Conum, Conicasqúe Sectiones animadvertere, cuivis, qui Circulum pro objecto acceperit, judicandum relinquo.

Quòd si Opticam penitiùs perspiciamus, eamqúe porrò ut fit subdividamus in Catoptricam, Dioptricam, & Perspectivam, multò magis Conicorum frequens usus elucebit.

Nam quod ad Catoptricam spectat, quoniam illam novimus occupatam esse in imaginibus, quæ in speculis per reflexionem radiorum in nostros oculos fiunt, explicandis; Cumqúe in ea præterea specula efficere conemur, quæ miros præbeant effectus; Sicuti quorum beneficio lucente Sole aliquid accendatur, vel quibus lumen alicujus candelæ mirabiliter diffundatur: an non necessariam planè ad hoc Paraboles ac Hyperboles descriptionem unusquisque agnoscet? Siquidem ejusmodi specula dictas figuras omnino requirunt? Quemadmodum quoq; Hyper-

bola

bola exigitur ad radios è diversis locis prodeuntibus in unum punctum congregandos; Ellipsis verò ut qui ex uno puncto veniunt rursus in aliud reflectantur punctum. Quæ quidem non solùm vario fini inservire queunt, verùm etiam summa cum voluptate adhiberi ad prodigiosas rerũ imagines repræsentandas.

Tacebo-ne Dioptricam? quæ non solùm hoc habet, ut sine eâ Visus ratio, ut & Lucis & Colorum minimè explicari valeat; sed etiam hoc sibi vendicat, ut vitra comburentia efficere nos doceat; nec non alia, quibus radii diversimode detorqueantur, & tam tubis Opticis, quàm vario modo visum juvantibus, inserviant: Non-quid & ad illa Conicarum Sectionum descriptio utilis dicetur? cum ejusmodi vitra in formam Ellipsis ac Hyperbolæ expolienda esse, Dioptrica nobis demonstret. De qua re Dioptrica Nobilissimi Clarissimiqúe Viri D. Renati des Cartes consuli potest; in qua mirâ brevitate subtilissimè, quæcunque de reflexionibus, refractionibus, cæterisqúe rebus ad perfectionem visus pertinentibus, intelligi possunt, persequitur; & quæ de refractionis legibus ante fuerunt desiderata, planè perfecit. In qua parte si præterea expectes, quæ Clarissimus ac Subtilissimus Vir, D. de Beaune, Consiliarius Blæsensis, post excogitavit, non video quid in hoc genere ampliùs requiras.

Opticæ colophonem addit Perspectiva, quæ non modò ad contemplationem objecti pertinet, veluti Optica, sed ad ipsam figuram apparentem in plano describendam. Quocirca dubitari nequit, quanto cum compendio Organica Conicarum Sectionum descriptio in Circulorum projectionibus institui possit: quandoquidem projectionem illam non nisi aliquam ex Conicis Sectionibus existere, manifestum est. Cæterùm quàm crebra ibidem sit præ aliis Ellipseos decircinatio, nemini ambigendum puto, qui Planisphæria sibi parare unquam tentaverit. Ita ut hoc seculo, ob peculiare Conicorum studium, Optica quoque ad fastigium perducta videatur, summaqúe ejus perfectio speranda sit, si reliquos Conicorum libros

Nobilissimi ac Clarissimi Viri D. Claudii Mydorgii, in Francia Picardiæ Quæstoris, nec non Conica Acutissimi Viri, D. des Argues, ab iis impetremus.

Non est quòd multa dicam de Gnomonica, cujus totum fermè negotium in describendis Conicis Sectionibus consistit, cum Sol ibidem conversione suâ quotidie nobis Conum referre statuatur, quem Conum Luminis appellamus; cujus quidem basis Circulus est quem describit; vertex autem apex gnomonis; ipsum verò Solarium planum Sectionis Coni, priori oppositi, qui Conus Vmbræ vocatur. Ita ut lineæ, quas in eo extremitas umbræ gnomonis seu styli singulis diebus describit, repræsentent semper aliam atque aliam Coni Sectionem; prout nimirum Sol alium aliumque gradum Eclipticæ quotidie perambulat; ut etiam pro diversa Sphæra constitutione, nec non vario plani Horologii situ. Vnde fit ut arcus diurni, signa Zodiaci, Paralleli Civitatum Latitudinumvé Circuli, sicut etiam Paralleli Horizontis seu Circuli Almucantarath, omnes in Sectiones Conicas sint consignandi, totumque ferè opus ab iis describendis pendeat.

Superest Mechanica, quæ artium Mathematicarum quasi exegesis est, cum instrumenta fabricare doceat, quorum præsidio id ipsum, quod cæteræ hujus Scientiæ partes construendum nobis suppeditant, exequi valeamus. Ad quam igitur Organicam Conicarum Sectionum descriptionem non immeritò referas. Quocirca hac in parte laborandum mihi quoque proposui, unde reliquæ commoditatis alicujus possint participes reddi, atque ad finem optatum perduci. Præsertim etiam cum observassem harum linearum descriptionem Organicam in praxi quotidiana usum habere uberrimum, ut architectis, lignariis, cæmentariis in extruendis typis ligneis, lapideis fornicibus templorum, ædificiorum, pontium, porticuum & cellarum sustinendis requisitos. Quemadmodum etiam diatretis in tornandis pluteis, nec non topiariis in diversimodè concinnandis pulvillis in horto, &c.

Cum

Cum ergo ad tam multa negotia Conicarum Sectionum in plano descriptio utilis sit, quid mirum, si vel ab ultima antiquitate prastantissimi Mathematici Conicorũ doctrinam adeò sedulò sibi excolendam duxerint, semperq́ ei, pracipuè verò hoc erudito seculo, accessio nova facta sit? Verùm quod mirandum mihi videtur, est, quòd nemo hactenus (quod sciam) Spartam hanc sibi ornandã susceperit, ut nempe aliquis inventus fuerit, qui de Organica Conicarum Sectionum in plano descriptione tractatum conscribere sit aggressus, eamq́ue quovis casu demonstrare. Quod quidem perutile futurum, vel ex eo deprehendi potuit, quòd casu fuerint inventi quidam modi, quorũ in quotidiana praxi non parvus est usus: quos nostris interserere quoq́ libuit, ne aliunde quispiam quod huc spectat haberet quod peteret, & quod non possimus hâc nostrâ opellâ ipsi suppeditare. Fateor me legisse, Franciscum Aguillonium in animo habuisse (ut ipsemet scribit) peculiarem tractatũ hac de re instituere; verùm morte praventus, opus imperfectum reliquit. Novi insuper ingeniosissimum Virum D. Otterum multa super hac re excogitasse; sed neq́ ille quantùm mihi innotuit, publici juris quidquam fecit. Quod autem attinet ad methodum, quâ hæ linea in plano per puncta describuntur, de qua Clarissimus D. Mydorgius totũ librum conscripsit, illa quidem, quum ipsa majori formâ sunt exhibenda ut in parietibus, caminis, pavimentis, hortis, & quales vulgò in Gnomonica & Mechanica requiruntur, non aquè facili viâ atq́ Organicâ succedit. Prout hoc à primo limine dignoscere licet in Sciothericis hoc pacto constructis; si notemus quàm perperàm plerumq́ ipsa designata fuerint: siquidem methodus illa sapiùs ibidem iteratam punctorum inventionem atq́ manus exercitata solertiam requirit, nec non ut praterea, ad exactã operis exegesin, natura earundem linearum in aperto sit. Quod utiq́ in Organica methodo locum non habet: quippe qua lineas illas, multifariam iteratâ operâ vixdum acquisitas, suâ quasi sponte uno ductu continuo ob oculos ponit.

Placuit porrò præ cæteris is modus Organicus, qui è motu implicato originem ducit, eo insuper habito, quo hæ lineæ circino in eum finem extructo describantur. Quoniam ibi easdem lineas primùm descriptas habere oportet, ut circino adfixæ similium solummodò descriptioni inservire possint.

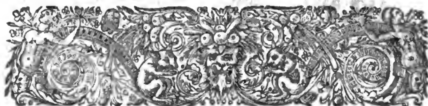
Præterea cum ratio ducendi lineas rectas, quæ curvas hasce in quibusvis punctis contingant, in indaganda objectorum varia apparentia ad Catoptricam & Dioptricam summopere sit necessaria; placuit quoq; post ipsarum descriptionem in Scholiis de iis breviter tractare; ut & de spatiis quæ includunt: quandoquidem cognitio illa ad centra gravitatum eorundem spaciorum invenienda plurimùm conducit, atq; una ab altera pendet.

Denique ne quid deesset, quod ad hanc materiam spectare videretur, subjeci etiam relationem, quam inter se habent spatia quæcunque, rectis lineis & curvis Conicis comprehensa. In quorum demonstrationibus Lectorem monitum velim, me brevitatis causâ methodo indivisibilium, quam subtilissimus Vir Bonaventura Cavallerius inivit, fuisse innixum: licèt id aliâ quoque ratione exhibere potuerim.

Aliarum autem linearum curvarum superioris generis descriptiones quod attinet, eas in medium afferre non fuit nostri instituti: cum maluerimus meritò eximiis Viris D. des Cartes, D. de Fermat, Senatori Tholosano, & D. Robervallo, Mathematum in Academia Parisiensi Regio Professori, relinquere. Qui præterea earum tangentes, quadrationes, & centra invenêre, quibus Geometriam mirificè ditare valeant, & (meo judicio) vix lucẽ visura sunt, nisi Philomathematicorũ precibus & persuasionibus ab iis in Reipub. Literariæ bonum extorqueantur.

Has igitur primitias laboris nostri, amice Lector, si gratas tibi fuisse acceperimus, animũ nobis addes ad Apollonii de locis planis Geometriam, aliosq; tractatus brevi, Deo volente, edendos; & ad ea, quæ circa optimam muniendi rationem meditari cœpimus, absolvenda. His interim fruere, eaqúe in usum tuum converte. Vale.

FRAN-



FRANCISCI à SCHOOTEN
LEYDENSIS
In Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris,

DE

ORGANICA
CONICARUM SECTIONUM
IN PLANO DESCRIPTIONE
TRACTATUS.

CAPUT I.

De rectis lineis, quæ in plano ex motu implicato describuntur.

N plano quocunque concipiatur regula A B, mobilis circa punctum fixum A, atque alia regula C B D huic quidem annexa in puncto B, quæ circa illud in eodem plano converti possit: statuantur autem intervalla A B, C B & B D inter se æqualia.

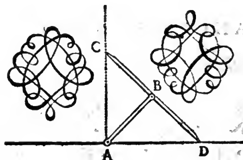
Dico, si feratur punctum D in recta linea transeunte per A, ut A D, punctum alterum C motu isto in eodem plano describere lineam rectam, priori A D perpendicularem.

Intelligatur enim à puncto C ad punctum A recta linea esse ducta A C. Quia igitur trianguli ABD latera AB, B D sunt æqualia, [a] erunt etiam anguli B A D, B D A inter se æquales. Eodem modo, quoniam in triangulo A B C latera A B, B C æqualia sunt, [b] erunt quoque anguli

[a] 5 Primi Elem.
[b] 5 Primi Elem.

guli A C B, BAC inter se æquales. Æqualis igitur est angulus CAD duobus angulis BCA, ADB. [c] Sunt autem tres anguli CAD, BCA, & A D B duobus rectis æquales. Rectus itaque erit angulus CAD. Cum verò constet, mutato situ puncti D in recta A D, mutari simul

c 32 Primi Elem.

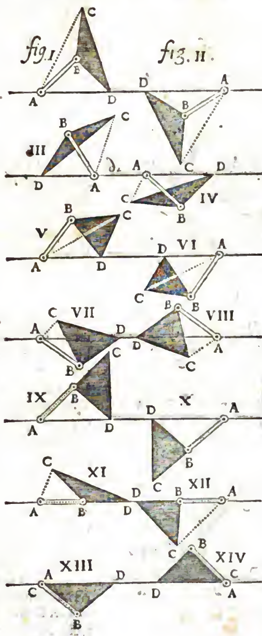


situm puncti C; atque in omni alia constitutione instrumenti idem prorsus semper demonstretur, quod attinet punctum C: sequitur rectas omnes ductas à punctis infinitis C ad punctum A, rectos cum A D angulos efficere. Sed cum recti omnes anguli inter se sint æquales, non poterunt ejusmodi rectæ, à punctis C ad punctum A ductæ, nisi eundem angulum constituere, hoc est, rectæ omnes ex C ad A eductæ unam eandemque efficient rectam lineam. Unde liquet puncto D moto per rectam A D, alterum punctum C suo etiam motu in plano describere rectam lineam C A ipsi A D in puncto A perpendicularem. Quod erat demonstrandum.

Statuatur autem regulam A B, quæ mobilis est circa punctum A, non amplius sibi puncto B annexam habere regulam C B D sed triangulum C B D, utrovis crure C B, B D ipsi A B æquale, quod circa illum suum verticem B, invariato manente angulo, moveri queat.

Dico rursus, si feratur punctum D in recta linea A D, alterum punctum C motu isto in plano describere rectam lineam, efficientem ad A D angulos obliquos; quorum quidem acutus æqualis erit subduplo angulo D B C, qui in triangulo sub æqualibus lateribus D B, B C continetur.

Cum



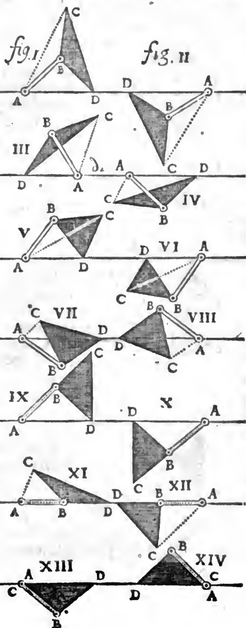
Cum autem punctum D in recta A D ferri concipiatur ad utramque partem puncti A, atque inde punctum C situm quoque suum simul mutet: variæ ex eo oriuntur instrumēti constitutiones, quæ secundùm casuum species sunt considerandæ, ut ex iis demonstratio universalis eliciatur.

Intelligatur itaque instrumentum in qua libuerit constitutione, & à puncto C ad A recta linea esse ducta A C.

Quia igitur trianguli A B D latera A B, B D æqualia sunt, [d] erunt quoque anguli D A B, B D A æquales. Eâdem ratione, quoniã trianguli A B C latera A B, B C æqualia sunt, [e] erunt itidem anguli C A B, B C A æquales. α Æqualis igitur est angulus C A D duobus angulis B D A, A C B in I, II, III & IV

d p 5 Primi Elem.

e p 5 Primi Elem.



f 32 Primi Elem.

g 32 Primi Elem.

IV figura; β at in V & VI figura æqualis angulo BDA detracto angulo ACB; γ in VII verò & VIII figura æqualis angulo ACB multato angulo BDA. [f] Quoniam autem in I & II figura duo anguli DCB, BDC cum angulis BDA, ACB, α id est, cum angulo CAD, unà cum angulo CAD duobus rectis sint æquales; iidemque duo cum angulo etiam DBC duobus rectis æquentur: liquet in I & II figura, angulum DBC anguli CDA duplum fore.

Sed cum in III & IV figura [g] anguli BDA, ACB, α seu angulus CAD, unà cum angulis CAD, DBC quatuor rectis æquales existant; anguli autem DCA, ADC cum angulo CAD duobus rectis æquentur: erit

erit angulus DBC æqualis angulis DCA, ADC, bis simul sumptis. [h] At verò quoniam trianguli D A C angulus externus C A b, duobus internis & oppositis DCA, ADC est æqualis: erit quoque in III & IV figura angulus DBC anguli acuti CA b duplus. h p 32 Primi Elem.

Porrò cum in V & VI figura [i] anguli duo D C B, BDC cum angulo B D A dempto A C B, β qui est angulus CAD, unà cum angulo C A D, duobus rectis sint æquales; iidemque duo cum angulo etiam D B C duobus rectis æquentur: liquet pariter in V & VI figura angulum DBC anguli CAD esse duplum. i p 32 Primi Elem.

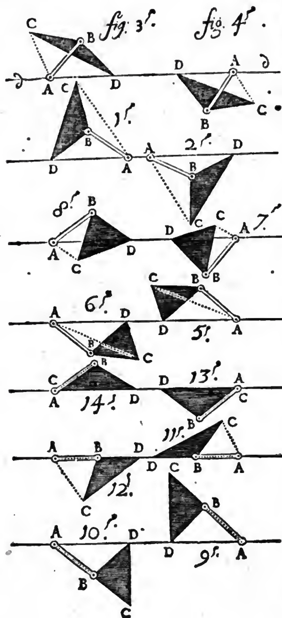
Denique, in VII & VIII figura, [k] quia duo anguli D C B, B D C cum angulo ACB sublato ei BDA, γ qui est angulus CAD, unà cum angulo C A D duobus rectis sunt æquales; ac iidem duo cum angulo etiam DBC duobus rectis æquentur; manifestum similiter est in VII & VIII figura angulum DBC anguli CAD duplum fore. k p 32 Primi Elem.

Præterea concipi potest ejusmodi constitutio instrumenti, in qua AB, BC (sicut in IX & X figura;) sive etiam AB, BD (ut in XI & XII figura,) in directum jacent. Rursus enim fiet ut angulus DBC anguli CAD sit duplus. [l] Æqualis enim est in IX & X figura externus angulus DBC trianguli ABD duobus internis oppositis & æqualibus angulis DAB, BDA, ac proinde anguli D A B seu CAD duplus. l p 32 Primi Elem.

In XI verò & XII figura [m] angulus externus D B C trianguli ABC duobus internis & oppositis æqualibus angulis CAB, BCA æqualis est, ac idcirco ipsius CAB seu CAD duplus. m p 32 Primi Elem.

Nihil dico de ea constitutione instrumenti, ubi A B, B C prorsus coincidunt: perspicuum enim est, punctum C tum cadere in punctum A, ut in XIII & XIV figura apparet.

Quapropter punctum C in qualibet instrumenti constitutione, ex motu puncti D per rectam A D, talem accipit situm, ut quæ à C ad A recta ducitur cum A D sive supra eam sive infra faciat semper angulum subduplum assumpti anguli CBD. Cum autem duo illi anguli, qui supra & infra lineam AD fiunt, ad punctum A tanquam verticem, inter se æquales existant, & pro duobus cruribus habeant unam lineam A D: [n] etiam duo reliqua crura una linea erunt. Cumque punctum C reperiatur perpetuò in horum alterutro: necesse est ejusdem motu, puncti D motum sequente, rectam lineam in plano describi. Ut erat demonstrandum. n p conversam 15 Primi Elem.



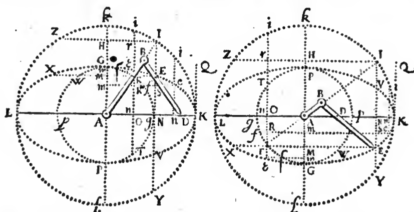
Sciendum tandem est, nihil referre ad quam partem rectę BC concipiatur triangulum BDC, ut ea fiant quæ proposita sunt. Si autem in alteram partem rectæ BC idem triangulum intelligatur, quod quidem fiet sumẽdo illud puncto C moveri per rectam AD: recta AC aliam tunc quoque ad punctum A positionem obtinebit. Sed ne opùs sit novâ id ostendere demonstratione, satis esse duximus secũdùm eandem hypothesin consimiles omnes ejusdẽ instrumenti constitutiones exhibere, easque simili charactere insignire, quibus superiùs demonstrata communiter applicari possent. Cum alia nulla differentia hîc videatur advertẽda, nisi quòd pun-

punctum supra vocatum C, hîc appelletur D; & quod ibi dicebatur D, hîc à nobis nominetur C. Ita ut supervacaneum sit plura super hac re in medium afferre.

Caput II.

De ellipsibus, quæ ex motu implicato in plano circa axes seu extremas diametros describuntur.

Revertor jam ad primum instrumentum supra descriptum, hoc est, concipio rursus in plano quocunque regulam AB, mobilem circa punctum fixum A, atque huic annexam esse aliam regulam BED in puncto B, quæ circa illud in eodem plano similiter circumagi pos-

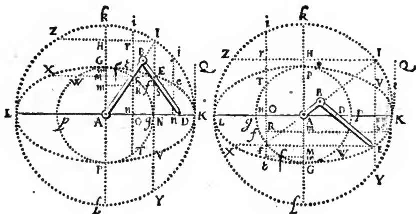


sit. Assumatur præterea in B D quodvis punctum E intra puncta B & D, sive etiam in ea producta ultra D. Sit autem BD ipsi AB æqualis.

Dico si feratur punctum D per rectam lineam A D, punctum quidem E motu isto in eodem plano describere ellipsis circumferentiam; cujus centrum est A; & axis transversus æqualis duplæ compositæ ex AB, BE; at verò axis rectus æqualis duplæ DE. Hoc autem est ostendendum.

Quoniam enim A B mobilis est circa A, manifestum est, si sumatur quodlibet punctum in A B vel in ipsa producta, quod simul cum ea moveri intelligatur circa A, illud ipsum describere circuli circumferentiam. Assumatur itaque punctum F, ita ut B F sit æqualis B E, illudque describat circuli circumferentiam FGP. Sit porrò recta

GAP perpendicularis ad AD, secans circumferentiam dicti circuli in G & P: erit ea axis rectus ellipsis. æqualis enim assumpta est BF ipsi BE, atque est etiam A B ipsi BD æqualis: quapropter & reliqua A F reliquæ DE æqualis erit, atque ita G A P æqualis duplæ D E. Producatur denuò AB ad I, donec BI sit æqualis BE, centroque A intervallo AI circuli circumferentia describatur LIK, secans hinc inde AD in L & K: eritque LK axis transversus ellipsis. cum A I æquetur compositæ ex AB, BE, atque ita L A K æqualis sit duplæ compositæ ex AB, BE. His igitur ita se habentibus, demonstrandum est, punctum E esse in ellipsis circumferentia, cujus axes sunt, quos diximus.



a p 2 Sexti Elem. Agatur namque producaturvè E F, ut secet A G in M: [a] erit igitur hæc parallela ipsi A D, ac perpendicularis ad A G. Agatur quoque seu producatur IE, donec secet AD in N: cadetque hæc similiter perpendiculariter in AD. Ducatur denique FO ipsi INE æquidistans, secans AD in O; ipsisque axibus LK, GP inveniatur tertia proportionalis K Q.

b p 4 Sexti Elem. c p 16 Quinti Elem. d p 15 Quinti Elem. e p 22 Quinti Elem. f p Corol. 20. sexti Elem.

[b] Cum igitur similia sint triangula A F O, A I N: erit F O ad F A, ut N I ad I A; [c] permutandoque F O ad N I, ut FA ad IA, [d] vel dupla F A seu G P ad duplam I A seu L K; [e] atque etiam quadratum F O ad quadratum N I, ut G P quadratum ad LK quadratum. Cumque, ob proportionales KQ, GP & LK, [f] quadratum G P ad quadratum LK sit,

fit, ut KQ ad LK: erit quoque ut quadratum FO, hoc est, quadratum NE, ad quadratum NI, ita KQ ad LK. [g] Est verò quadratum NI æquale rectangulo LNK. Quapropter erit, ut quadratum NE ad rectangulum LNK, ita KQ rectum figuræ latus ad LK latus transversum. [h] Liquet ergo punctum E esse in ellipsis circumferentia, cujus extremæ diametri seu axes sunt LK, PG; latus autem rectum principale KQ, pertinens ad axem LK.

g p 35 Tertii Elem.

h p conversa 21 Primi Conic. Apollonii.

Quia autem hoc in infinitum ita se habet circa omnes alias rectas NE, ordinatim ad axem LK adplicatas, in quavis alia instrumenti constitutione: sequitur punctum E motu isto in plano describere ellipsis circumferentiam, circa extremas diametros, axesvè KL, GP. Quod erat demonstrandum.

Atque uti hæc quidem contingunt circa punctum E, prout sumitur in BD intra puncta B & D; sive etiam in ea continuata ultra D: idem continget quoque, si sumatur in BD producta ultra B, si modò BE ipsi AB non sumatur æqualis. Nam si in memoriam revocemus id quod capite primo demonstravimus de puncto C, quoad primum instrumentum sive regulas mobiles AB, DBC; nempe quòd, dum fertur punctum D per rectam AD, punctum C motu isto describat rectam lineam, ipsi AD perpendicularem: facilè intelligemus, si fingatur similiter ejusmodi punctum in BD intra puncta B & C, sive etiam in ea producta ultra C: idem tum esse ac si conciperemus punctum C ferri in recta AC ac ea fieri, quæ jam de puncto E demonstravimus. Eadem quippe tunc ibi erit relatio, eademque percipietur semper constitutio regularum AB, BEC punctique E, sumpti intra B & C, sive etiam in ea producta ultra C ad rectam AC; quæ fuit hîc regularum AB, BED & puncti E, sumpti intra B & D, sive etiam in ipsa continuata ultra D, ad rectam AD: ac proinde alia non indigebimus demonstratione. Adeò ut si punctum E à B utrinque æqualiter fuerit dissitum, æquales ac similes planè, sed inverso situ ellipses describantur.

Sciendum denuo est, non solùm ex motu puncti D per rectam AD semi-ellipses describi; verùm etiam integras, si modò regulæ AB, BED ad alteras partes rectæ AD incurventur.

SCHO-

SCHOLIUM.

QVoniam superiùs ostensum est, FO, hoc est, NE, esse ad NI, ut GP, qui est axis rectus, ad LK, qui est axis transversus ellipsis; atque hoc ipsum in infinitum manifestum sit de omnibus aliis rectis n e, n i, quæ tam in ellipsi LGKP quàm in circulo L k K l ordinatim adplicantur ad axem LK: i sequitur, ellipsim LGKP ad circulum L k K l, sicuti etiam ellipsis segmentum E e V ad circuli segmentum I i Y, esse, ut axis rectus GP ad axem tranversum LK.

i Ex methodo indivisibilium Cavalerii.

Item quoniam ipsius n e ad n i, totius ad totam, eadem est ratio quæ ablata n F ad ablatam n r: k erit etiam reliquæ F e ad reliquam r i eadem ratio quæ totius n e ad totam n i, hoc est, quæ axis recti GP ad axem transversum LK. Cumque hoc in infinitum sit evidens de omnibus aliis rectis F e, r i in segmento ellipsis E e X & circuli I i Z: eodem modo concludendum erit, l ellipsis segmentum E e X ad circuli segmentum I i Z esse, ut axis rectus GP ad axem transversum LK.

k p 19 Quinti Elem.

l Ex methodo indivisibilium Cavalerii.

m Sequitur quoque, propter similitudinem triangulorum AFO, AIN, esse AO ad AF, ut AN ad AI; n permutandoque AO ad AN, hoc est, MF ad ME, ut AF ad AI seu GP ad LK: ac proinde MF ad ME, ut axis rectus GP ad axem transversum LK. Quia verò in infinitum illud apparet quoque de omnibus aliis rectis m f, m e, quæ tam in circulo p G g P quàm in ellipsi LGKP sunt ordinatim applicatæ ad axem GP: o necesse est circulum p G g P ad ellipsim LGKP, sicut etiam circuli segmentum F f W ad ellipsis segmentum E e X, esse, ut axis rectus GP ad axem transversum LK.

m p 4 Sexti Elem.

n p 16 Quinti Elem.

o Ex methodo indivisibilium Cavalerii.

Porrò cum ipsius m f ad m e, totius ad totam, eadem sit ratio quæ ablata mR ad ablatam mS: p erit etiam reliquæ R f ad reliquam S e eadem ratio, quæ totius m f ad totam m e, hoc est, quæ axis recti GP ad axem transversum LK. Et quoniam hoc quoque in infinitum apparet de omnibus aliis rectis R f, S e in segmento circuli F f T & ellipsis E e V: q similiter inferendum est circuli segmentum F f T ad ellipsis segmentum E e V esse, ut axis rectus GP ad axem transversum LK.

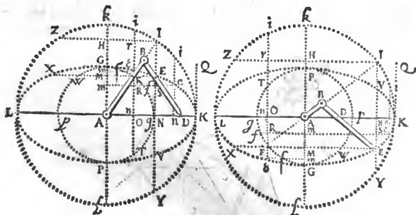
p p 19 Quinti Elem.

q Ex methodo indivisibilium Cavalerii.

Quia itaque demonstratum est, circulum p G g P ad ellipsim LGKP, itemque circuli segmentum F f W ad ellipsis segmentum E e X esse, ut axis rectus GP ad axem transversum LK; ac in eadem ratione quoque esse ellipsim LGKP ad circulum L k K l, sicuti etiam ellipsis segmentum E e X ad circuli segmentum I i Z: liquet ellipsim LGKP esse medio loco proportionalem inter circulum p G g P & circulum L k K l; nec non ejus segmentum E e X inter circulorum segmenta F f W & I i Z.

Simi-

Similiter quoniam ostendimus, circuli segmentum F *f* T *esse ad ellipsis segmentum* E *e* V, *ut axis rectus* G P *ad axem transversum* L K; *ac in eadem ratione esse quoque ellipsis segmentum* E *e* V *ad circuli segmentum* I *i* Y:



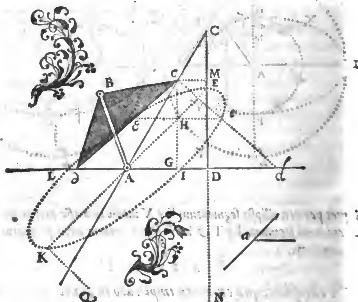
liquet pariter ellipsis segmentum E *e* V *medio loco esse proportionale inter circulorum segmenta* F *f* T *&* I *i* Y. *Quod quidem nobis propositum erat hic demonstrare.*

CAPUT III.

De ellipsibus, quæ ex motu implicato in plano describuntur, circa quascunque diametros conjugatas.

REvocetur jam autem secundum instrumentum, de quo paulò ante loquuti sumus, hoc est, concipiatur rursus in plano quocunque regula mobilis AB circa punctum fixum A, atque huic annexum triangulum ᵭ B *c* in puncto B, quod habeat latera ᵭ B, B *c* æqualia longitudini regulæ A B; ita tamen ut circa B in eodem plano converti queat. Quandoquidem autem cognosco ex præmissis, dum punctum ᵭ fertur in recta linea A D, punctum *c* motu isto in hoc plano rectam lineam describere A C, quæ ad A D angulos facit obliquos, quorum acutus CAD est subduplus anguli ᵭ B *c*, qui in triangulo *d* B *c* sub æqualibus lateribus ᵭ B, B*c* continetur; considero preterea punctũ m aliquod *e* in latere ᵭ *c*. Dico jam id ipsum motu illo in eodem plano

describere ellipsis circumferentiam, cujus centrum est A; diameter una LI, æqualis duplæ $c\,e$; altera verò ipsi conjugata EK. Hæc autem invenitur, si $c\,\delta$ latus trianguli inter rectas A C, A D accommodetur, ita ut ipsi A D sit perpendicularis: quemadmodum hîc per CD apparet. Si enim, in ea constitutione ipsius $c\,\delta$, à puncto E per punctum A recta perducitur E A K; sic ut K A ipsi A E sit æqualis: erit hæc altera diameter, priori LI conjugata. Quæ quidem sunt demonstranda.



Demittatur ex c recta c G perpendicularis in A D, fingaturque latus trianguli $c\,\delta$ habere etiam positionem rectæ $c\,d$ (patet enim ex figura I^{ma} pag^{næ} 305 ita quoque posse esse constitutum), connectaturque recta $\varepsilon\,e$, secans cG in H. Producatur porrò C D ut D N sit æqualis DC; & ex DC abscindatur D M æqualis ipsi cG: ac denique ad E K, LI inveniatur tertia proportionalis K Q.

a Per caput. 2 hujus. [a] Cum igitur punctum c cadat semper in recta linea A C, manifestum est illud demum coïncisurum cum puncto C, cùm ab A longissimè erit remotum; quo quidem casu punctum E verticem ellipsis repræsentabit.

b 4 Sexti Elem. [b] Quoniam itaque $c\,d$ hoc est C D ad c G est, ut $\varepsilon\,e$ hoc est C E ad

ad cH; parallelæ autem existant C D, cG: erunt puncta E, H, A in una linea recta. Liquet igitur punctum H, ubi invicem secant perpendicularis cG & recta e e, esse quoque punctum intersectionis ipsarum E A K, e e. Cum autem recta e c à cG in H bifariam semper dividatur, sequitur similiter ipsam à K A E bifariam semper in H divisum iri: ac proinde E A K diametrum esse; e e verò quæ ad ipsam ordinatim adplicatur. Quocirca erit quoque ut C E ad cH, ita A E ad A H. Quia verò ut C E ad cH, ita etiam est C D ad cG: [c] erit C D ad cG, ut A E ad A H; [d] & per conversionem rationis ut C D ad C M, ita A E ad H E. c p 11 Quinti Elem. d p Corol. 19 Quinti Elem.

Eodem modo, cum sit C D ad cG, ut A E ad A H; [e] erit, per compositionem rationis contrariam, ut C D ad M N, ita A E ad K H. Sed cum rationes, compositæ ex eisdem rationibus, inter se sint quoque eædem: erit ratio composita ex ratione C D ad C M & ex ratione C D ad M N eadem rationi, quæ componitur ex ratione A E ad H E & ex ratione A E ad K H. Ratio autem composita ex ratione C D ad C M & C D ad M N, [f] est ratio quadrati C D ad rectangulum C M N. Ratio verò composita ex ratione A E ad H E & ex ratione A E ad K H, [g] est ratio quadrati A E ad rectangulum E H K. [h] Erit igitur ut quadratum C D ad rectangulum C M N, ita quadratum A E ad rectangulum E H K. e Vide Clavium ad 18 Quinti Elem. f p 23 Sexti Elem. g p 23 Sexti Elem. h p 11 Quinti Elem.

Quoniam verò est ut C D ad cG seu D M, & ita c e ad cH: [i] erit etiam ut quadratum C D ad quadratum D M, ita quadratum c e ad quadratum cH; [k] & per conversionem rationis ut quadratum C D ad quadratum C D multatum quadrato D M, [l] quod idem est atque rectangulum C M N, ita quadratum c e ad quadratum c e diminutum quadrato cH, [m] id quod est quadratum H e. Siquidem igitur ratio quadrati A E ad rectangulum E H K est, sicut quadrati C D ad rectangulum C M N; & quoque ratio quadrati c e ad quadratum H e, sicut quadrati C D ad rectangulum C M N: [n] erunt quoque inter se eædem, eritque ut quadratum c e ad quadratum H e, ita quadratum A E ad rectangulum E H K; [o] permutandoque ut quadratum c e seu A I ad quadratum A E, ita quadratum H e ad rectangulum E H K. Sunt autem K Q, L I, & K E ex constructione proportionales. [p] Erit idcirco K Q ad K E, ut quadratum L I ad quadratum K E, seu quadratum A I ad quadratum A E. Quia itaque constat quadratum H e ad rectangulum E H K esse, ut rectum figuræ latus K Q ad latus figuræ transversum K E: [q] liquet punctum e esse in ellipsis circumferentia, cujus dia- i p 22 Sexti Elem. k p Corol. 19 Quinti Elem. l p 5 Secundi Elem. m p 47 Primi Elem. n p 11 Quinti Elem. o p 16 Quinti Elem. p p Corol. 20 Sexti Elem. q Per conversam 21 Primi Conicorum Apollonii.

diametri conjugatę sunt KE, LI; latus autem rectum KQ, pertinens ad diametrum KE. Quia autẽ hoc in infinitum ita contingit circa omnes alias rectas H*e*, ordinatim ad diametrum KE adplicatas, in quavis alia instrumenti constitutione (cum illæ omnes hic nullam adferant differentiam, quo minus demonstratio ad illas possit adplicari): sequitur punctum ε motu isto in plano describere ellipsis circumferentiam, circa diametros KE, LI. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Quandoquidem præcedenti capite quædam attigimus de iis, quæ contingunt circa superficiem ellipsis & ejusdem segmentorum; hoc tamen ibi factum fuit juxta solam considerationem axium, nec locum habuit nisi tantùm in segmentis rectis. Verùm ut contemplatio illa generalis sit juxta quascunque diametros, & in segmentis quoque scalenis pateat; consequenter ostendemus, cui ellipsi, juxta axes considerata, alia sit æqualis: quemadmodum etiam, quibus segmentis rectis ipsa ellipsis segmenta scalena æquentur.

Sit ergo ellipsis LEIK, *cujus diameter* LI; *altera autem huic conjugata sit* KE, *ad quam ordinatim adplicata intelligatur* ε e; *segmentum verò scalenum esto* ε E e. *Si itaque ex punctis* E, K *alternatim ducantur rectæ* EM, KP *diametro* LI *parallelæ; tum per centrum* A *recta* PAM *perpendicularis ad* LI, *secans* EN, KP *in* M *&* P, [a] *ac denique circa axes conjugatos* LI, PM *ellipsis describatur* LMIP: *dico ellipsim* LEIK *ellipsi* LMIP *æqualem esse. Cæterùm si producatur recta* ε e, *donec secet hujus ellipsis circumferentiam in* f *&* T: *dico similiter segmentum illius* ε E e *segmento hujus* TMf *esse æquale.*

a per 4 Caput hujus.

Est namque in ellipsi LEIK [b] *ut rectum latus* KQ *ad transversum* KE, *sive quadratum* LI *ad quadratum* KE, [c] *sive etiam quadratum* AI *ad quadratum* AE, *ita* He *quadratum ad* KHE *rectangulum. Quoniam verò* [d] *parallelæ sunt* ME, ε e, & KP: [e] *erit* AE *ad* HE, *ut* ED *seu* AM *ad* ES *seu* Mm. *Et sumptis antecedentium duplis, ut* KE *ad* HE, *ita* PM *ad* Mm;

b p 21 Primi Conicorum Apollonii.
c p 15 Quinti Elem.
d Ex constructione.
e p 4 Sexti Elem.

M m; [f] *dividendoque* K H *ad* H E, *ut* P m *ad* m M. [g] *Ut autem* K H *ad* H E, *ita est rectangulum* K H E *ad* H E *quadratum*; *& ut* P m *ad* m M, *ita est* P m M *rectangulum ad* m M *quadratum*. [h] *Erit igitur ut rectangulum* K H E *ad quadratum* H E, *ita rectangulum* P m M *ad* m M *quadratum*; [i] *& permutando rectangulum* K H E *ad rectangulum* P m M, *ut quadratum* H E *ad quadratum* m M, [k] *sive ut quadratum* A E *ad* A M *quadratum*. *Cum autem ostensum sit, α quadratum* H e *ad rectangulum* K H E *esse*, *ut quadratum* A I *ad quadratum* A E: [l] *erit quoque ex æquo*, *ut quadratum* H e *ad rectangulum* P m M, *ita quadratum* A I *ad quadratum* A M. *Quia verò in ellipsi* L M I P *similiter*, *ut supra*, *α quadratum* m f *ad rectangulum* P m M *est*, *ut quadratum* A I *ad quadratum* A M: [m] *erit quoque quadratum* H e *ad rectangulum* P m M, *ut* m f *quadratum ad rectangulum* P m M. *E quibus sequitur* [n] *quadratum* H e *quadrato* m f *æquale esse*. *Æquales igitur quoque erunt recta* H e, m f, *unde & earum dupla* ε e, T f. *Eadem est demonstratio de omnibus aliis ordinatim adplicatis ad diametros* K E, P M, *in infinitum assumptis in utraque figura*. *Unde patet*, [o] *ellipsim* L E I K *ellipsi* L M I P *æqualem esse*, *sicuti etiam segmentum ejus* ε E e *segmento hujus* T M f. *quod idem quoque de reliquis segmentis* ε K e, T P f *est intelligendum*. *Quare constat propositum*.

f p 17 Quinti Elem.
g p 1 Sexti Elem.
h p 11 Quinti Elem.
i p 16 Quinti Elem.
k p 4 & 22 Sexti Elem.
l p 22 Quinti Elem.
m p 11 Quinti Elem.
n p 9 Quinti Elem.
o Ex methodo indivisibilium Cavalerii.

Ex his liquet, *cuivis segmento ellipsis dato*, *exhiberi posse circuli segmentum ipsi æquale*. *Si enim segmentum illud fuerit scalenum*, *ut segmentum* ε E e; *ostendimus hìc aliud* T M f *ipsi æquale*, *quod sit rectum*. *Porrò quænam ratio inter hoc & circuli segmentum existat*, *ex præmissis quoque manifestum est*. *Patet ergo segmento cuivis ellipsis dato*, *circuli segmentũ inveniri æquale*.

Sequuntur porrò alia ad ellipses spectantia, *quæ ex motu implicato*, *tam circa extremas*, *quàm alias quascunque diametros conjugatas*, *beneficio ejusdem instrumenti*, *in plano describuntur*.

PRiusquam finem impono contemplationi prædicti instrumenti, etiam mihi in mentem venit considerandum, quid contingat circa punctum E, cùm sumitur in latere B C trianguli B C D, sive in ipso in utramvis partem producto.

Assumatur igitur punctum aliquod in B C (ut E,) intra puncta B & C, sive etiam in eadem utrinque ultra ipsa indefinitè producta, modò B E ipsi A B non sumatur æqualis, si illud sumere velimus ultra B. Dico rursus, si feratur punctum D in recta linea A D, punctum E motu

 isto

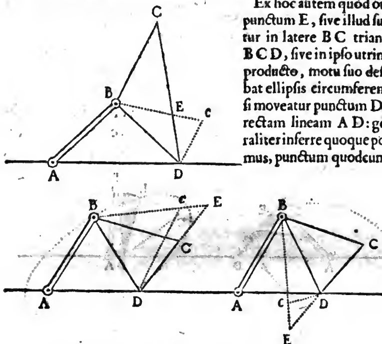
isto in plano describere ellipsis circumferentiam, cujus centrum est A, axis transversus ipsa recta AC, quam describit punctum C, longitudinem suam L K æqualem habens duplæ compositæ ex A B, B E: & cujus axis rectus priori conjugatus est GP, habens longitudinem suam æqualem duplæ C E.

Enimverò si recordemur, quæ capite primo demonstravimus de puncto C circa prædictum instrumentum; nempe quòd, dum fertur punctum D per rectã A D, punctum C motu isto describat rectam lineam A C, efficientem ad A D angulos obliquos; & horum quidem acutum C A D subduplum esse anguli D B C, qui in triangulo C B D sub æqualibus lateribus D B, B C continetur: Facilè intelligemus, si, relicto triangulo D B C, ponatur jam punctum E tanquam in regula B C, seu in ipsa utrinque producta (ut priùs fecimus): idem fore ac si concipiamus punctum C tum ferri in recta A C, & ea fieri, quæ de puncto E capite secundo, circa regulas mobiles A B, D B C, demonstrata sunt. Hoc est, punctum E motu isto in plano describere ellipsis circumferentiam circa centrum A, cujus axis transversus L K cadit in A C, ac æqualis est duplæ compositæ ex AB, BE; rectus verò GP, huic perpendicularis conjugatusque, æqualis duplæ C E.

Quoniam autem accidit rectam AD, primò propositam, diametrum quoque ellipsis existere: deinceps determinanda restat ejus longitudo atque simul ejus, quæ cum ipsa est conjugata.

Ductâ itaque in triangulo D B C rectâ D E, erigatur ex A ad A D perpendicularis A H, æqualis ductæ D E; ducaturque per H recta H F, parallela ipsi A D. Porrò describatur supra A H triangulum AHB, æquale triangulo D E B in instrumento, ita ut H B sit æqualis ipsi BE, A B autem ipsi B D; & centro B intervallo B H arcus describatur,

batur, secans HF in E: eritque punctum E vertex ellipsis. Quare si ducatur recta ab E ad A, eaque continuetur donec MA æquetur AE: erit M A E ellipsis diameter. Denique ad determinandam alteram huic conjugatam, sumatur in A D recta A *b*, similiter ipsi D E in instrumento æqualis; atque, ut ante, supra hanc triangulum constituatur A *b b*, æquale triangulo DEB in instrumento; centroque *b* intervallo *b b* arcus describatur, secans vel tangens A D in *e*. Post hæc æquatâ I A ipsi A *e*: erit I *e* altera ellipsis diameter, priori M E conjugata. Quæ quidem ex adplicatione instrumenti perspicua sunt.



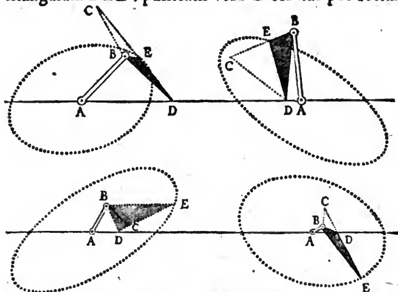
Ex hoc autem quòd omne punctum E, sive illud sumitur in latere B C trianguli B C D, sive in ipso utrinque producto, motu suo describat ellipsis circumferentiã, si moveatur punctum D per rectam lineam A D: generaliter inferre quoque possumus, punctum quodcunque E, sumptum in latere D C, aut in ipso utrinque indefinitè producto, descripturum esse ellipsis circumferentiam.

Si enim sumatur ejusmodi punctum in latere D C, aut in ipso utrinque indefinitè producto ultra C vel D, ducaturque recta B E: erit hæc vel minor, vel major quàm D B seu B C; minor quidem, si punctum E sumptum fuerit in D C intra puncta D, C; major verò, si illud in latere DC utrinque indefinitè producto ultra puncta C, D suma-

matur. Quocirca ductâ BE, in eaque assumendo rectam B*c* ipsi D B seu B C æqualem, jungendoque D*c*: concipi hâc ratione quoque poterit punctum E, tanquam in latere B*c* trianguli B D*c*, sive in eo ultra *c* indefinitè producto.

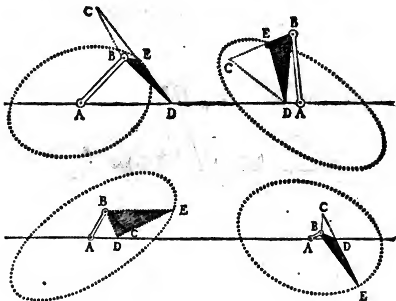
Quia denique considerari adhuc potest punctum E in latere B D trianguli B C D, sive in ipso utrinque indefinitè extenso, modò B E ipsi A B non sumatur æqualis, si illud sumere libeat ultra B: rursus fiet, ut, si feratur punctum D in recta linea A D, punctum E motu isto circumferentiam ellipsis describat; cujus quidem centrum sit A; axis transversus ipsa recta A D, habens longitudinem duplæ utriusque simul A B, B E; & cujus axis rectus sit ipsi A D perpendicularis, longitudinis autem duplæ D E. Hoc enim evidentissimè liquet, si mittamus triangulum D B C, atque punctum E solùm concipiamus tanquam in regula B D, aut in ipsa utrinque continuata, sicuti capite secundo factum fuit.

His itaque existentibus, perspicuum est si augeatur diminuaturvè triangulum D B C, ita ut reservetur modò triangulum B E D; punctum verò D feratur per rectam



AD: quòd punctum E motu illo describat semper ellipsis circumferentiam. Porrò quoniam perspicuum est, triangu-

gulum BED variè posse esse adfectum, & in utramvis partem rectæ BD constitutum; modò tantùm caveatur ne latus ejus B E ipsi lateri B D seu regulæ A B sit æquale: se-



quitur punctum E cujuscunque trianguli B E D, quod ad BD adplicatur, (cujus latus B E ipsi lateri B D seu regulæ A D non est æquale) idem præstaturum esse. .

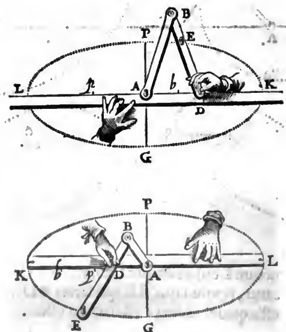
Caput IV.

De modo describendi ellipses in plano, circa datos axes seu extremas diametros.

POstquam præmissis capitibus ea pertractavimus, quæ ut fundamenta spectare possunt, quibus organicæ ellipsis descriptiones superstrui valent, superest ut iisdem vestigiis insistentes ad eorum usum nos accingamus, atque ostendamus quo pacto ea expedian-

tur quæ hac in parte vulgò proponi solent. Docebimus ergo primò, quibus modis circa datos axes, seu extremas diametros, ellipses ipsæ in plano designentur.

Dentur itaque in plano quocunque, L K axis transversus, rectus autem huic conjugatus G P, sese bifariam & normaliter in centro A secantes: oportet circa ipsos in eodem plano, ellipsis circumferentiam describere.



Ponatur A p æqualis G A seu AP, ita ut p K æquetur vel aggregato vel differentiæ ipsarum KA, AP (perinde enim est); ipsaque bifariam secetur in b. Deinde fiant duæ regulæ A B, B D ex orichalco, ligno, aliavè materia solida, longitudine æquales ipsi p b seu b K; hâc tamen lege, ut regula B D tam longa existat, ut in ipsa notari possit punctum E à B versus D, sic ut B E ipsi A b sit æqualis. quocirca si A b longitudine superet regulam B D, eatenus hæc ultra D prolonganda erit,

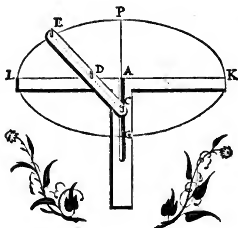
erit, donec ipsi sit æqualis. Hæ porrò regulæ sic aptari debent, ut A B sit perforanda unâ suâ extremitate in A, ita ut injici queat paxillo, in puncto A defixo, ac circa ipsum rotari: altera verò extremitas B annectenda regulæ BED extremitati B, ita tamen ut circa B liberè circumagi possit. Regula autem BDE in puncto D perforanda quoque erit, ut stylus aliquis acuminatus inseri queat, qui cuspide latus per rectam A D, secum ducat regulas A B, B D E. Denique regula BDE perforanda item erit in puncto E, ut recipiat alium insuper stylum, qui describat circumferentiam ellipsis in plano. Notandum autem est, ad exactam operis exegesin, tria puncta B, E & D in eadem recta linea existere debere, ac à centris istarum perforationum debita intervalla punctorum ab invicem observari.

His itaque sic fabricatis, si ipsi L K regulam adjungamus, eamque sinistrâ immotam teneamus, interea dum stylum puncto D immissum dextrâ ferimus per rectam LK, ab utraque parte centri juxta dictam regulam: describet stylus E supra planum semi-circumferentiam quæsitæ ellipsis. Ideoque si convertantur regulæ A B, B D E in alteram partem ipsius L K, eodem modo alter semissis designabitur. Quæ quidem ex iis, quæ secundo capite ostendimus, perspicua sunt.

Quamvis autem omnium conicarum sectionum delineationes ad Gnomonicam, Catoptricam & Dioptricam æquè deserviunt, ac usum habent singularem: fit tamen ut ellipsis descriptio in quibusdam latiùs pateat, ac usum uberiorem habeat. Quemadmodum in orthographicis sphæræ delineationibus, in ædificiorum fornicationibus, cœlationibus pluteorum, ac aliis compluribus. Hinc quoque oritur, ut illam describendi plures modi extent quàm reliquarum quidem coni sectionum: ita ut consentaneum judicaverimus omnes eos, qui organici sunt ac quorum beneficio ellipses uno ductu describuntur, quantumque ipsi mihi constant hîc recensere. Occurrit autem primò hic modus.

Esto rursus ellipsis describenda circa extremas diametros, seu axes L K, P G. Ad hoc autem præparetur regula E C, ex orichalco vel ligno, ut velis, quæ longitudine æqualis sit ipsi L A seu A K; in eaque notetur punctum D, ita ut E D æqualis sit P A seu A G. Ipsa autem perforetur in punctis E, D & C, sic ut styli inseri queant. quocirca sciendum est, ad hoc regulam EC reverà quidem longitudine paululùm excedere debere rectam LA seu AK, aliàs enim fieri non posset ut in E & C perforaretur. Præterea construatur scipio LCK, simi-

liter ex orichalco, ligno, aliave dura materia, quæ in longitudinem CA pertusa sit fissurâ ejus latitudinis, cujus est crassities styli cylindrici in puncto C regulæ inserti. His ita paratis, si latus scipionis ipsi LK adjungamus, ita ut fissura respondeat ipsi GA; tum verò regula EC stylo D contra latus LK feratur, interea dum stylus C liberè currit per fissuram CA: describet stylus E in plano semissem circumferentiæ quæsitæ ellipseos. quocirca si eodem modo operemur ad reliquam partem, tota circumferentia descripta erit. Quia autem scipio

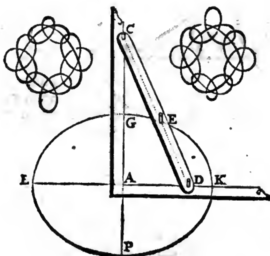


LGK duplicem ita normam repræsentat, manifestum est scipione destitutos, idem nos obtinere quoque beneficio alicujus normæ & regulæ CE, describendo singulis vicibus circumferentiæ ellipseos quartam partem.

Nullam hîc adjungo demonstrationem, quoniam ab aliis adducta est, ac illa etiam ex secundo capite à quovis facilè deduci potest. qui enim caput illud rectè considerat, advertet mecum alium porrò modum ex eo manantem huic haud multò dissimilem, qui sic se habet.

Sit idem rursus præstandum quod supra, fiatque regula CD ejus longitudinis ut in ipsa notari possint tria puncta C, E, D, ita se habentia; ut distantia puncti C ad punctum E æqualis sit semi-axi LA seu AK; distantia verò punctorum E, D à se invicem æqualis semi-

mi-axi G A ſeu A P. Quo facto, perforetur regula in dictis punctis ut ſtyli inſeri queant ipſaque moveri poſſit, ita ut collocata ſemper reperiatur inter duo crura cujuſvis normæ ad angulum G A K adplicatæ, ac ut ſtyli in punctis C & D inſerti contingant perpetuò internè ipſa crura. Hoc enim motu deſcribet ſtylus E uno ductu circumferentiæ ellipſeos quartam partem G E K. Notandum hîc oc-

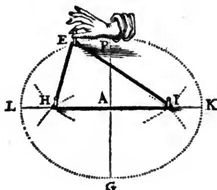


currit præterea ut ritè omnia ſuccedant; in ſuperiori quidem deſcriptione ſufficere, latus ſcipionis L A ſeu A K & fiſſuram A G eam habere longitudinem, quæ eſt diſtantia punctorum D, C in regula; in hac autem, ut crus utrumque normæ ad minimum ejus ſit longitudinis, cujus eſt regula C D.

Quia autem plura ab aliis afferuntur ad deſcriptionem ellipſis, ut modi diſtincti, quæ tamen parum differunt inter ſe, & à prædicto modo nihil habent diverſum, cum ex eodem fonte deriventur: conſultò eos omittendos eſſe duxi.

Cæterùm, cum alius inſuper modus uſitatus ſit, deſcribendi ellipſim in plano circa axes, qui fit beneficio alicujus reſtis vel fili: viſum quoque fuit eum huic noſtro ſubjungere, ne opùs ſit ut aliunde

petatur quidquid ad accuratam hujus lineæ descriptionem desiderari possit.



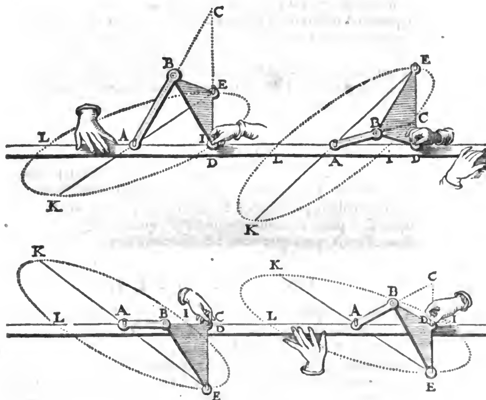
Sit itaque describēda ellipsis circumferentia beneficio fili, circa prædictos axes LK, PG, quorum major quidem est LK, minor verò PG. Describatur ex P vel G, ut centro, intervallo LA seu AK, dimidio majoris axis, arcus circuli secans ipsum axem majorem in punctis H, I; & in H & I defixis duobus paxillis, jungantur extremitates alicujus fili, quod paxillis circumponatur, similiter ut hîc HEI: immisso enim stylo, ac ipso filum in triangulum æquali semper vi extendendo ac circa paxillos circumducendo, describet is in plano lineam curvam LEPKG, quæ circumferentia erit ellipsis. quemadmodum patet ex 52 Propositione libri 3tii Conicorum Apollonii. Quocirca si velimus ut ellipsis circumferentia transeat per puncta L, P, K, & G, curare debemus ut filum extensum pertingat præcisè ad aliquod horum punctorum. Denique sciendum est, loca punctorum H, I, ubi paxilli defixi fuêre ad descriptionem ellipsis, ab effectu Focorum nomine appellari; quorum quidem punctorum consideratio frequens est in Catoptrica & Dioptrica: ut perspicuum est ex iis, quæ sequuntur caput septimum Dioptricæ Viri illustris, Renati des Cartes.

C A-

CAPUT V.

De modo describendi ellipses in plano, circa datas quascunque diametros conjugatas.

OStensis quo pacto ellipsis in plano describi possit circa extremas diametros, congruum videtur & hic ex præcedentibus



similiter ostendere, quibus modis circa ipsa datas quascunque diametros conjugatas in plano designetur.

Sint itaque datæ diametri conjugatæ L I, K E, bifariam sese & decussa-

cuſſatim in centro A ſecantes. Oportet circa ipſas in eodem plano ellipſis circumferentiam deſcribere.

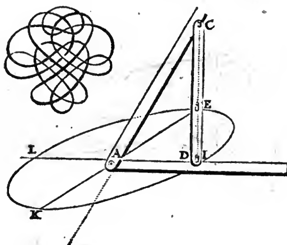
Demiſsâ ex E ſupra L I perpendiculari E D, ponatur E C æqualis L A ſeu A I, ita ut C D æquetur vel aggregato vel differentiæ ipſarum E D, A I, ducaturque recta A C. Diviſâ autem A C bifariam in B, agantur B E, B D; fiatque regula A B ex orichalco aliave materia dura, ſibi annexum habens in puncto B triangulum B E D ex lamina orichalcea aliave ſolida materia paratum, ita tamen ut illud ipſum circa B in plano circumvolvi queat.

Regula porrò A B perforetur extremitate ſuâ in A, ſic ut paxillo in puncto A defixo injici poſſit ac circa id ipſum rotari: quemadmodum etiam agendum eſt circa puncta E & D laminæ, ut nempe in ipſis ſtyli inſeri queant: debet enim in D ſtylus acuminatus inſeri, qui cuſpide latus per rectam A D, ſecum ducat regulam A B, triangulumque B E D; in E autem is, qui deſcribat circumferentiam ellipſis. Quare ſciendum eſt, ut ritè omnia ſuccedant, relinquendum eſſe ſpatiolum aliquod circùm dicta puncta E, D, veluti centra, ut commodè in ipſis inſeri valeant. Poſtquam hæc igitur ita paraverimus, ſtylum D dextrâ duco per rectam A D, tenens interea regulam immotam ſiniſtrâ ipſi A D adjunctam. Atque dum ſic fertur punctum D per rectam A D (quam ab utraque parte puncti A indefinitè protenſam intelligo), ac regula A B rotatur circa punctum A: deſcribet ſtylus E in plano circumferentiam ellipſis quæſitæ. Quod manifeſtum eſt ex iis, quæ capite tertio oſtenſa à nobis ſunt.

Idem aliter.

Iiſdem quæ ſupra poſitis, demiſſaque ex E ſupra L I perpendiculari E D, ipſa ſurſum producatur ad C, donec C D æqualis ſit compoſitæ ex E D, A I, jungaturque A C. Fiat autem jam regula C D, ejus quidem longitudinis, ut in ipſa notari poſſint tria puncta C, E, & D, ſic ſe habentia, ut diſtantia puncti C ad punctum E æquetur ſemidiametro L A ſeu A I; diſtantia verò punctorum E, D ab invicem perpendiculari deductæ E D. Quo facto, perforetur hæc regula in punctis C, E, & D, ut ſtyli inſeri queant; adhibitâque ipſi angulo C A I leſbiâ regulâ (quod apud lignarios frequens eſt inſtrumentum in capiendis angulis), moveatur regula C D inter ejuſdem crura, ita ut ſtyli in punctis C & D inſerti internè contingant perpetuò illa crura.

crura. Fiet enim, ut hoc incessu stylus E uno ductu circumferentiæ ellipsis quartam partem designet. Eodem modo, si Lesbiam regulam C A D ipsi angulo L A C adplicemus, atque regulam inter ejus duo crura internè moveamus, perficietur semi-circumferentia ellip-



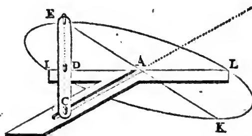
sis. Quod idem si fiat ad reliquam partem diametri L I, descripta erit tota circumferentia ellipsis quæsitæ.

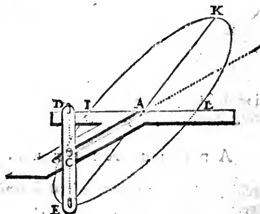
Adhuc Aliter.

Iisdem positis, si A I, E D inæquales inter se fuerint, poterimus aliâ insuper ratione præstare id quod quæritur.

Positâ enim E G æquali A I, ut differentia sit C D, agatur recta per puncta C, A. Tum verò assumptâ rursus regulâ E D C, in qua notata sint tria puncta E, C, & D; ita quidem, ut distantia punctorum E, D ab invicem æqualis sit perpendiculari demissæ E D; distantia autem punctorum E, C æqualis semidiametro A I seu A L, ita ut CD sit ipsarum AI, ED differentia: adhibeatur præterea scipio I C L, qui in longitudinem C A pertusus sit fissurâ C A, quæ quidem cum I L angulos faciat obliquos, æquales angulis IAC, CAL. Hoc

igitur adplicato ipsis rectis I L & C A, perforetur regula ECD in dictis punctis, ut styli inseri queant; ita quidem ut is, qui in C est inserendus, paris sit crassitiei atq; est latitudo fissuræ C A: ut dum regula ECD stylo D contra latus scipionis I L fertur, interea dum stylus C liberè currit per fissuram, ipsa regula CED non vacillet, ac stylum E exactè ellipsis circumferentiam describere efficiat. Atque hâc qui-





dem ratione semissis circumferentiæ designabitur: quocirca ut integra describatur, convertendus erit modò scipio in reliquam partem ipsius L I, atque adplicandus, ut dictum est. Cujus quidem rei demonstrationem non adduco, cum illa ex superioribus perspicua sit, atque à quolibet facilè inveniri possit.

C A-

Caput VI.

De hyperbolis, quæ ex motu implicato in plano, tam circa extremas, quàm alias quascunque diametros conjugatas, describuntur.

SEcent invicem rectæ E K, L I bifariam in puncto A, agantur verò per puncta L, I parallelæ ipsi E K, donec rectis per puncta E, K ductis æquidistanter ipsi L I, occurrant in D, F, H, & M, parallelogrammumque constituant D F H M; ducti autem in eodem diagonii D H, F M utrinque in infinitum producantur. Divisâ porrò A D bifariam in B, jungatur B E: construaturque angulus rectilineus *d b ε*, æqualis angulo D B E in 1^{mâ} & 2^{dâ} figura, aut angulo A B E in 3^{tiâ} aut 4^{tâ} figura; cujus una linearum *b d* (quæ dictum angulum constituunt) æqualis sit ipsi BD; alia autem *b ε* indefinitè versus *ε* sit producta, quæ in puncto *d* insuper sibi annexam habeat regulam *d* E utrinque indefinitè quoq; extensam, & quę circa illud liberè in plano converti queat.

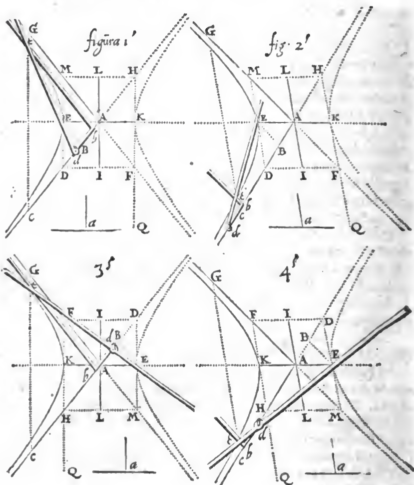
Dico si dictum angulum moveri concipiamus supra planum in recta A D, ita ut *b d* semper adplicata maneat ad A D; regulam autem *d* E perpetuò transire per punctum E, atque secare *b ε* in *ε*: punctum quidem *ε* motu isto describere lineam hyperbolen, cujus centrum est A, transversa diameter K E, recta autem huic conjugata L I, atque asymptoti rectæ DAH, MAF.

Ad hoc autem demonstrandum, ducatur per *ε* recta *c ε* G parallela ipsi D M, secans rectas D H, FM in *c* & G.

[a] Quoniam igitur est *b c* ad A *b*, ut *c ε* ad *ε* G: [b] erit etiam componendo A *c* ad A *b*, ut *c* G ad *ε* G; [c] permutandoque A *c* ad *c* G, ut A *b* ad *ε* G. Ut autem A *b* ad *ε* G, [d] ita est (assumptâ communi altitudine *c ε*) rectangulum A *b*, *c ε* ad rectangulum *c ε*, *ε* G: at verò ut A *c* ad *c* G, [e] ita quoque est BD ad D E, [f] seu (assumptâ communi altitudine DE) rectangulum sub B D, D E ad D E quadratum. Erit igitur [g] ut rectangulum A *b*, *c ε* ad rectangulum *c ε*, *ε* G, ita rectangulum, BD, DE ad D E quadratum. [h] Æquale autem est rectangulum A *b*, *c ε* rectangulo BD, DE: [i] est enim B *d*, hoc est, A *b*, ad *b d*, hoc est, DB, ut DE ad *c ε*. [k] Unde & rectangulum *c ε*, *ε* G quadrato DE æquale erit. Liquet itaque [l] punctum *ε* esse in hyperbola, cujus asymptoti sint rectæ D A H, M A F, diameter transversa EK, recta autem huic conjugata LI, & centrum A. Quia verò hoc in infinitum contingit circa

a ꝑ 2 Sexti Elem.
b ꝑ 18 Quinti Elem.
c ꝑ 16 Quinti Elem.
d ꝑ 1 Sexti Elem.
e ꝑ 4 Sexti Elem.
f ꝑ 1 Sexti Elem.
g ꝑ 11 Quinti Elem.
h ꝑ 16 Sexti Elem.
i ꝑ 4 Sexti Elem.
k ꝑ 14 Quinti Elem.
l ꝑ conversâ 10 Secundi Conic. Apollonii.

punctũ ε, secundùm ea quæ proposuimus: sequitur intersectione continuâ rectarum *b ε*, *ε d* punctum ε motu isto in plano lineam hyperbolen describere, circa diametros EK, LI. Quod ostendendum erat.



Manifestum præterea est, si transferamus regulam *d* E ipsamque transire concipiamus per punctum K, postquam conversus sit angulus *d b ε* in alteram partem rectæ AD, aliam similem lineam hyperbolen in plano, huic oppositam, eâdem viâ describi.

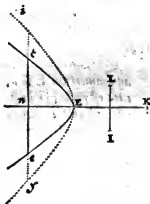
SCHO-

SCHOLIUM.

Sicuti sub genere ellipsium circulus quoque comprehendi solet, atque pro certa ejus specie assumi; quippe in quo latus transversum æquale est lateri recto: ita quoque in genere hyperbolarum fieri potest, ut certa ibi species determinetur, omnium simplicissima, ad quam cæteræ omnes sint referendæ, hoc est, in qua latus transversum & rectum inter se æquentur.

Quemadmodum igitur in Scholio Capitis secundi usu venit, ut ibidem consideraremus, quam relationem ellipsis habet cum circulo, quod spectat ad eorum superficiem: ita quoque hîc facturi sumus; comparando videlicet figuram contentam sub recta linea & portione lineæ hyperbolæ cujuscunque cum alia figura, contenta similiter sub recta linea & portione lineæ hyperbolæ, cujus nempe latus rectum & transversum inter se æqualia sunt: quia illud à nemine hactenus (quod sciam) animadversum fuit.

Sit itaque ε E e *figura contenta sub recta linea* ε e *& portione lineæ hyperbolæ cujuscunque, cujus quidem axis transversus sit* EK, *rectus autem* LI. *Sit item alia figura* i E y *contenta sub recta linea* i y *& portione lineæ hyperbolæ* i E y, *cujus rectum latus & transversum inter se æqualia existant, ac utrumque æquale lateri transverso* EK *figuræ* ε E e.



Dico, similiter fieri ut in ellipsi, figuram ε E e *ad figuram* i E y *eam habere rationem, quam habet axis rectus* LI *ad axem transversum* EK.

Quoniam enim ad axem EK *ordinatim adplicantur rectæ* n ε, n i; [a] *erit in figura* ε E e, *ut rectum latus ad transversum, ita quadratum* n ε *ad rectangulum* K n E. *Quia autem secundus axis* LI *mediam proportionem habet inter latera figuræ* ε E e: [b] *erit, rectum latus ad transversum, ut quadratum* LI *ad quadratū* EK. [c] *Quamobrem erit, ut quadratum* n ε *ad rectangulum* K n E, *ita quadratum* LI *ad quadratum* EK. [d] *At verò cum latera figuræ* i E y *inter se æqualia existant, & utrumque eorum æquale lateri transverso* EK *figuræ* ε E e: *sequitur quadratum* n i *rectangulo* K n E *æquale esse. Ac idcirco esse quadratum* n ε *ad rectangulum* K n E *seu* [e] *ad quadratum* n i, *ut quadratum* LI *ad quadratum* EK. [f] *ac proinde quoque*

a p 21 Primi Conicorum Apollonii.
b 2 Corol. 20 Sexti Elem.
c p 11 Quinti Elem.
d Ex hypothesi.
e p 7 Quinti Elem.
f p 22 Sexti Elem.

n ε ad n i, ut L I ad E K. *Quoniam autem hoc in infinitum apparet de omnibus aliis rectis n ε, n i, ordinatim adplicatis ad axem* E K *in utraque figura:* g *relinquitur figuram* ε E e *ad figuram* i E y *esse, ut axis rectus* L I *ad axem transversum* E K. *Quod erat propositum.*

g Ex methodo indivisibilium Cavalerii.

Porrò hæc non tantùm locum habent juxta solam considerationem axium, sicuti ea hic fuerunt proposita; verùm etiam secundùm quascunque diametros, quemadmodum ex demonstratione colligi potest. Veruntamen quia in his eundem ferè ordinem quem in ellipsibus placuit nobis servare; ibidem autem ostenderimus cui figuræ rectæ, sub recta linea & portione circumferentiæ ellipsis comprehensæ, æquaretur figura quævis scalena, itidem sub recta lineæ & portione circumferentiæ ellipsis comprehensa: ideo & hic rectè facturos nos existimavimus, si similiter ostendamus cui figuræ rectæ, quæ comprehenditur sub recta linea & portione lineæ hyperbolæ, æqualis sit qualibet figura scalena, pariter sub recta linea & portione lineæ hyperbolæ comprehensa.

Sit ergo figura ε E e *scalena, contenta sub recta* ε e *& portione lineæ hyperbolæ* ε E e, *cujus latus transversum sit* L I, *rectum autem* K Q; *sive cujus transversa diameter sit* E K, *recta autem huic conjugata* L I.

Si itaque ex punctis E, K *alternatim ducantur rectæ* E M, K P *diametro* L I *parallelæ; ac deinde per centrum* A *recta* P A M *perpendicularis ad* ε e, *secans* E M, K P *in* M & P, *rectam autem* ε e *in* m;* *atque denuo circa* P M *quidem ut transversum axem, rectum verò* L I, *describatur linea hyperbole* T M f, *quæ secetur à recta* ε e, *vel ab ipsa in hanc vel illam partem producta in* T & f: *dico figuram* ε E e *figuræ* T M f *æqualem esse.*

* p 7 Caput hujus.

h p 21 Primi Conicorum Apollonii.
i p Corol. 20 Sexti Elem.
k p 15 Quinti Elem.
l Ex constructione.
m p 2 Sexti Elem.

Quoniam enim ordinatim ad diametrum E K *adplicata est recta* H e *in figura* ε E e: [h] *erit ut rectum latus* K Q *ad transversum* K E, [i] *sive quadratum* L I *ad quadratum* K E, [k] *sive etiam quadratum* A I *ad quadratum* A E, *& ita* H e *quadratum ad* K H E *rectangulum.*

Quoniam item [l] *parallelæ sunt* K P, M E & m H: [m] *erit* A E *ad* E H, *ut* A M *ad* M m. *Et sumptis antecedentium duplis, ut* K E *ad* H E, *ita* P M *ad* M m; [n] *componendoque* K H *ad* H E, *ut* P m *ad* m M. [o] *Ut autem* K H *ad* H E, *ita est rectan-*

n p 18 Quinti Elem.
o p 1 Sexti Elem.

ctangulum KHE *ad* HE *quadratum*; *& ut* Pm *ad* mM, *ita est* PmM *rectangulum ad* mM *quadratum.* p *Erit igitur ut rectangulum* KHE *ad quadratum* HE, *ita rectangulum* PmM *ad* mM *quadratum*; q *& permutando rectangulum* KHE *ad rectangulum* PmM, *ut quadratum* HE *ad quadratum* mM, *sive ut quadratum* AE *ad quadratum* AM. *Cum autem ostensum sit, α quadratum* He *ad rectangulum* KHE *esse, ut quadratum* AI *ad quadratum* AE: r *erit quoque ex æquo, ut quadratum* He *ad rectangulum* PmM, *ita quadratum* AI *ad quadratum* AM. *Quia verò in figura* TMf *similiter, ut supra, quadratum* mf *ad rectangulum* PmM *est, ut quadratum* AI *ad quadratum* AM: s *erit quoque quadratum* He *ad rectangulum* PmM, *ut* mf *quadratum ad rectangulum* PmM. *E quibus sequitur* t *quadratum* He *quadrato* mf, *æquale esse. Æquales igitur quoque erunt rectæ* He, mf. *unde & earum duplæ* εe, Tf. *Eadem est demonstratio de omnibus aliis rectis* He, mf, *ordinatim adplicatis in infinitum ad diametros* KE, PM *in utraque figura.* v *Quare constat figuram scalenam* εEe *figuræ rectæ* TMf *æqualem esse. Quod erat propositum.*

p p 11 Quinti Elem.
q p 16 Quinti Elem.
r p 22 Quinti Elem.
s p 11 Quinti Elem.
t p 9 Quinti Elem.
u Ex methodo indivisibilium Cavalerii.

Ex his quæ jam ostensa sunt liquet, figuræ cuilibet datæ, quæ continetur sub recta linea & portione lineæ hyperbolæ, exhiberi posse aliam figuram eidem æqualem, contentam similiter sub recta linea & portione lineæ hyperbolæ, cujus latus transversum & rectum inter se æqualia existunt. Si enim ejusmodi figura fuerit scalena, ut εEe, *ostendimus hic aliam* TMf *ipsi æqualem, quæ quidem est recta. porrò quam rationem hæc habeat ad figurā, sub recta linea & hyperbola comprehensam, cujus latus transversum & rectum inter se æquantur, ex superioribus quoque constat. Manifestum igitur est, cuivis figuræ datæ, quæ continetur sub recta linea & portione lineæ hyperbolæ cujuscunque, exhiberi posse aliam ipsi æqualem, contentam similiter sub recta linea & portione lineæ hyperbolæ, cujus latus transversum & rectum inter se sunt æqualia.*

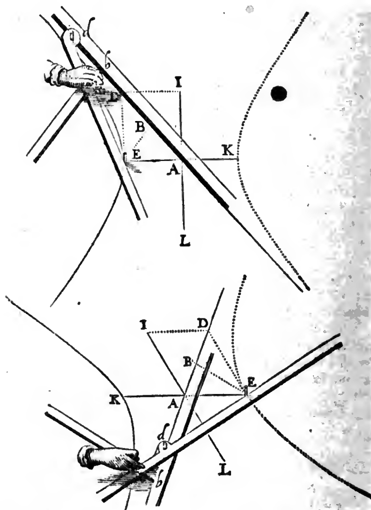
CAPUT VII.

De modo describendi hyperbolas in plano, datis axibus, vel quibuscunque diametris conjugatis.

SIquidem præcedenti capite exposuimus, quo pacto intelligendum sit motu implicato in plano aliquo hyperbolas describi: reliquum est ut ostendamus, quomodo ipsæ in plano, datis axibus, vel quibuscunque diametris conjugatis, describantur.

Den-

Dentur itaque in plano quocunque, EK axis transversus sive diameter transversa, IL autem rectus axis seu recta diameter priori EK conjugata, bifariam sese in centro A secantes.



Oportet in eodem plano lineam hyperbolen describere, cujus axes, diametrivè conjugatæ sint, quos diximus.

Ductâ

Ductâ igitur ex puncto I rectâ I D parallelâ ipsi K E, secante ductam ex E parallelam ipsi L I in D, agatur recta A D, eaque utrinque indefinitè protendatur. Porrò sectâ A D bifariam in B, connectatur recta B E. Fiatque ex orichalco, ligno, aliâvè materiâ solidâ norma, angulusvè obliquus rectilineus *d b ε*, æqualis angulo D B E aut ABE; cujus unum quidem crus *b d* æquetur ipsi BD; alterum autem *b ε* indefinitè versus *ε* sit extensum, qui puncto *d* sibi præterea annexam habeat regulam *d* E utrinque indefinitè quoque extensam, & quæ circumcirca illud liberè circumvolvi queat. His ita constructis, si feratur angulus *d b ε* per rectam A D, ita ut crus ejus *b d* applicatum perpetuò teneatur contra regulam, ipsi AD adjunctam; interea dum regula *d* E rotatur circa *d*, quam assiduè per punctum E transire cogimus: describent crus *b ε* regulaque *d* E, continuâ illâ intersectione *ε*, in plano lineam curvam, hyperbolen dictam; cujus quidem axis, diametervè transversa sit K E; recta verò huic conjugata L I. Notandum autem occurrit, si aptè & accuratè omnia exsequi velimus; perforandam quidem esse regulam *d* E in *d*, ita ut punctum *d* margini ejusdem exactè respondeat, ac ipsa paxillo, circa quem rotari possit, in extremitate *d* cruris *b d* dicti anguli *d b ε* extructo, injici queat. Similiter in E supra planum figendum esse paxillum, cui regula *d* E (quam transire semper oportet per E) suâ margine, in qua punctum *d* situm est, incumbat. Denique stylo acuminato uti erit necesse ad designandam puncti *ε* intersectionem.

Atque ut quidem ratione adductâ, datis axibus, diametrisvè conjugatis, lineam hyperbolen describi constat: ita similiter, si transferamus regulam *d* E ac ipsam transire faciamus per punctum K, postquam conversus fuerit angulus *d b ε* in alteram partem rectæ AD, alia quoque similis linea hyperbole huic opposita, eosdem axes, diametrosvè habens, designabitur.

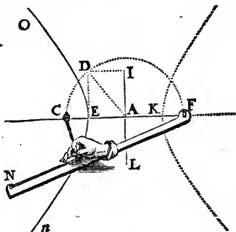
IDEM ALITER, DATIS AXIBUS.

Quia alius porrò modus occurrit, describendi hyperbolas in plano, datis axibus, beneficio alicujus restis vel fili, qui originem ducit ex 5[ta] prop[ne] libri 3[tii] Conicorum Apollonii: placuit paucis eum hîc exponere. Is autem sic se habet.

Proponatur itaque rursus linea hyperbole describenda, cujus axis transversus sit EK, rectus autem ipsi conjugatus IL, qui sese bifariam & ad angulos rectos secent in A.

Vv Ductâ,

Ductâ, ut ante, ex I rectâ I D æquidistante ipsi K E, donec secetur à recta ex E ductâ parallelâ cum L I in D, agatur recta A D; centroque A intervallo A D semicirculus describatur C D F, secans hinc inde E K productam in C & F. Porrò defixis in punctis C & F duobus paxillis, annexoque extremitati N longæ regulæ N F extremo alicujus fili N ε C, ipsâ N F paulò breviori, perforetur altera ejus extremitas, ac ita paxillo F injiciatur; filum verò N ε C altero extremo paxillo C nectatur. His ita peractis, si immisso stylo ducatur filum N ε C juxta regulã N F, initio facto in *n* extremo fili, stylusque deducatur ad E, ita ut pars fili N ε semper veluti agglutinata teneatur regulæ: describet is in plano lineam curvam *n* ε E, quæ portio erit lineæ hyperbolæ. Quocirca si velimus, ut hoc ipso modo hyperbole in plano designetur, cujus quidem axis transversus sit E K, rectus autem L I, ut propositum est: curandum erit, ut longitudo regulæ N F longitudinem fili N ε C exactè superet quantitate axis: sive etiam, ut dum stylus ita deducitur, qui curvam lineam designat, ipse accuratè pertingat ad punctum E. Cæterùm si transferatur regula ad partem reliquam rectæ C F versùs O, eodem modo alia portio O E designabitur. Quòd si autem regula ex F ad C, & filum ex C ad F transferantur, alia præterea similis linea hyperbole, huic opposita eorundemque axium, describetur.



Tandem sciendum est, punctis C & F, descriptioni hyperboles inservientibus, focorum nomen ab autoribus impositum fuisse, sive etiam ipsa puncta urentia dici, ab effectu quem habent specula & vitra ad hanc figuram expolita. Vide ea quæ post caput septimum tractat vir Nobilissimus & Clarissimus Renatus Des-Cartes in sua Dioptrica.

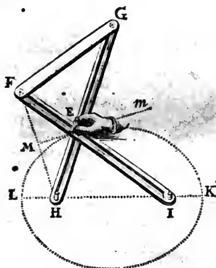
C A-

CAPUT VIII.

De modo describendi ellipses in plano, datis focis, & utroque vertice.

INter modos ellipseos describendæ varios non minùs expeditus est is, qui procedit ex datis focis & utroque vertice: quamobrem rationi consentaneum fore existimavi, si post modos jam ostensos, quibus ellipses in plano designantur, datis extremis vel etiam quibuscunque diametris conjugatis, tradam quoque quo pacto ipsæ in plano, datis focis & utroque vertice, describantur. Processus autem talis est.

Dentur in plano aliquo foci H & I, vertex alter L, alter autem K, ita ut axis transversus sit LK: oportet in eodem plano ellipsis circumferentiam describere, cujus foci & vertex uterque sint, quos diximus.



Præparentur ex orichalco, ligno, aliàve solida materia regulæ tres HG, GF, & FI; quarum quidem HG & FI singulæ æquales sint axi LK; ipsa autem FG æqualis distantiæ HI focorum ab invicem: regulæ verò HG, FI in longitudinem pertusæ sint fissurâ, quæ quidem ejus sit latitudinis, cujus est crassities styli cylindrici inserēdi, quo circumferentia ellipsis sit designanda. Cæterùm, perforentur quoque regulæ HG, FI in extremitatibus suis H, I, ita ut paxillis in H & I defixis injici queant; earundem verò extremitates G, F extremitatibus regulæ FG annectantur, eamque positionem habeant, quam in apposita figura videre

 dere

dere licet. His ita fabricatis, si stylus in utramque fissuram immissus, (hoc est, in E, communem intersectionem regularum HG, IF) circumferatur, secum ducens regulas HG, IF rotantes circa puncta H, I, describet is prout ab L versùs K defertur semi-circumferentiam LEK ellipseos quæsitæ. Quo quidem modo & alter semissis perficietur.

Quòd autem hâc ratione stylus circumductus E circumferentiam ellipsis describat, cujus foci sint H, I, & vertex uterque LK: ita liquet.

Jungatur recta FH. Quoniam itaque triangula FGH, FIH duo latera FG, GH duobus lateribus HI, IF utrumque utrique æqualia habent, basin verò FH communem: [a] habebunt quoque angulum FHG angulo HFI sub æqualibus rectis lineis contentum æqualem.

a p 8 Primi Elem.

Cum igitur trianguli FEH anguli ad H & F æquales inter se existant, [b] erunt & subtensa latera FE, EH inter se æqualia. Æqualis itaque est FI ipsis HE, EI simul sumptis. [c] Est autem FI æqualis axi LK. Unde æquales quoque erunt HE, EI ipsi axi LK. Liquet ergo punctum E esse in ellipsis circumferentia, cujus foci sint H, I, & vertex uterque puncta L, K. Quia autem hoc in infinitum ita constat de puncto E, in quavis alia instrumenti constitutione: [d] sequitur ejusmodi motu stylum E circumferentiam ellipsis quæsitæ describere.

b p 6 Primi Elem.

c Ex constructione.

d p Conversâ 52 Tertii Conicorum Apollonii.

Sequitur præterea, si bifariam secetur recta HF in M, & recta connectatur ME, ipsam contingere ellipsin in puncto E.

Æqualia enim sunt latera ME, FE trianguli MEF lateribus MH, HE trianguli MEH; & basis ME utrique triangulo est communis: [e] quamobrem & anguli MEF, MEH inter se æquales erunt. [f] Est autem

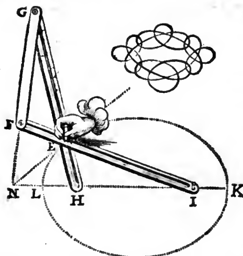
e p 8 Primi Elem.

f p 15 Primi Elem.

tem angulus MEF angulo *m* EI æqualis, quòd sint secundùm verticem. Æqualis igitur quoque erit angulus MEH angulo *m* EI, atque adeò recta ME*m* ellipsin contingens in E, per conversam 48 Prop. libri 3tii Conicorum Apollonii. Quod erat propositum.

SCHOLIVM.

Colligitur ex methodo allatâ ratio facillima ducendi rectam, quæ ellipsin in quovis dato puncto circumferentiæ contingat. Sit enim, exempli gratiâ, in puncto E *ducenda recta ellipsin contingens. Agatur ex alterutro foco* H *vel* I, *puta* I, *per* E *recta* IEF *æqualis axi* L K, *conjunganturque focus alter* H *& extremitas hujus rectæ* F, *rectâ* HF: *si namque bifariam sectâ hâc rectâ in* M, *puncta* M, E, *rectâ lineâ connectantur, continget hæc ellipsin in* E.



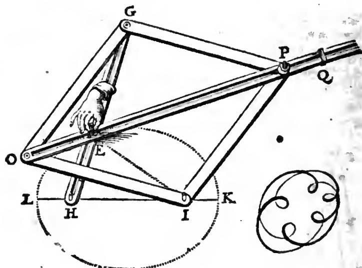
Vel etiam in hunc modum.

Educantur ex utroque foco H, I *per* E *recta* HEG, IEF, *quarum unaquaque axi* L K *æqualis sit, jungaturque* GF. *Si igitur* GF *æquidistans fuerit ipsi* HI, *quod quidem accidet cùm punctum* E *extremitatem referet minoris axis: recta, quæ per* E *ipsi* HI *ducitur parallela, ellipsin in* E *continget. Si verò* FG, HI *non fuerint parallelæ, producantur ambæ donec concurrant in* N, *recta enim quæ ab* N *ad* E *perducitur, similiter ellipsin in* E *continget. Vt erat propositum.*

IDEM ALITER.

Iisdem quæ supra positis, assumantur præter regulam HG aliæ quatuor regulæ æquales GP, PI, IO, & OG longitudinis cujuslibet, modò tamen ea minor non sit quàm LI seu HK; ipsæque extremitatibus sibi invicem nectantur, ita ut rhombum, quadratumvè GPIO re-

repræſentent. Ubi autem ipſæ in G connexæ ſunt, connectantur & ſimul cum extremitate G regulæ HG: ubi verò in I ſibi invicem ſunt annectendæ, iiſdem locis perforentur, ut paxillo in I defixo injici queant, hâcque ratione connexæ habeantur; porrò ubi in O connexæ



ſūt, ipſis alia inſuper annectatur regula OPQ versùs P indefinita, quæ in longitudinē pertuſa ſit longo canali ſeu fiſſurâ, ejuſdem latitudinis cujus eſt fiſſura regulæ HG. Siquidem autem dicta regula medio ſuo tranſire perpetuò requiritur per P, non è re fuerit perforare regulas G P, I P in P, ita ut in ipſas paxillus inſeri queat, quo ſimul in P connexæ teneantur, paris quidem craſſitiei atque latitudo fiſſurarum, conſtans ſubtus ex lamella, ſuperiùs verò in cochleam extructus; ita ut, poſtquam regulæ G P, IP, & O P eidem injectæ fuerint, atque his alia lamella foramine pertuſa ſuperimponatur, dictæ regulæ cochleâ inter lamellas contineantur. Denique annulo quadrangulo regulam O P circundare oportebit extra P, qui arctè eam circumplectens ulteriùs quoque ſi opùs ſit amoveri poſſit, nec ſinat ut fiſſura in aliam evadat latitudinem. His ita conſtructis, ut ad deſcriptionem ellipſeos accedamus, ſumatur ſtylus aliquis cylindricus, ejus quidem craſſi-

crassitiei cujus est latitudo utriusque fissuræ, isque in fissuram utramque immittatur, utpote in E quò secant invicem regulæ H G, O P, deferaturque ab L versùs K, prout à jam dictis regulis tenetur: quo opere designabitur quidem in plano semissis circumferentiæ ellipsis quæsitæ. Similiter autem alter semissis absolvetur. Ratio hujus negotii perfacilis est. Ducatur enim recta I E.

Cum igitur triangulorum GPO, OPI duo latera OG, GP duobus lateribus OI, IP utrumque utrique æqualia sint, basis verò OP utriq; triangulo communis: [a] erunt quoque α anguli GPO, OPI, sub æqualibus rectis lineis contenti, æquales. Porrò cum duo triangula GPE, EPI duo latera G P, P E duobus lateribus I P, P E utrumque utrique æqualia habeant, est namque E P utrique communis; habeant verò & angulum G P E angulo E P I sub æqualibus rectis lineis contentum æqualem (α ut jam est ostensum): [b] habebunt quoque basin GE basi E I æqualem, β angulumque G E P angulo P E I, sub quibus æqualia latera subtenduntur. Æqualis itaque est H G ipsis H E, E I simul sumptis; est autem H G ex constructione æqualis axi L K: æquales ergo quoque erunt H E, E I ipsi axi L K, atque adeò punctum E in ellipsis circumferentiã cadet, cujus foci H, I, & axis major est LK, per conversam 52dam Prop. libri 3tii Conicorum Apollonii. Quia verò hoc similiter constat de omni puncto E in qua libet alia instrumenti constitutione, relinquitur hâc viâ stylum E circumferentiam quæsitæ ellipseos describere. Quod præstare opus erat.

a p 8 Primi Elem.

b p 4 Primi Elem.

Habet autem hæc methodus hoc sibi peculiare, ut inter describendum regula O P assiduè designet quoque lineam, quæ ellipsin in quovis circumferentiæ puncto E contingat. Quod quidem sic liquet.

Quoniam enim anguli G E P, P E I æquales sunt, (ut modò ostendimus,) [c] angulus verò G E P angulo O E H æqualis, cum sint ad verticem: erit etiam angulus P E I angulo O E H æqualis, atque ita recta O P ellipsin L E K contingens in E, per conversam 48vam Propnem libri 3tii Conicorum Apollonii. Ut proponebatur.

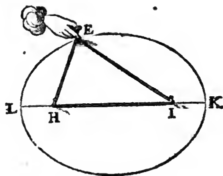
c p 15 Primi Elem.

Aliter, vulgari modo.

Isdem positis, ostendendum est ut propositum vulgari modo perficiatur.

Defixis itaque paxillis in H & I, filum capiatur quod duplicatum nexis.

nexis extremitatibus longitudinem L I vel H K adæquet, illudque paxillis circumponatur: fiet enim, si immisso stylo filum extendatur



in triangulum, æquali semper vi, atque ita stylus circa paxillos circumducatur, ut is circumferentiam L E K quæsitæ ellipseos in plano describat.

Caput IX.

De modo describendi hyperbolas in plano, datis focis & vertice.

Tametsi promptè variis modis hyperbolæ quoque in plano describuntur, infimo tamen loco non habendus est is, quo ex datis focis & vertice ipsæ in plano delineantur. Similiter igitur sicut in ellipsi factum fuit, ubi, postquam docueramus quibus modis, datis extremis vel etiam quibuscunque diametris conjugatis, ipsæ in plano describerentur, ostendimus quâ viâ ex datis focis & utroque vertice decircinandæ essent: ordo postulat ut & idem circa hyperbolas instituamus, præsertim cum præsentes modi iis, quos circa eandem de ellipsi Propositione dedimus, consentiant. Ut ex sequentibus patebit.

Dentur igitur in plano quocunque foci C, F, & vertex E. Oporteatque in eodem plano lineam hyperbolen describere, cujus C & F sint foci, vertex autem E.

Ponatur KF æqualis C E, ita ut axis transversus sit E K; præparentur-

turque ex orichalco, ligno, aliavé dura materia regulæ tres CD, DG, & G F; quarum quidem C D, G F unaquæque axi E K; reliqua verò D G intervallo focorum æqualis sit. Intelligi tamen volo, ut regulæ CD, GF ultra C & G indefinitè sint extensæ ac longæ, itemque per-

tusæ fissurâ ejus latitudinis, quæ est crassities styli cylindrici inserendi, quo hyperboles linea delineanda erit. Præterea perforari debent hæ regulæ in C & F, ut paxillis in C & F defixis injici queant, in D & G autem ipsæ connectendæ sunt cum regula D G, quemadmodum per appositam figuram conspicere licet. Quo facto, si immittatur stylus in utramque fissuram, nempe in e punctum communis intersectionis regularum C D, G F, isque deferatur secum ferens regulas CD, GF rotantes circa puncta C, F, prout ab E versùs e fertur: de-

scribet in plano lineam curvam E ε, quæ portio erit lineæ hyperbolæ. Quod quidem similiter ita se habet ad alteram partem rectæ CF. Si verò prædictæ regulæ CD, GF ad reliquam partem ultra D & F indefinitè quoque intelligantur extensæ, non minùs alia linea hyperbole huic opposita, eosdem focos, axemque habens, describetur.

Demonstrandum itaque est ratione ostensâ stylum ε lineam quæsitam hyperbolen describere, hoc est, cujus foci sunt puncta C, F, vertex autem punctum E.

Jungatur enim CG.

Quoniam igitur triangula CDG, CFG duo latera CD, DG duobus lateribus GF, FC utrumque utrique æqualia habent, basin verò CG communem: [a] habebunt quoque angulum DCG angulo CGF, sub æqualibus rectis lineis contentum, æqualem. [b] Quia autem anguli DCG, GCε duobus rectis sunt æquales, nec non anguli CGF, CGε; anguli autem DCG, CGF inter se æquales sint ostensi: sequitur quoque angulos GCε, CGε inter se æquales esse. Cum igitur trianguli CGε anguli GCε, CGε æquales inter se existant, [c] erunt similiter latera subtensa Gε, Cε inter se æqualia. Major itaque erit εF quàm εC, rectâ GF; atque est quidem GF ex constructione axi EK æqualis: quocirca punctum ε erit in linea curva, hyperbole dicta, cujus foci sunt puncta C & F, vertex autem punctum E, ut liquet ex conversa 51ma Propne 3tii libri Conicorum Apollonii. Siquidem verò rectæ CD, GF versùs ε indefinitè se mutuò secare possunt, atque eadem semper ratio constat puncti intersectionis ε: manifestum est ejusmodi motu quæsitæ lineæ hyperboles portionem in plano describi. Quòd erat faciendum.

a p 8 Primi Elem.
b p 13 Primi Elem.
c p 6 Primi Elem.

Simile in hunc modum inferre licet de alia linea hyperbole, huic opposita, verticem habente in K.

Infertur præterea, si bifariam secetur recta CG in H, rectam connectentem puncta H, ε, hyperbolen in ε contingere.

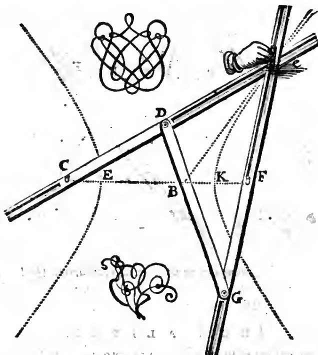
Æqualia enim sunt latera HC, Cε trianguli HCε, lateribus HG, Gε trianguli HGε, & basis Hε utrique triangulo communis est: [d] quamobrem & anguli HεC, HεG sub æqualibus rectis lineis contenti inter se æquales sunt; adeoque recta Hε hyperbolen contingens in puncto ε, per conversam 48vam Propnem libri 3tii Conicorum Apollonii. ut proponebatur.

d p 8 Primi Elem.

SCHO-

SCHOLIUM.

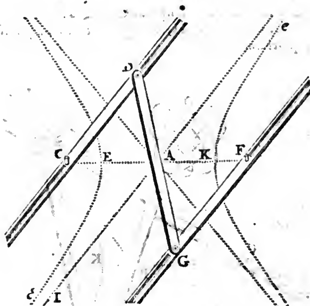
Perspicuum est, ex adducta methodo facilè rectam lineam duci posse, quæ curvam hyperboles tangat in dato quolibet puncto. Si enim in e, verbi gratiâ, ducenda sit tangens curvam hyperboles e E, agantur ab e ad C & F *recta* E C, E F; *auferaturque ex majori* e F *recta* e G *ipsi minori* e C *æqualis, ut differentia sit* GF, *connectaturque* CG. *Quo facto, si bifariam secetur* CG *in* H, *jungaturque* e H, *continget hæc curvam hyperboles* e E *in* e, *sicut requirebatur.*



Quod etiam in hunc modum fieri potest.

Agantur à puncto e *ad puncta* C, F *recta* e C, e F; *& ab* e C *quidem auferatur* C D *æqualis axi* E K; e F *verò tantundem producatur ad* G, *ut nimirum* GF *axi* EK *æqualis sit; ducaturque* D G, *secans* C F *in* B: *similiter enim ut ante, recta quæ à* B *ad* e *perducitur, hyperbolen in* e *continget.*

Notandem denique in hac methodo cùm regulæ CD, GF *sunt parallelæ nec ullam intersectionem admittunt, qualem diximus: tum rectam* IA, *quæ per centrum* A *alteri ipsarum* CD, GF *æquidistans ducitur, esse alteram ex asymptotis, seu quæ cum curvis dictarum hyperbolarum propiùs qui-*



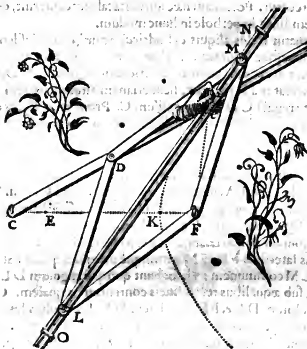
dem semper accedit, nunquam tamen cum ipsis concurrit. Quod itidem de altera asymptoto intelligi debet, postquam punctum C *regulæ* CD *in* F, *punctum verò* F *regulæ* GF *in* C *translatum fuerit.*

IDEM ALITER.

Iisdem quæ supra positis, assumantur præter regulam CD aliæ quatuor æquales DM, MF, FL, & LD, longitudinis cujuslibet majoris quàm KF, (requiritur autem cum hyperbola ex numero sit earum linearum, quæ in infinitum augentur, nec unquam fines suos committat; ut illa minor non existat quàm semissis axis recti: aliàs enim semper non nisi ejus portio quædam describetur); ipsæque cum extremitatibus sibi invicem nectantur in formam rhombi, quadrativè

DMFL.

DMFL. Ubi autem in D connexæ sunt, annectantur & simul regulæ CD in puncto D; ubi verò in F sibi invicem annectendæ sunt, iisdem locis perforentur, ut paxillo in F defixo injici possint, atque hâc ratione simul nexæ habeantur. Porrò quandoquidem per L, & M regulam aliquam medio suo assiduè transire oportet, utrinque indefinitè extensam: gemina in eum finem sumatur regula utrinque indefinitè extensa, perforenturque prædictæ regulæ in extremitatibus suis



L, M, ita ut paxillis injici queant, ejusdem crassitiei ac fissuræ regulæ CD. Conducet autem hosce paxillos subtus fieri ex lamella, superiusque in cochleam extructos esse; ut non solùm hâc ratione connexioni quatuor dictarum regularum inserviant, verùm etiam ut si præter his impositam regulam geminam alia adhuc lamella foramine pertusa illis superimponatur, dictæ regulæ omnes inter lamellas cochleâ contineantur. Quæ quidem ex accurata figurarum contempla-

 tio-

tione perſpicuiora evadunt, quàm ut multis verbis explicentur. Cæterùm oportebit annulis duobus quadrangulis O, N regulam L M circumdare, qui arctè eam amplectentes propiùs aut remotiùs, ut opus exiget, amoveri valeant: quibus regula gemina ita dictos paxillos continere cogatur, ut velut hiulcata ſit ac in longitudinem fiſſuram præ ſe ferat latitudinis paris atque regulæ C D. Fiet enim ſemper, ut, ſi per medium fiſſuræ hujus regulæ utrinque indefinitè extenſæ recta linea ducatur, ipſa perpetuò tranſeat per puncta L, M, ſicuti requirebatur. Poſtquam hæc igitur ita fabricata fuerint, deſignabitur quidem linea hyperbole in hunc modum.

Sumatur ſtylus aliquis cylindricus acuminatus ejuſdem craſſitiei, quæ utriuſque fiſſurarum, iſque in utramque fiſſuram immittatur, videlicet in *e* communem interſectionem regularum C D, L M; ipſeque deferatur à K verſùs *e*, ſicut etiam in alteram partem rectæ C F, rotante regulâ C D circa paxillum C. Prout enim ſtylus ejuſmodi à jam dictis regulis tenetur, deſcribet motu illo in plano quæſitam lineam hyperbolen *e* K.

Similiter autem ſi regulæ D M, M F, F L, & L D majores aſſumptæ fuerint ſemiſſe axis recti, regulaque C D ultra C indefinitè extenſa: regulæ C D, L M mutuâ interſectione versùs C aliam lineam hyperbolen huic oppoſitam, eoſdem axes, focoſque habentem, deſcribent. Quod quidem in hunc modum demonſtratur. Jungatur F*e*.

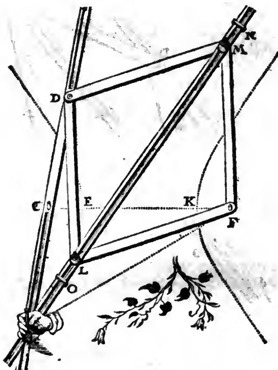
Quoniam itaque triangula D L M, F L M duo latera L D, D M duobus lateribus F L, F M utrumque utrique æqualia habent, baſin verò L M communem: [d] habebunt quoque angulum D L M angulo F L M, ſub æqualibus rectis lineis contentum, æqualem. Cum igitur triangulorum D L *e*, F L *e* duo latera D L, L *e* duobus lateribus F L, L *e* utrumque utrique æqualia ſint (eſt enim L*e* utrique triangulo commune;) habeant verò & angulum D L *e* angulo F L*e*, ſub æqualibus lateribus contentum, æqualem, ut jam oſtenſum eſt: [e] habebunt quoque baſin D*e* baſi *e*F æqualem, angulumque D *e* L angulo L *e* F, ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur. Major itaque eſt C *e* quàm *e* F, ipsâ C D; eſt autem C D æqualis axi E K, ex conſtructione. Liquet ergo ex converſa 51ma Propne libri 3tii Conicorum Apollonii, punctum *e* eſſe in linea curva, hyperbole dicta; cujus foci ſunt puncta C & F; vertex autem punctum K. Quia verò rectæ C D, L M ita in infinitum ſe mutuò ſecare poſſunt, atque eadem ſemper ratio conſtat de puncto interſectionis *e*: manifeſtum eſt, ejuſmodi motu portio-

d p 8 Primi Elem.

e p 4 Primi Elem.

tionem lineæ hyperbolæ in plano deſcribi. Sicut faciendum proponebatur. Similis eſt ratio de alia hyperbola huic oppoſita, verticem habente in E.

* Speciale autem hic modus illud præ ſe fert advertendum, ut inter deſcribendum regula LM continuò deſignet lineam rectam, quæ hy-

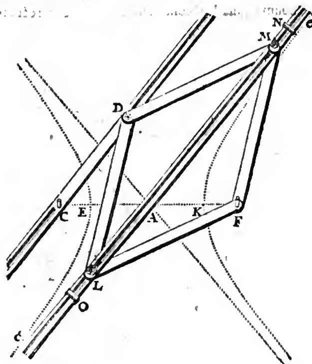


berbolen in quocunque curvæ puncto ſ contingat. Hoc enim liquet è converſa 48va Propne libri 3tii Conicorum Apollonii, propter æqualitatem angulorum C ſ L, L ſ F, quam modò demonſtravimus.

Notandum denique in hac methodo, cùm regulæ CD, LM ſunt parallelæ, ac nullam interſectionem admittunt, qualem diximus: regulam LM eo caſu alteram ex aſymptotis referre, id eſt, rectam

lineam.

lineam per medium ejus fissuræ ductam, propiùs quidem hinc inde cum curvis dictarum hyperbolarum semper accedere, nunquam ta-

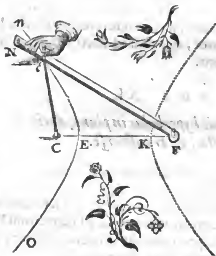


men cum ipsis concurrere. Id quod similiter de altera quoque asymptoto intelligendum est.

ALITER.

QUod autem propositum est licebit insuper aliâ ratione cum illustri viro Renato des Cartes in hunc modum exequi. Defixis in C & F duobus paxillis, capiatur filum C s N; illudque altero extremo, paxillo C annecte; altero verò extremo, extremitati N regulæ N F, ipsâ C F longioris; quæ prædictum filum, postquam ita nexum fuerit, longitudine superet, quantitate axis EK. Deinde perfore-

perforetur altera extremitas hujus regulæ, ut paxillo F injici queat, ac circa illum in plano rotari. Fiet enim, ut, immisso stylo eoque delato ab *n* extremo fili ad E, interea dum pars fili N ε velut agglutinata tenetur regulæ N F, rotanti circa F, quæsitæ lineæ hyperbolæ portio *n* ε E in plano describatur, hoc est, cujus foci sint C & F, vertex autem E. Translatâ verò regulâ ad alteram partem lineæ CF, eodem modo reliqua hyperbolæ portio E O designabitur. Quòd si autem regula ex F in C, & filum ex C in F transferantur, alia insuper hyperbolæ portio huic opposita describetur, habens eosdem focos, & verticem K. Quæ quidem, tum per conversã 51mam Propnem 3tii libri Conicorum Apollonii, tum quòd inter rectas C ε, ε F eadem semper differentia, quę inter C ε, ε N & F ε, ε N seu F N existit, manifesta sunt.



Denique si indefinitè lineam hanc ulteriùs versùs *n* & O describere lubet, oportebit tantùm regulam F N longiorem assumere, sicuti etiam filum C ε N tantundem augere: extendetur quippe hæc linea eò longiùs, quò major augmentatio hæc fuerit.

Caput X.

De modo describendi ellipses in plano, datis latere recto, & transverso.

Quoniam in ellipsi secunda diameter media proportionalis est inter latera figuræ, esto itaque ut in figura capitis tertii pag 314. latus rectum datum KQ, transversum verò KE; sive sit K E diameter ellipsis, K Q autem linea juxta quam possunt, quæ ordinatim ad diametrum

metrum K E adplicantur. Detur præterea angulus *a*, quem ordinatæ constituere debent ad KE. Oporteatque ellipsin in plano describere.

Sectâ igitur bifariam diametro K E in A, inveniatur inter K Q & KE media proportionalis LI, eâque ordinatim adplicatâ ad KE in A, ita ut cum ea angulum faciat æqualem dato *a*: erit ipsa secunda diameter, priori K E conjungata. Quo facto, circa diametros K E, L I ellipsis describatur, quemadmodum capite quinto tradidimus, factumque erit quod quæritur. Ideoque si angulus, quem ordinatæ constituere debent ad diametrum, fuerit rectus; referent rectæ L I, KE axes seu extremas diametros, quo casu ad descriptionem ellipsis caput quartum sequendum erit.

CAPUT XI.

De modo describendi hyperbolas in plano, datis latere recto, & transverso.

SIquidem & in hyperbolâ secunda diameter media proportionalis est inter latera figuræ, sit ergo ut in figura capitis sexti pag. 332. latus rectum datum K Q, transversum verò K E; sive sit KE diameter hyperbolæ, & K Q linea juxta quam possunt, quæ ad diametrum K E ordinatim adplicantur. Detur porrò angulus *a*, quem ordinatæ constituere debent ad KE. Oporteatque hyperbolen in plano describere.

Divisâ itaque bifariam diametro K E in A, inveniatur inter K Q & KE media proportionalis LI, eâque ordinatim adplicatâ ad KE in A, ita ut cum ipsa angulum efficiat æqualem angulo dato *a*: erit ipsa secunda diameter, priori K E conjugata. Deinde datis diametris KE, L I, describatur hyperbole K *ε*, quemadmodum capite septimo traditum est, factumque erit, quod imperabatur.

Eodem modo describetur quoque hyperbola E *ε* priori K *ε* opposita, ut ex eodem capite est manifestum.

CAPUT XII.

De modo describendi hyperbolas in plano, per datum punctum, circa datas positione asymptotos.

CÆterùm cum frequentissimè occurrat hyperbole describenda in plano, circa datas positione asymptotos, quæ transeat per datum

tum

tum punctum: visum quoque fuit modum subindicare, quo illud Organicè expediri possit.

Repetitâ itaque figurâ capitis sexti pag. 332, in eaque datis positione rectis lineis A D, A M, & puncto intra ipsas E, oporteat per E, circa asymptotos A D, A M, hyperbolen in plano describere.

Ducatur ex E alteri ipsarum AD, AM, puta AM, recta æquidistans EB, secans alteram AD in B; deinde assumptâ BD æquali AB, agatur D E, eaque producatur donec secet AM in M; junctâ autem EA, producatur hæc ipsa ad K, ut AK sit æqualis AE: & per punctum A ducatur ipsi D M æquidistans ac æqualis IL, quæ à KE bifariam secetur in A. His ita existentibus, si assumptis rectis KE, IL, ceu axibus, vel quibuscunque diametris conjugatis, per E, tanquam verticem, hyperbole describatur, quemadmodum capite 7mo ostensum fuit: factum erit quod imperabatur.

Sed jam tempus est, ut nonnulla quoque de parabola in medium afferamus, & de modis eam Organicè in plano describendi. Præmittimus itaque in demonstrationem eorum quæ sequuntur, sequens

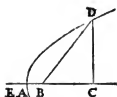
L E M M A.

SIT parabole, cujus axis quidem A C, *vertex verò* A, *& à quopiam in sectione puncto D adplicetur ad* AC *recta ordinatim* D C. *Abscindatur autem ex axe ab* A *vertice linea* AB, *æqualis quartæ parti lateris recti, jungaturque* BD. *Dico hanc æqualem fore lineæ* E C, *quæ tum ex* E A *lateris recti quarta parte, tum ex AC componitur.*

[a] *Quoniam enim quadrata* A C, A B *simul sumpta æqualia sunt rectangulo bis sub* C A, A B *comprehenso, unà cum quadrato* B C: *erit quadratum* B C *æquale quadratis* A C, A B, *dempto iisdem rectangulo bis sub* C A, A B. *Cum autem* A B *ex hypothesi sit quarta pars lateris recti,* [b] *erit quoque rectangulum sub* C A, A B *rectanguli quod continetur sub* C A *& latere recto parabolæ quarta pars; hoc est, rectangulum bis sub* C A, A B *æquale erit semissi rectanguli, comprehensi sub* C A *& latere recto. Æquale igitur erit quadratum* B C *qua-*

a p 7 Secundi Elem.

b p 1 Sexti Elem.

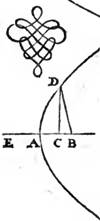


quadratis A C, A B, *minus semisse rectanguli sub* C A *& latere recto. Quocirca si utrobique commune addatur quadratum* C D, [c] *erit quadratum* B D *æquale quadratis* AC, AB, *minus semisse rectanguli sub* C A *& latere recto. At cum* [d] *quadratum* CD *æquale sit rectangulo sub* C A *& latere recto, quadrata* A C, A B, CD, *multata semisse rectanguli sub* C A *& latere recto, æquivalebunt quadratis* A C, A B *& semissi rectanguli sub* C A *& latere recto, hoc est, ei quod bis sub* C A, A E *continetur.* E *quibus sequitur quadratum* B D *æquale esse quadratis* C A, A B *seu* A E, *unà cum rectangulo sub* C A, A E *bis. Manifestum autem est,* [e] *quadrata* C A, A E, *unà cum rectangulo sub* C A, A E *bis, simul æquari quadrato totius* E C. *Quocirca æqualia erunt quadrata* BD, EC; *unde & rectæ* B D, E C. *Quod erat propositum.*

c p 47 Primi Elem.

d p 11 Primi Conicorum Apollonii.

e p 4 Secundi Elem.



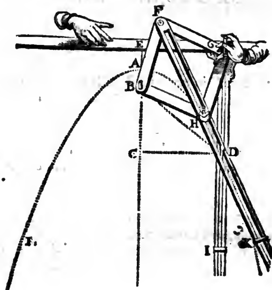
Caput XIII.

De modo describendi parabolas in plano, datis axe, vertice, & latere recto.

IN plano quocunque detur A C axis, vertexque punctum A, sit autem AB lateris recti quarta pars. Oporteatque in eodem plano lineam parabolen describere, cujus quidem axis sit recta A C, vertex punctum A, latus verò rectum linea recta ipsius AB quadrupla.

Producatur A C versùs A, donec A E ipsi A B sit æqualis; & ex E erigatur ad E C perpendicularis E G, eaque indefinitè utrinque protendatur. Deinde assumantur quatuor regulæ æquales BF, FG, G H, & H B, longitudinis cujuslibet; ita tamen ut illa non sit minor quàm A B,

A B, ipſæque extremitatibus ſibi invicem annectantur, ſic ut rhombum, quadratumvé referant B F G H. Ubi autem in G connexæ ſunt, connectantur & ſimul puncto G normæ G D I, qualis appoſitâ figurâ exhibetur, hoc eſt, quæ per medium ſecundùm longitudinem G I pertuſa ſit longâ canali ſeu fiſſurâ, deſinente propè G, diſtantiam circiter rectæ A E, ipſaque versùs I indefinitè extenſa intelligatur. Ubi verò in B ſibi invicem ſunt annectendæ, iiſdem locis perforentur, ut paxillo in B defixo injici queant, atque hâc ratione connexæ exiſtant.



Porrò cũ per F & H regula medio ſuo aſſiduè tranſire requiratur annectatur illa puncto F, ubi regulæ BF, FG ſibi mutuò ſunt annexę, quę in longitudinem ſit pertuſa quemadmodum norma, hoc eſt, pari fiſſurâ; perforenturque regulæ BH, HG in H, ſic ut in illas paxillus inſeri queat ejuſdem craſſitiei atque latitudo alterutrius fiſſuræ, conſtans ſubtus ex lamella, ſuperiùs verò in cochleam extructus; ita ut hâc ratione regulæ B H, H G in H ſint connexæ, & regula F H, intùs dictum paxillum comprehendens, medio ſuo per F & H ſemper tranſire cogatur. Ut autem regulæ B H, H G, & F H in paxillum injectæ

sic eodem statu conjunctæ perseverent, ipsis alia lamella foramine pertusâ imponatur, atque matre perstringatur. Denique adhibeantur duo annuli quadranguli I & K, regulam FH normamque GD circundantes, ut eas arctè circumplectentes ubique eandem fissuræ latitudinem conservent, & qui huc vel illuc divelli quoque possint, prout usus exiget. His ita peractis, linea parabole in hunc modum describetur.

Adjunctâ ipsi EG regulâ, assumatur stylus aliquis cylindricus ejusdem crassitiei cum latitudine utriusque fissuræ, isque in utramque fissuram immittatur, ut in D, ubi se secant regula FH & norma GI: dum enim norma defertur ab E versùs G, & continuò contra dictam regulam premitur, movebitur tota machina, describetque hoc motu stylus D lineam curvam AD, quæ portio erit lineæ parabolæ quæsitæ.

Translato verò G in paxillum B, & B in punctum normæ G, eâdem prorsus ratione ab altera parte axis portio AL designabitur.

Denique, si lineam hanc ulteriùs versùs L & D indefinitè delineare velimus, assumendæ sunt tantùm quatuor aliæ regulæ longiores BF, FG, GH, & BH. Extendetur namque hæc linea indefinitè longiùs, prout augmentatio dictarum regularum continuò major ac major assumpta fuerit. Nunquam enim integra ipsa describi poterit, cum ea hujus lineæ quoque sit natura, ut, licèt semper magis magisque ad eandem partem inclinet, in infinitum tamen protensa extremitates suas nunquam committat.

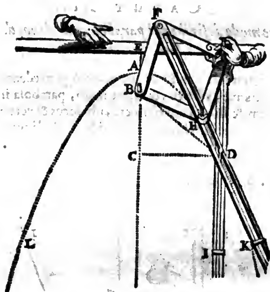
Demonstrandum itaque restat lineam descriptam parabolen existere. Quod quidem lemmate præmisso manifestum fiet, si jungamus BD, atque demittamus DC perpendiculariter ad AC. Erunt enim triangulorum BFH, HFG duo latera HB, BF duobus lateribus HG, GF utrumque utrique æqualia, basisque FH utrique triangulo communis: [a] quocirca & angulus BFH angulo HFG, sub æqualibus rectis lineis contentus, æqualis erit. Igitur cum duo triangula DBF, DFG duo latera BF, FD duobus lateribus GF, FD utrumque utrique æqualia habeant (est enim FD latus utrique triangulo commune;) habeant verò & angulum BFD angulo DFG, sub æqualibus lateribus contentum, æqualem, ut jam est ostensum: [b] habebunt quoque basin BD basi DG æqualem, angulumque BDF angulo FDG, sub quibus æqualia latera subtenduntur. Quoniam autem CE ipsi DG est æqualis, erunt quoque BD, CE inter se æquales. Patet ergo [c] pun-

a p 8 Primi Elem.

b p 4 Primi Elem.

[c] punctum D esse in curva linea parabole dicta, cujus axis est A C, vertex A, & latus rectum linea recta ipsius A B quadrupla. Cum autem adducto modo FH, G D se mutuò in infinitum secare possint, & eadem semper ratio de puncto intersectionis D constet: sequitur ejusmodi motu descriptam curvam LAD, esse lineam parabolã quæsitam. *c 2 Lemma antecedens.*

Præterire autem non oportet, quod hîc observatu dignum occurrit, regulam nempe F D K inter describendum medio suo tangere



continuò lineam parabolen in puncto D. Ostensum enim est, angulos BDF, FDG esse æquales. Quocirca cum [d] angulus F D G angulo IDK sit æqualis, quòd secundum verticem consistant: erit quoque angulus B D F angulo IDK æqualis, atque ita linea F D K parabolam contingens in D. Ut patet ex 41 Prop^ne^ libri 9^ni^ Perspectivæ Vitellionis. *d 15 Primi Elem.*

Cæterùm sciendum, B punctum Focum ab Opticis appellari solitum, eò quòd, si speculum concavum ad hanc figuram expolitum Soli opponatur, radii speculo incidentes axi paralleli, omnes ad hoc unicum punctum B reflectantur; atque ita à superficie talium speculorum ignem in B accendi.

SCHO-

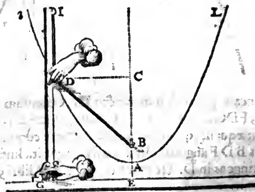
SCHOLIVM.

Liquet porrò ex allatis, nullâ operâ rectam lineam duci posse, quæ curvam paraboles in dato quolibet puncto contingat. Si enim in D, *exempli gratiâ, ejusmodi tangens ducenda foret, agatur per* D *recta* DG *axi* AC *parallela, jungaturque* BD. *Quo facto, si bifariam secetur angulus* BDG *rectâ* DF, *continget hæc parabolam in* D, *ut requiritur.*

CAPUT XIV.

De modo describendi parabolas in plano, dato foco, & vertice.

NON ignorabit quisquam (ut opinor) præcedentem modum, quo datis axe, vertice, & latere recto, parabola in plano designatur, etiam & hîc locum obtinere, ubi focus & vertex datus est: cum ad constructionem focus reverà ibidem esset inveniendus, qui hîc jam datur. Quocirca non è re me facturum existimo, si ad quæsitum perficiendum alium insuper modum afferam, qui beneficio fit alicujus fili. Et talis est.



Detur in plano quocunque focus punctum B, vertex autem punctum A. Oporteatque in eodem plano lineam parabolen describere, ut diximus.

Junctâ

Junctâ A B, ipsâque eatenus ultra A productâ ad E, erigatur ex E ad eam perpendicularis E G. Deinde defixo paxillo in B, capiatur filum I D B; illudque cum una extremitate annecte paxillo B; cum altera verò extremitati I normæ I G, quæ quidem filo sic nexo longitudine sit æqualis. Oportet autem eam ipsâ EB majorem assumi. Ut itaque propositum exsequamur, adjungatur ipsi GE regula utrobique indefinitè extensa; feraturque norma I G contra regulam à G versùs E. Fiet enim, ut, dum norma ita movetur, ac stylus immissus, qui tenet assiduè partem fili I D velut agglutinatam normæ & ab *i* extremo fili ad A deducitur, idem stylus quæsitæ lineæ parabolæ portionem *i* D A in plano describat: hoc est, cujus focus sit datum punctum B, vertex autem A. Cæterùm pari ratione à parte reliquâ portio A L designabitur. Cujus quidem rei demonstratio ex præmisso lemmate perspicua est.

Nam cum æquales sint regula I G & filum I D B; ideo si ab his æqualibus communis auferatur ID: erunt quoque reliquæ G D, DB æquales. Est autem GD ipsi E C æqualis. Erit igitur & DB ipsi EC æqualis, adeoque punctum D in parabola, cujus focus B, & vertex A. Ut ex conversa lemmatis antecedentis colligere licet,

Quoniam verò circa ostensum modum eadem ubique ratio est puncti D: sequitur ejusmodi motu lineam descriptam *i*DAL esse parabolam, qualem in plano describere oportebat.

Denique si placuerit hanc lineam ulteriùs extendere versùs *i* & L, oportet tantùm æqualiter augere normam & filum: quandoquidem illa indefinitè longiùs extenditur, prout hæc augmentatio semper major ac major assumitur.

S C H O L I U M.

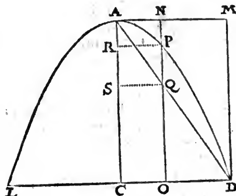
Siquidem hactenus ostendimus varios modos Conicas Sectiones Organicè in plano describendi: simulque etiam quo pacto in singulis recta linea duci possint, quæ easdem in datis punctis contingant: ac porrò etiam relationem, quam inter se habent superficies ellipsis ac cujuslibet ejus segmenti & superficies circuli ejusque segmenti; ut & eam, quam inter se habent figura contenta sub recta linea & portione lineæ hyperbolæ cujuscunque & alia similiter sub recta linea & portione lineæ hyperbolæ contenta, cujus latus rectum & transversum sunt æqualia (quæ meo judicio illa sunt, quæ de earum superficie à nobis tantummodo cognosci possunt): Restat ut coronidis loco hic

ultra subjungamus relationem, quam inter se habent figura rectilinea & alia, sub recta linea & portione lineæ parabolæ cujuscunque comprehensa. Quæ quidem sola inter Conicas Sectiones hactenus ad quadrati formam reduci potuit, & ab Archimede primùm fuit ostensa. Aliam verò à nobis inventam sic accipe.

Præmittimus autem sequentia Theoremata demonstrata, quoniam iis ad institutum omnino indigebimus.

I.

Si in figura, contenta sub recta linea L D & portione lineæ parabolæ L A D, diameter sit A C, & basis L C D ipsi A C ordinatim adplicata, jungaturque A D; compleatur



autem parallelogrammum CM, in quo ductâ NO ipsi AC vel DM utcunque parallelâ, occurrente ipsis A M, CD in N & O, atque secante A D in Q, lineam verò parabolæ in P: dico esse ON ad QN, sicut Q N ad N P.

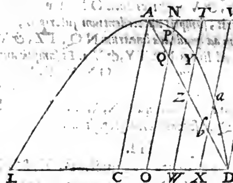
Hoc enim perspicuum est, cum A C *sit ad* A S, *ut* C D *ad* S Q *seu* R P; A C *autem ad* A R, *ut quadratum* C D *ad quadratum* R P, *per* 20mam *Propnem libri* 1mi *Conicorum Apollonii. Unde liquet* A C, A S, *&* A R *esse proportionales, & esse quidem* AC *seu* NO *ad* AS *sive* N Q, *ut* AS *sive* N Q *ad* AR *seu* N P. *Ut proponebatur.*

II. Iis-

II.

Iisdem positis, si dividatur A M in partes quotcunque æquales, atque ex punctis divisionum N, T, & V ad latus oppositum C D rectæ ducantur NO, TW, & VX parallelæ ipsi AC vel DM, quæ rectam AD secent in Q, Z, & b, lineam verò parabolen in P, Y, & a: Dico NO, TW, VX, & MD simul sumptas esse ad NP, TY, V a, & MD simul sumptas, ut quadrata ipsarum NO, TW, VX, & MD simul sumpta ad quadrata linearum NQ, TZ, V b, & MD simul sumpta: itemque NO, TW, VX, & MD simul sumptas esse ad NP, TY, & V a simul sumptas, ut quadrata ipsarum NO, TW, VX, & MD simul sumpta ad quadrata linearum NQ, TZ, & V b simul sumpta.

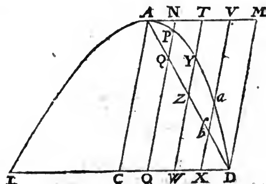
Est enim ex antecedenti Theoremate ON *ad* NQ, *ut* NQ *ad* NP. *Quocirca erit quoque, ut quadratum* ON *ad quadratum* NQ, *ita* ON *ad* NP. *Eodem modo cum sit* WT *ad* TZ, *ut* TZ *ad* TY: *erit etiam quadratum* WT *ad quadratum* TZ, *ut* WT *ad* TY. *Itemque quia* XV *est ad*



V b, *sicut* V b *ad* V a: *erit similiter quadratum* XV *ad quadratum* V b, *ut* XV *ad* V a. *Omnia igitur quadrata* ON, WT, XV *erunt ad omnia quadrata* NQ, TZ, V b, *ut omnes lineæ* ON, WT, XV *ad omnes lineas*

 NP,

NP, TY, V a. *Denique cum & D M ad M D sit, ut D M ad MD; erit itidem quadratum DM ad quadratum MD, ut DM ad MD. Unde omnia quadrata* ON, WT, X V, *& D M erunt ad omnia quadrata* N Q, T Z, V b, *& MD, sicut omnes lineæ* ON, WT, XV, *& D M ad omnes lineas* NP, TY, V a, *& MD. Quod primò erat propositum.*



Iam verò cum ostensum sit quadrata simul O N, W T, *& X V esse ad quadrata simul* N Q, TZ, *& V b, ut lineæ simul* ON, W T, *& X V ad lineas simul* NP, TY, *& V a; & tres lineæ* O N, TW, *& X V sibi invicem sint æquales: erit, sumptis antecedentium subtriplis, ut quadratum unius harum linearum ad quadrata linearum* N Q, T Z, *& V b, ita una earundem linearum ad lineas* NP, TY, *& V a. Et sumptis antecedentium quadruplis, ut quadrata quatuor linearum* O N, W T, X V, *& D M (est enim & D M unicuique reliquarum trium æqualis) ad quadrata linearum* NQ, T Z, *& V b, ita quatuor lineæ* ON, WT, XV, *& D M ad lineas* NP, TY, *& V a. Quod secundò erat propositum.*

III.

Iisdem positis: agantur per puncta P, Y, & *a* lineæ parallelæ ipsi AM vel LD, quæ secent lineas his punctis utrinque proximas in *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, & *h*. Dico parallelogrammum CM esse quidem parallelogrammis *c* N, *e* T, *g* V, & X M minus quàm triplum, parallelogrammis verò PT, YV, & *a* M majus quàm triplum.

Cum

Cum enim lineæ MD, V *b*, TZ, *&* NQ *se invicem æqualiter excedant, excessus verò sit æqualis minimæ* NQ, *& aliæ totidem existant* MD, VX, TW, *&* NO, *quæ magnitudine maximæ* MD *sint æquales: erunt, per* 10. *Prop. tractatus Archimedis de Lineis Spiralibus, quadrata* MD, VX, TW, *&* NO *harum æqualium linearum unà cum quadrato maximæ* MD *ac simul rectangulo, comprehenso sub minima* NQ *& linea æquali inæqualibus simul sumptis, tripla quadratorum earundem inæqualium linearum* MD, V *b*, TZ, *&* NQ. *Vnde sequitur quadrata linearum* MD, VX, TW, *&* NO *minora esse quàm tripla quadratorum à lineis* MD, V *b*, TZ, *&* NQ. *Quia autem ex proximè antecedenti Theoremate constat, quadrata* MD, VX, TW, *&* NO *ad quadrata* MD, V *b*, TZ, *&* NQ *eam habere rationem, quàm habent lineæ* MD, VX, TW, *&* NO *ad lineas* MD, V *a*, TY, *&* NP: *sequitur item lineas* MD, VX, TW, *&* NO *linearum* MD, V *a*, TY, *&* NP *minores esse quàm triplas. Manifestum autem est, lineas* MD, VX, TW, *&* NO *ad lineas* MD, V *a*, TY, *&* NP *eandem habere rationem, quàm parallelogramma* XM, WV, OT, CN, *hoc est, quàm parallelogrammum* CM, *ad parallelogramma* XM, *g* V, *e* T, *&* *c* N. *Quare constat parallelogrammum* CM *minus esse quàm triplum parallelogrammorum* XM, *g* V, *e* T, *&* *c* N.

Dico verò idem parallelogrammum parallelogrammorum *a* M, YV, *&* PT *majus esse triplo.*

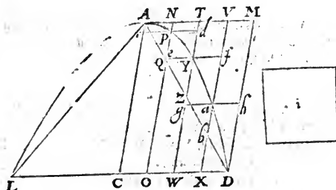
Quoniam enim ex demonstratione citatæ Propositionis Archimedis perspicuum quoque est, quadrata linearum MD, VX, TW, *&* NO *simul sumpta majora esse triplo quadratorum à lineis* V *b*, TZ, *&* NQ, *simul sumptorũ; &, per proximum præcedens Theorema, quadrata linearum* MD, VX, TW, *&* NO *sint ad quadrata linearum* V*b*, TZ, *&* NQ, *sicut lineæ* MD, VX, TW, *&* NO *ad lineas* V*a*, TY, *&* NP: *sequitur quoque lineas* MD, VX, TW, *&* NO *linearum* V *a*, TY, *&* NP *majores esse quàm triplas. Est autem manifestum, lineas* MD, VX, TW, *&* NO *ad lineas* V*a*, TY, *&* NP *eandem habere rationem, quam parallelogramma* XM, WV, OT, CN, *hoc est, quam parallelogrammum* CM, *ad parallelogramma* *a*M, YV, PT. *Constat itaque parallelogrammum* CM *parallelogrammorum* *a*M, YV, *&* PT *majus esse quàm triplum. Quare constat propositum.*

IV.

Iisdem positis: sit spatium *i* parallelogrammi CM tertia pars. Dico jam spatium, comprehensum à rectis AM, MD, & portione lineæ parabolæ AD, spatio *i* æquale esse.

Si enim ſpatium illud ſpatio i non fuerit æquale, erit majus eo aut minus.

Eſto primum majus, ſi fieri poſſit, & exceſſus, quo ſpatium hoc ſuperat ſpatium i, ſibi ipſi toties aggregetur, donec compoſitum ex ipſo excedat tandem parallelogrammum C M. *Poteſt itaque & ſumi ſpatium quoddam mi-*



nus illo exceſſu, quod ſit pars parallelogrammi C M. *Sit ergo* C N *parallelogrammum dicto exceſſu minus, & pars parallelogrammi* C M. *Erit quoque inde linea* A N *pars lineæ* A M. *Dividatur itaque* A M *in partes ipſi* A N *æquales, & reliqua ſiant ut in ſuperioribus dictum eſt.*

Igitur cum parallelogrammum C N *ſit minus exceſſu, quo ſpatium* A P Y *a* D M *ſuperat ſpatium i: ſequitur ſpatium i & parallelogrammum* C N *ſimul ſumpta ſpatio* A P Y *a* D M *eſſe minora: ac proinde minora quàm parallelogramma c* N, *e* T, *g* V, & X M, *quæ ipſo ſpatio* A P Y *a* D M *ſunt majora. Parallelogrammo autem* C N *æqualia ſunt parallelogramma c* N, *e d, g f,* & X *h, per quæ parabola incedit. Quare ſi utrobique demantur parallelogramma c* N, *e d, g f,* & X *h: relinquetur quoque ſpatium i minus parallelogrammis reliquis* P T, Y V, & *a* M. *Cumque parallelogrammum* C M *ſpatii i ſit triplum, erit parallelogrammum* C M *minus quàm triplum parallelogrammorum* P T, Y V, & *a* M. *At hoc eſt impoſſibile, oſtenſum enim eſt ipſis majus quàm triplum exiſtere. Non erit igitur ſpatium* A P Y *a* D M *majus ſpatio i.*

Dico item neque minus eſſe poſſe.

Sit enim minus, ſi fieri poteſt. Rurſuſque exceſſus quo ſpatium i ſuperat

A P Y

APY a DM sibi ipsi toties addatur, donec superet tandem parallelogrammum CM. *Potest itaque sumi spatium aliquod, quod sit minus illo excessu, quodque sit pars parallelogrammi* CM, *reliquis ut prius dispositis.*

Quoniam igitur parallelogrammum CN *minus est excessu, quo spatium i superat spatium* APY *a* DM: *erunt spatium* APY *a* DM *& parallelogrammum* CN *simul sumpta minora spatio i. Est autem ipsum i spatium minus parallelogrammis c* N, *e* T, *g* V, *&* XM. *Parallelogrammum enim* CM *spatii i est triplum, minus autem quàm triplum parallelogrammorum prædictorum, uti ostensum est. Igitur spatium* APY *a* DM *& parallelogrammum* CN *simul sunt minora parallelogrammis c* N, *e* T, *g* V, *&* XM. *Quocirca spatio* APY *a* DM *utrinque ablato: erit quoque reliquum parallelogrammum* CN *reliquis spatiis* A *c* P, P *e* Y, Y *g a, & a* Y D *minus. Quod fieri non potest. Patet enim parallelogrammum* CN *parallelogrammis c* N, *e d, g f, &* X *b esse æquale, quæ simul dictis spatiis sunt majora. Non erit igitur quoque spatium* APY *a* DM *spatio i minus. Ostensum autem est, & neque eo majus esse posse. Spatium itaque* APY *a* DM *spatio i necessariò erit æquale. Quod erat propositum.*

V.

Hoc autem demonstrato, manifestum est spacium quodcunque, comprehensum sub recta linea & portione lineæ parabolæ, esse sesquitertium trianguli, eandem basin & altitudinem cum ipso spatio habentis.

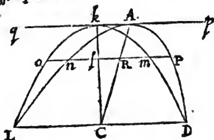
Perspicuum enim hoc est, si ducamus rectam L A.

Patet namque triangulum LAD *parallelogrammo* CM *æquale esse. Ideoque qualium partium triangulum* LAD *continebit tres, talium spacium* APY *a* DM *erit una, & spacium* APY *a* DC *dua, spatium verò* LAPY*a*D *quatuor. Sesquitertium itaque existit spatium* LAPY*a*D *(comprehensum sub recta linea* LD *& portione lineæ parabolæ* LAPY*a*D) *trianguli* LAD, *eandem cum ipso basin, eandemque altitudinem habentis. Quod ostendere propositum erat.*

Denique licèt hæc ubique vera sint ac locum habeant tam in hujusmodi figuris scalenis quàm in rectis; attamen quia similiter Quadrationem hanc concludere decrevimus atque in ellipsi & hyperbola factum fuit: placuit hîc porrò subjicere, quibus figuris rectis, sub recta linea & portione lineæ parabolæ comprehensis, æquentur hujusmodi figuræ scalenæ, sub recta pariter linea & portione lineæ parabolæ comprehensa.

Sit

Sit itaque talis figura scalena L A D, *contenta sub recta linea* L D *& portione lineæ parabolæ* L A D, *cujus diameter sit* C A, *latus verò rectum* A p: *& ex* A *ducatur* A k *parallela* L D; *tum verò ex* C *ad* L D *erigatur perpendicularis* C k, *secans* A k *in* k: *atque circa puncta* L, k, D *linea parabole in plano describatur. Dico figuram scalenam* L A D *figuræ rectæ* L k D *esse æqualem.*



Vt autem per puncta L k D *in plano portio lineæ parabolæ describatur, adplicetur quadratum rectæ* L C *vel* C D *ad longitudinem* k C, *sitque latitudo ortiva recta* k q; *sive quod idem est, inveniatur ipsis* k C, C D *tertia proportionalis* k q. *Referet enim ea juxta* 11. *Prop. libri* 1^mi^ *Conicorum Apollonii latus rectum parabolæ, cujus axis est* k C, *vertex* k, *& ordinatim adplicata* C D. *Vnde porrò facile est, per caput ultimum hujus tractatus, ejusmodi lineæ portionem describere.*

Ducatur jam ipsi L D *recta utcunque æquidistans* P R l o; *secans quidem parabolam* L A D *in* P *&* n, *ac diametrum ejus* C A *in* R; *parabolam verò* L k D *in* m *&* o, *ac axem ejus* C k *in* l.

His ita constitutis, dico rectas n P, o m *inter se æquales esse.*

Quoniam enim ob rectam C D, *in utraque figura ordinatam; in parabola quidem* L A D [a] *rectangulum sub* C A *& latere recto* A p *quadrato ipsius* C D *est æquale; in parabola verò* L k D [b] *rectangulum sub* C k *& latere recto* k q *eidem etiam quadrato* C D *est æquale: sequitur rectangulum sub* C A, A p *rectangulo sub* C k, k q *esse æquale.* [c] *Vnde erit ut* C A *ad* C k, *ita* k q *ad* A p. *Vt autem* C A *ad* C k, [d] *ita quoque est (ob parallelas* R l, A k) *recta* C R *ad* C l, [e] *& reliqua* R A *ad reliquam* l k. [f] *Erit itaque ut* R A *ad* l k, *ita* k q *ad* A p. [g] *Æquale igitur est rectangulum* R A p *rectangulo* l k q. *Est autem in parabola* L A D [h] *rectangulũ* R A p *æquale quadrato* R p; *in parabola verò* L k D *rectangulum* l k q *æquale quadrato* l m. *Æqualia ergo quoque erunt quadrata* R P, l m, *ac proinde & ipsæ rectæ* R P, l m, *unde & earũ dupla* n P, o m.

Eadem est ratio de omnibus aliis rectis, quæ ordinatim in infinitum ad diametros C A, C k *in utraque figura adplicantur.*

Quia itaque ejusmodi æqualitas in infinitum apparet in utraque figura, relinquitur ipsas inter se æquales esse. Quod ostendere propositum erat.

F I N I S.

a p 11 Primi Conicorum Apollonii.
b Ex constructione.
c p 16 Sexti Elem.
d p 4 Sexti Elem.
e p 19 Quinti Elem.
f p 11 Quinti Elem.
g p 16 Sexti Elem.
h p 11 Primi Conicorum Apollonii.

FRANCISCI à SCHOOTEN

LEYDENSIS

In Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris,

EXERCITATIONUM MATHEMATICARUM,

LIBER V.

CONTINENS

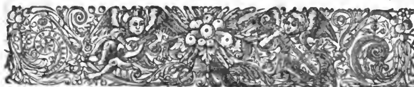
Sectiones triginta miscellaneas.

LUGD. BATAV.

Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII,

Academiæ Typographi.

CIↃ IↃC LVII.



Clarissimo, Consultissimoque

VIRO,

Dno IOHANNI WALBEECK,

JCto eximio, atque in curia Hollandiæ caussarum patrono disertissimo.

FRANCISCUS à SCHOOTEN

S. D.

UM singulari benevolentiâ atque humanitate, Vir Doctissime, semper me exceperis ac prosequutus sis, & amicitiam, quę mihi à teneris tecum intercessit, plurimis beneficiorum argumentis sæpius obsignare studueris: nil magis mihi in votis fuit, quàm ut iisdem publicâ grati animi testificatione responderem. Permitte igitur, quæso, ut tractatum hunc, qui elegantiorum ac selectiorum quarundam propositionum quasi spicilegium est, tuo nomini inscribam, atq; in perpetuæ amicitiæ tesseram tibi offeram dedicemque. Quem utique non ingratum tibi fore confido, gnarus scilicet, quo loco apud te sint Mathematicæ scientiæ; qui illas etiamnum haud minori voluptate recolere, quàm antehac summa cum alacritate

tractare consuevisti, variaque earum munera non exiguâ cum laude obiisti. Etenim nosti, Vir Consultissime, quantùm ipsæ ad ingenii cultum faciant, & quantopere mentes, nimium luxuriantes, frænent, ne quid fucatum aut præter rei veritatem admittant; adeò ut ultra earum dignitatem, quam maximâ cum utilitate conjunctam habent, etiam plurimum subsidii conferant ad reliqua studia faciliùs capessenda, quæ uberiorem quæstum amplosque honorum titulos pollicentur, ideoque à vulgo magis probantur. Unde fit, ut minimè dubitem, quin ingenii tui acumen & singularem prudentiam, quam in te suspicio, ac in rerum causis discutiendis omnes quotidie in foro experiuntur, non minùs tibi ex harum artium cultura, quàm ex cæteris tuis studiis ritè pertractatis, comparaveris. Hinc, quotiescunque te causas magno cum applausu perorantem audivi, toties quoque non infeliciter te juris peritiam cum accurata Mathematum cognitione conjunxisse judicavi; unde & tuam in dicendo dexteritatem, & eruditionem in justa legum interpretatione sæpissimè sum admiratus. Neque me seducit hîc singularis meus erga te amor: testes enim mihi sunt complures civitates, quæ mentis tuæ præstantiâ allectæ, limatissimumque tuum judicium sæpiùs expertæ, causarum suarum patronum te disertissimum simulac eruditissimum jure merito elegêre. Quamobrem si exactissimo tuo calculo probari hæc intelligam, nullibi meliùs operam hanc meam collocari potuisse arbitrabor. Accipe igitur, Vir Amicissime, exercitationes hasce, quas tanquam ἐπίμετρον præcedentibus addo, & nunc sub nominis tui auspiciis in lucem edo. Quòd, si verò eo animo, quo à me offeruntur, eas exceperis, laboris suscepti præmium sat amplum reportasse me existimabo. Vale, ac me amare perge.

SE-

SECTIONES MISCELLANEÆ.

Sectio I.

Ratio inveniendi electiones omnes, quæ fieri possunt, datâ multitudine rerum.

Atio inveniendi electiones omnes, quæ circa propositam rerum multitudinem fieri possunt, haud multùm aliena est à modo inveniendi dati cujusque numeri aut quantitatis partes omnes aliquotas & divisores, quem alibi exposuimus.

Etenim si, verbi gratiâ, quatuor fuerint res diversæ, designatæ per *a*,*b*,*c*,& *d*,ut inveniantur electiones omnes, quæ fieri possunt,prout ipsæ aliter atque aliter sumuntur, multiplico *a* per *b*,& fit *ab*.Tum *a*,*b*,& *ab* per *c*, fiuntq; *ac*,*bc*,& *abc*. Ac deinde *a*,*b*, *ab*.*c*,*ac*, *bc*,& *abc* per *d*, fiuntque *ad*, *bd*,*abd*,*cd*, *acd*,*bcd*, & *abcd*.Omnino ut hîcinfra videre licet.

Et invenitur electio, si summa omnium sub ipsa comprehendatur, fieri posse 15 modis diversis,

Utpote, sumendo,

a.
b. *ab*
c. *ac*. *bc*. *abc*
d. *ad*. *bd*. *abd*. *cd*. *acd*. *bcd*. *abcd*.

1mo. *a*
2. *b*
3. *a* & *b* simul
4. *c*
5. *a* & *c* simul
6. *b* & *c* simul
7. *a*, *b*, & *c* simul
8. *d*
9. *a* & *d* simul
10. *b* & *d* simul
11. *a*, *b*, & *d* simul
12. *c* & *d* simul
13. *a*, *c*, & *d* simul
14. *b*, *c*, & *d* simul
15. *a*, *b*,*c*, & *d* omnes simul.

Hinc si per *a* designetur unũ malum, per *b* unum pirum, per *c* unum prunum, & per *d* unum cerasum, & ipsa aliter atque aliter, ut supra, eligantur, electio eorum fieri poterit 15 diversis modis, ut sequitur.

Nimirum, ſumendo 1mo. malum
2. pirum.
3. malum, & pirum
4. prunum
5. malum, & prunum
6. pirum, & prunum
7. malum, pirum, & prunum
8. ceraſum
9. malum, & ceraſum
10. pirum, & ceraſum
11. malum, pirum, & ceraſum
12. prunum, & ceraſum
13. malum, prunum, & ceraſum
14. pirum, prunum, & ceraſum
15. malum, pirum, prunum, & ceraſum.

Ubi porrò notandum, quòd, cum ſupra inventarum electionum ſequens regula duplo ſemper plures electiones contineat quàm proximè præcedens, ad ſolam earum ſummam inveniendam, ſufficiat addere quatuor terminos proportionales 1, 2, 4, & 8: erit enim 15, eorum ſumma, numerus electionum quæſitus.

Sic ſi 5 fuerint res diverſæ, utputa: *a*, *b*, *c*, *d*, & *e*, quæraturque quot modis diverſis earundem electio fieri poſſit, addendi tantùm ſunt 5 proportionales 1, 2, 4, 8, & 16: eritque ſumma 31, quæſita electionum ſumma. Quæ quidem, ut ſupra, inventæ, ſic exhibentur.

a.

b. ab.

c. ac. bc. abc.

d. ad. bd. abd. cd. acd. bcd. abcd.

e. ae. be. abe. ce. ace. bce. abce. de. ade. bde. abde. cde. acde. bcde. abcde.

Præterea advertendum hîc eſt, rebus omnibus diverſis exiſtentibus, in unaquaque ſequentium regularum ſemper unam ampliùs inveniri electionem quàm in antecedentibus omnibus regulis ſimul. Sic *b* & *ab* unà plures ſunt numero quàm *a*. Et *c*, *ac*, *bc*, & *abc* unà plures quàm *a*, *b*, & *a b* ſimul. Itemque *d*, *ad*, *b d*, *abd*, *cd*, *a cd*, *b c d*, & *abcd* unâ plures quàm *a*, *b*, *ab*, *c*, *ac*, *bc*, & *a bc*. Atque ita ulteriùs.

Id quòd oſtendit, in Progreſſione Geometrica rationis duplæ ab uni-

unitate, terminos omnes antecedentes ſimul additos ſemper eſſe unitate minores termino ſubſequente. Adeoque ſi ultimo termino addatur duntaxat numerus, qui eo unitate minor ſit, habebitur ſumma omnium terminorum. Quam etiam obtinere licet, ponendo binarium toties, quot ſunt termini ſeu res diverſæ, atque à numero continuè ab eo facto auferendo unitatem.

Ex quibus denique inferre ac notare licet, rerum diverſarum multitudine deinceps unitate excreſcente, differentias, quibus electionum numeri conſequenter ſe mutuò excipiunt, numeros ſemper eſſe progreſſionis duplæ ab unitate: Itemque ſequentium electionum numerum ſemper unitate majorem eſſe duplo proximè præcedentis. Sicut hîc infra apparet.

Res datæ.	Multitudo electionum	Differentiæ electionum.
a .	1	
		2
ab .	3	
		4
abc .	7	
		8
abcd .	15	
		16
abcde .	31	
		32
abcdef .	63	
		64
abcdefg .	127	
		128
abcdefgh .	255	
		256
abcdefghi .	511	
		512
abcdefghik .	1023	

Et ſic in infinitum.

Cum autem hæc, quæ de electionibus earumque numero dicta ſunt, ad partes quoque aliquotas & diviſores dati numeri aut quantitatis referri poſſint, (quoniam ratio illas inveſtigandi à modo inveniendi electiones, ut ſupra monuimus, parùm differt): Idcirco, ad id oſtendendum, propoſitum ſit quantitatis *abcd*, productæ multiplicatione ipſarum *a, b, c,* & *d*, invenire partes omnes aliquotas & diviſores.

Hinc inventis, ut ſupra, harum *a, b, c, d* electionibus omnibus, videlicet *a, b, ab, c, ac, bc, abc, d, ad, bd, abd, cd, acd, bcd,* & *abcd*, ſi in locum ultimæ *abcd*, quæ ſemper eſt data ſeu tota quantitas, non autem ejus pars aliquota, aſſumatur unitas, referent *a, b, ab, c, ac, bc, abc, d, ad, bd, abd, cd, acd, bcd,* & 1 partes omnes aliquotas ipſius *abcd*. Adeò ut ſemper tot ſint partes, quot electiones. Quantùm verò ad diviſores, cum unaquæque quantitas ſe ipſam quoque per unitatem dividat:

dat: manifestum est divisorum numerum unitate semper excedere electionum sive partium multitudinem, ita ut ipsius *abcd* divisores sint 1, *a*, *b*, *ab*, *c*, *ac*, *bc*, *abc*, *d*, *ad*, *bd*, *abd*, *cd*, *acd*, *bcd*, & *abcd*.

Quocirca si solummodò partium vel divisorum numerum invenire animus sit, illas autem ipsas exhibere supervacaneum fuerit, oportet tantùm terminos progressionis 1. 2. 4. 8, ut supra, addere, & fit summa 15. Hæc enim cum tam electionum quàm partium multitudinem designet, designabit 16 divisorum numerum.

Idem de numeris est intelligendum. Ut ad inveniendam tam divisorum quàm partium multitudinem numeri 210, quoniam 210 provenit multiplicatione quatuor primorum numerorum 2, 3, 5, & 7; sive 210 dividendo per 2, ac tum qui fit per 3, ac quotiens rursus per 5, ac denuo hic ultimus per 7, sic pervenitur ad unitatem: manifestum est, si quatuor hi numeri tanquam res diversæ accipiantur, multitudinem electionum, quæ ab ipsis semper aliter atque aliter fieri possunt, fore 15. Ac proinde 210 habere 15 partes aliquotas, & 16 divisores, quos ex adjuncta operatione facilè colliges.

1
210 | 105 | 35 | 7 | 1
2 | 3 | 5 | 7 |

2
3 . 6
5 . 10 . 15 . 30
7 . 14 . 21 . 42 . 35 . 70 . 105 . 210. Atque ita de aliis.

Porrò cum in omnibus hisce electionibus rerum, illæ quæ per *a*, *b*, *c*, *d*, &c. designantur, continuò semel tantùm ita simplices occurrant, reliquæ autem electiones ex iis semper sint compositæ: patet, si à numero electionum auferatur numerus rerum, reliquum indicare quot modis ipsæ aliter atque aliter possint conjungi.

Sic *a*, *b*, *c*, & *d* modis omnibus, quos excogitare licet, conjungentur 11cies, hoc est, 11 modis differentibus. Sic & ipsarum *a*, *b*, *c*, *d*, & *e* numerus conjunctionum, omnifariam sumptarum, erit 26. Haud secus invenietur 7 Planetas conjungi posse 120 modis diversis. Et sic de aliis.

Jam verò sicut ex *a*, *b*, *c*, & *d*, cùm ipsæ designant quatuor res diversas, inferuntur 15 electiones variæ, ita si eandem rem designent, hoc est, *a*, *b*, *c*, & *d* omnes inter se æquales sive ejusdem valoris intelligan-

ligantur, poterunt tantùm ex iis quatuor colligi electiones. Si enim tunc, ut convenit, eodem nomine insigniantur, hoc est, per *a*, *a*, *a*, & *a* designentur: electiones erunt *a*, *aa*, *aaa*, & *aaaa*.

Unde liquet si ipsius *aaaa* seu a^4 partes aliquotæ inveniendæ sint, atque eum in finem loco ultimæ electionis *aaaa* sumatur unitas: erunt ipsius a^4 partes aliquotæ *a*, *aa*, a^3, & 1; & divisores 1, *a*, *aa*, a^3, & a^4.

Sic & si quinque fuerint res æquales, singulæ per *a* designatæ, reperientur quoque 5 earundem electiones, quæ sunt *a*, *aa*, *aaa*, *aaaa*, & *aaaaa*. Ita ut inde concludere liceat quantitatem a^5, propter quinque ejus dimensiones, quinque similiter habere partes aliquotas, quæ sunt *a*, *aa*, a^3, a^4, & 1; & 6 divisores, nimirum, 1, *a*, *aa*, a^3, a^4, & a^5. Idem de similibus aliis intellige.

Cæterùm datâ multitudine rerum, quarum aliquæ tantùm inter se æquales sint, ut si, verbi gratiâ, ipsæ sint quatuor numero, quarum duæ sibi invicem æquales existant, eæque designentur per *a*, *a*, *b*, & *c*: ad inveniendas omnifarias illarum electiones, multiplico, ut supra, *a* per *a*, & fit *aa*. Tum *a* & *aa* per *b*, fiuntque *ab* & *aab*. Ac deinde *a*, *aa*, *b*, *ab*, & *aab* per *c*, fiuntque *ac*, *aac*, *bc*, *abc*, & *aabc*. Et manifestum est, quæsitam electionum multitudinem, comprehendendo sub ea semper omnium summam, fore 11. Ac proinde, si *a* supponatur designare gallinam, *b* perdicem, & *c* anserem: electiones fieri poterunt, ut sequitur.

a.
a. aa.
b. ab. aab.
c. ac. aac. bc. abc. aabc.

Videlicet, sumendo 1mo. 1 gallinam
2. 2 gallinas
3. 1 perdicem
4. 1 gallinam & 1 perdicem
5. 2 gallinas & 1 perdicem
6. 1 anserem
7. 1 gallinam & 1 anserem
8. 2 gallinas & 1 anserem
9. 1 perdicem & 1 anserem
10. 1 gallinam, 1 perdicem, & 1 anserem
11. 2 gallinas, 1 perdicem, & 1 anserem.

Ubi, ut supra, liquet, post duas ipsius *aa* electiones, propter *b* ab iis diversam, in sequenti regula unam ampliùs inveniri electionem, utputa tres *b*, *ab*, & *aab*. Ac deinde in hanc rursum sequenti, propter *c* à præcedentibus iterum diversam, unam ampliùs quàm duarum simul præcedentium, videlicet sex *c*, *ac*, *aac*, *bc*, *abc*, & *aabc*. Ita ut in toto sint 11 electiones, addendo nempe numeros 2, 3, & 6. Quod idem in aliis similibus electionibus colligendis observare licebit.

Idem de partibus aliquotis est intelligendum. Si enim quantitatis a^2bc partes aliquotæ quærantur, & in locum *aabc* sumatur tantùm unitas: erunt & ipsius a^2bc undecim partes: nimirum *a*, *aa*, *b*, *ab*, *aab*, *c*, *ac*, *aac*, *bc*, *abc*, & 1; & 12 divisores, qui sunt 1, *a*, *aa*, *b*, *ab*, *aab*, *c*, *ac*, *aac*, *bc*, *abc*, & *aabc*.

Similiter si fuerint quinque res, designatæ per *a*, *a*, *a*, *b*, & *b*, ut inveniantur electiones omnes, juxta quas aliter atque aliter sunt sumendæ, multiplico, ut ante, *a* per *a*, & fit *aa*. Tum *aa* rursus per *a*, fit *aaa*. Deinde *a*, *aa*, & *aaa* per *b*, fiuntque *ab*, *aab*, & *aaab*. Ac denique *b*, *ab*, *aab*, & *aaab* per *b*, fiuntque *bb*, *abb*, *aabb*, & *aaabb*. Omnino ut hîc infra conspicere licet. Eruntque electiones quæsitæ *a*, *aa*, *aaa*, *b*, *ab*, *aab*, *aaab*, *bb*, *abb*, *aabb*, & *aaabb*.

a
a. *aa*.
a. *aaa*
b. *ab*. *aab*. *aaab*.
b. *bb*. *abb*. *aabb*. *aaabb*.

Ubi rursus post 3 ipsius *aaa* electiones in sequenti regula, propter *b* ab iis diversam, reperiuntur quatuor *b*, *ab*, *aab*, & *aaab*, hoc est, una ampliùs quàm trium ipsius *aaa*, sive trium præcedentium regularum; at verò propter *b* cum præcedenti eandem idem quoque electionum numerus qui hujus præcedentis, nimirum quatuor *bb*, *abb*, *aabb*, & *aaabb*. Adeò ut antecedens cujusque regulæ litera, quæ ab antecedenti proximè præcedentis non differt, eundem quoque semper electionum atque illius regulæ numerum inferat; at verò cùm ab illa diversa est, tum unâ semper plures electiones suppeditet, quàm antecedentium simul regularum. Id quod in genere tam ad electionum quàm

quàm partium aliquotarum & divisorum numerum inveniendum compendiosissimum est remedium. Sive enim ipsarum $a, a, a, b,$ & b electionum numerum, sive quantitatis $a^3 b^2$, ex iis compositæ, partium aliquotarum & divisorum multitudinem invenire velimus: oportebit tantùm, propter 3 ipsius a^3 dimensiones sive a ter positam, notare 3 electiones aut partes; ac deinde propter b bis positam, (quæ semel posita unam præcedentibus tribus superaddit quatuorque tradit) notare 8 electiones aut partes. ita ut in toto sint 11 electiones aut partes; at verò 12 divisores.

Sic & si 6 res designatæ fuerint per $a, a, a, b, b,$ & c, & numerus electionum, quæ ab ipsis fieri possunt, sit investigandus; sive etiam quantitas $a^3 b^2 c$ data sit, cujus tam partium quàm divisorum multitudo quæratur: noto, propter a^3 seu a ter positam, 3 electiones aut partes. Deinde propter b^2 seu b bis positam (quæ semel posita unam præcedentibus tribus super addit & quatuor tradit) noto 8 electiones aut partes. Ac denique propter c, quæ unam rursus præcedentibus 3 & 8 simul super addit, noto 12 electiones aut partes. Unde colligendo in unam summam 3, 8, & 12, quæsitus electionum aut partium numerus fit 23, & divisorum 24.

Haud secus si datæ fuerint $a, a, a, a, a, b, b, b, b, c, c, c, d,$ & d, aut quantitas $a^5 b^4 c^3 d^2$, ex iisdem composita, ad inveniendum tam electionum illarum quàm hujus partium numerum, noto propter a^5 seu a quinquies positam, 5 electiones aut partes. Deinde propter b^4 seu b quater positam (quæ semel posita unam præcedentibus 5 super addit & 6 tradit) noto 24 electiones aut partes. Porrò propter c^3 seu c ter positam (quæ semel posita unam rursus præcedentibus 5 & 24 simul super addit & 30 tradit) noto 90 electiones aut partes. Ac denique propter d^2 seu d bis positam (quæ semel posita rursus unam præcedentibus 5, 24, & 90 simul super addit & 120 tradit) noto 240 electiones aut partes. Unde addendo simul 5, 24, 90, & 240, concludo 359 quæsitam esse electionum aut partium multitudinem; at verò divisorum numerum esse 360.

Similì modo invenire licet dati numeri partium & divisorum multitudinem. Ut ad inveniendum quot partes & divisores habeat 15876000:

1 1	111	11 1	1 1	11 1	11111	1 1
15876000	7938000	3969000	1984500	992250	496125	165375
2	2	2	2	2	3	3

2411	1	1					
55125	18375	6125	1225	245	49	7	1
3	3	5	5	5	7	7	

Quæro primùm ex quibus primis numeris 15876000 producatur, dividendo eum in finem 15876000 per primos numeros 2, 3, 5, *&c.* donec perveniatur ad unitatem. Perinde ut hîc ſupra factum vides. Hinc cum reperiam ipſum multiplicatione produci 14 primorum numerorum 2. 2. 2. 2. 2. 3. 3. 3. 3. 5. 5. 5. 7. 7, eundemque notari poſſe, hoc modo: 2^5, 3^4, 5^3, 7^2, ita ut cum $a^5 b^4 c^3 d^2$ præcedentis exempli omnino conſentiat ſive utriuſque eadem ratio ſit, patet, ipſius pariter fore 359 partes aliquotas, & 360 diviſores. Atque ita de aliis.

SECTIO II.

Ratio inveniendi multitudinem rerum, earumqúe inter ſe habitudinem, quæ datis vicibus eligi poſſunt.

AD inveniendam multitudinem rerum, earumque inter ſe habitudinem, quæ datis vicibus eligi poſſunt, ſciendum eſt, illam non ſemper omnino determinatam eſſe ſed ſæpe numero variam inveniri, prout datæ vices ſeſe obtulerint. Quibus autem caſibus id contingat, ac quo pacto illa inveſtiganda ſit, ſequentia exempla edocebunt.

1mum Exemplum. Etenim ad inveniendum, quot res ſumendæ ſint, ac quænam inter eas habitudo exiſtat, quæ 15 diverſis modis eligi poſſint: addo ad 15 unitatem ſeu 1, & fit 16. Hic igitur numerus ſi reperiatur aliquis eorum, qui ab unitate in ratione dupla aſcendunt, hoc eſt, ut ipſe continuò per 2 dividi poſſit, donec ad unitatem perveniatur: indicabit diviſionum numerus, ſeu is qui oſtendit quotus poſt unitatem hic 16 ejuſdem Progreſſionis terminus obtingat, quot res diverſæ accipi debeant, quæ 15 modis aliter atque aliter eligi poſſint. Ac proinde cum 16 dictæ progreſſionis quartus terminus exiſtat ſive quatuor

16	8	4	2	1
2	2	2	2	

ejuſ-

ejusmodi divisiones fieri queant: idcirco & quatuor diversas res assumi debere, utputa *a*, *b*, *c*, & *d*, quæ 15 diversis modis eligantur. Quemadmodum ex præcedenti sectione facilè est colligere.

Jam verò ut hinc porrò constet, num & plures paucioresvé res assumi queant, quę similiter 15 diversis modis eligantur: quæro utrum 16 per alios adhuc numeros dividi possit. Unde cum præter 2 etiam per 4, 8, & per se ipsum divisibilis sit, concludo ultra inventam multitudinem alias insuper rerum multitudines reperiri, quæ idem præstent.

Ad quas obtinendas ut & ad earum habitudinem indagandam, divido 16 per 4, & fit 4. Jam autem, dividendo ut supra 4 per 2, fit 2, ac rursus 2 per 2, fit 1. Hinc si à divisoribus 4, 2, & 2 unitas auferatur, & reliqua 3, 1, & 1 simul addántur: ostendet summa 5, quinque item res, quarum tres inter se æquales sint, assumi posse, utputa *a*, *a*, *a*, *b*, & *c*, quæ rursum 15 diversis modis eligi valeant.

Eodem modo, cum 16 diviso per 4, fiat 4, ac deinde 4 per 4, fiat 1; atque à divisoribus 4 & 4 unitate sublatâ reliqua 3 & 3 simul addita faciant 6: poterunt similiter 6 res assumi, quarum tres unæ inter se æquales sunt, sicut & tres aliæ, utputa *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, & *b*, quæ 15 iterum diversis modis eligentur.

Sic &, quia dividendo 16 per 8, fit 2, & 2 per 2, fit 1: Hinc à divisoribus 8 & 2 sublatâ unitate, si reliqua 7 & 1 simul addantur, indicabit 8 summa, posse quoque octo res, quarum 7 inter se æquales sint, assumi, utputa *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, & *b*, quas denuo 15 diversis eligere licet modis.

Denique cum 16 per 16 dividendo fiat 1, & à 16 auferendo 1 relinquatur 15, fit ut sumendo res 15 inter se æquales, earum quoque electiones omnes 15 numero existant.

Hinc cum 16 aliis quàm hisce 5 modis dividi non eveniat, colligere licet, quæsitam rerum multitudinem quintuplicem esse; earundemque habitudines, seu quales ipsæ res assumendæ sint, ex jam dictis constare. Quæ omnia, dum ex præcedenti sectione manant, diligenter inquirenti, perspecta evadent.

Deinde ad inveniendam multitudinem rerum, quæ, verbi gratiâ, 23 diversis modis eligi queant, ut & ad indagandum quales illæ assumendæ sint, addo ad 23 unitatem seu 1, & fit 24. Jam cum hic numerus non aliquis eorum existat, qui ab unitate in ratione dupla ascendunt, sive ipse continuò per 2 usque ad unitatem divisibilis sit: argu- *2dum Exemplum.*

 men-

mentum eſt, multitudinem inveniendam non ex rebus, quæ omnes diverſæ aut inæquales ſint, conſtare poſſe. Quocirca ut habitudo earum innoteſcat, ſimulq́ue palàm fiat num multitudo illa varia inveniri poſſit: quæro utrum 24 per diverſos numeros dividi queat,

1.
24 | 8 | 4 | 2 | 1
3 | 2 | 2 | 2 |

2.
24 | 6 | 2 | 1
4 | 3 | 2 |

3.
24 | 4 | 2 | 1
6 | 2 | 2 |

4.
24 | 4 | 1
6 | 4 |

5.
24 | 3 | 1
8 | 3 |

6.
24 | 2 | 1
12 | 2 |

7.
24 | 1
24 |

priuſquam ad unitatem perveniatur, hoc eſt, utrum ex diverſis producatur numeris. Unde cum 24 ſeptuplicem admittere diviſionem deprehendam, ſeu eum 7 diverſis modis, hîc oblatis, ab aliis gigni: concludo quæſitam rerum multitudinem ſeptuplicem quoque inventum iri. Ad quas obtinendas, dum à diviſoribus ſigillatim auferendo unitatem, reliqua componunt 7 hoſce numeros 5, 6, 7, 8, 9, 12, & 23, qui ſinguli quæſitam rerum multitudinem demonſtrant: patet, res quæſitas (23 diverſis electionibus obnoxias) 7 ſequentibus modis eſſe ſumendas, nimirum, prout deſignantur

per *a, a, b, c, d.*
vel per *a, a, a, b, b, c.*
vel per *a, a, a, a, a, b, c.*
vel per *a, a, a, a, a, b, b, b.*
vel per *a, a, a, a, a, a, a, b, b.*
vel per *a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, b.*
vel per *a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a.*

3[tium] *Exemplum.* Cæterùm ut inveniatur multitudo rerum, quæ 42 diverſas electiones ſubeant, ſimulq́ue indagetur quales illæ accipiendæ ſint: addo, ut ſupra, ad 42 unitatem ſeu 1, & fit 43. Jam cum hic numerus primus exiſtat, ſeu per nullum niſi per ſe ipſum & unitatem dividi poſſit,

con-

concludo multitudinem quæsitam fore unicam: utpote sumendo 42 res (prout datus numerus indicat), quæ omnes inter se æquales sint. Atque ita de aliis.

SECTIO III.

Ratio inveniendi quantitates, datam habentes partium aliquotarum aut divisorum multitudinem.

AD inveniendas quantitates, quæ datam habeant partium aliquotarum multitudinem: oportet per præcedentem sectionem invenire quot qualesque quantitates ceu res assumi debeant, quæ toties diversimodè eligi possint, quoties indicat data partium multitudo. Est enim quantitas ex iis genita, illa quæ quæritur.

Unde ad inveniendas quantitates, datam divisorum multitudinem habentes, nil aliud faciendum est, quàm ab eadem multitudine unitatem auferendo quærere quantitatem, sicut jam dictum est, quæ tot partes habeat, quot reliquum continet unitates. Sed hæc exemplis clariora fient.

Ut ad inveniendam quantitatem, quæ 15 habeat partes aliquotas: quæro per præcedentem sectionem quot quantitates accipiendæ sint, qualisque inter ipsas habitudo existat, quæ 15 diversis modis eligi queant. Jam cum multitudo earundem varia reperiatur, illæque quintupliciter sumendæ occurrant, nimirum prout designantur per *a*, *b*, *c*, *d*, vel per *a*, *a*, *a*, *b*, *c*, vel per *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, *b*, vel per *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *b*, vel per *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*: idcirco ex hisce componendo quantitates $abcd$, a^3bc, a^3b^3, a^7b, a^{15}, designabit quælibet ipsarum quantitatem, 15 partes aliquotas habentem, qualis requirebatur. 1^mum^ Exemplum.

Hinc ad inveniendam quantitatem, 16 divisores habentem, quoniam quantitas quindecim partes habens sedecim habet divisores (siquidem divisorum numerus semper unitate partium aut electionum numerum, sicut 1^ma^ sectione dictum fuit, excedit): fit ut inde quælibet inventarum $abcd$, a^3bc, a^3b^3, a^7b, a^{15}, sedecim quoque divisores admittat.

Haud secus, si invenire velimus quantitatem, 23 partes aliquotas habentem; quæro per præced. sect. quot qualesque quantitates ceu 2^dum^ Exemplum.

res

res assumi debeant, quæ 23 diversis modis eligi possint. Unde cum ipsarum multitudo septuplex reperiatur, atque earum inter se habitudinem designari per a, a, b, c, d, vel per a, a, a, b, b, c, vel per a, a, a, a, a, b, c, vel per a, a, a, a, a, b, b, b, vel per $a, a, a, a, a, a, a, b, b$, vel per $a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, b$, vel per $a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a$: fit ut ex iis componendo quantitates a^2bcd, a^3bc, a^5bc, a^5b^3, a^7b^2, $a^{11}b$, a^{23}, quælibet harum habeat 23 partes, & 24 divisores.

3tium Exemplum. Sic & ad inveniendam quantitatem, habentem 42 partes aliquotas: quæro per præc. sect. quot quantitates assumendæ sint, qualisque ipsarum habitudo existat, quæ 42 diversis modis eligi valeant. Cum autem jam illarum multitudo non nisi unica reperiatur, atque ad hoc 42 quantitates sumendas esse, quæ omnes inter se æquales sint: idcirco quantitas ex iisdem conflata designabitur per a^{42}. Unde sequitur, ad designandam quantitatem, 43 divisores habentem, scribendum pariter fore a^{42}. Atque ita de aliis. Quorum omnium veritas ex 1ma sectione perspicua est.

Exercitationis causâ atque majoris illustrationis ergo eorum, quæ ostensa sunt, subjungimus hîc quantitates, datâ partium multitudinem habentes ab 1 usque ad 100, modis omnibus quibus designari possunt.

Quantitates datæ multitudinis partium aliquotarum.		Multitudines partium aliquotarum datæ.	
a	habet	1	Partes aliquotas
a^2	habet	2	
ab, a^3	habent singulæ	3	
a^4	&c.	4	
a^2b, a^5		5	
a^6		6	
a^3b, abc, a^7		7	
a^2b^2, a^8		8	
a^4b, a^9		9	
a^{10}		10	
$a^2bc, a^3b^2, a^5b, a^{11}$		11	
a^{12}		12	
a^6b, a^{13}		13	
a^4b^2, a^{14}		14	
$a^3bc, abcd, a^3b^3, a^7b, a^{15}$		15	
a^{16}		16	

a^2b^2c,

Quantitates datæ multitudinis partium aliquotarum.		Multitudines partium aliquotarum datæ.
a^2b^2c, a^5b^2, a^8b, a^{17}	habent singulæ	17
a^{18}	habet	18
a^4bc, a^4b^3, a^9b, a^{19}	&c.	19
a^6b^2, a^{20}		20
$a^{10}b$, a^{21}		21
a^{22}		22
a^3b^2c, a^2bcd, a^5bc, a^5b^3, a^7b^2, $a^{11}b$, a^{23}		23
a^4b^4, a^{24}		24
$a^{12}b$, a^{25}		25
$a^2b^2c^2$, a^8b^2, a^{26}		26
a^6bc, a^6b^3, $a^{13}b$, a^{27}		27
a^{28}		28
a^4b^2c, a^5b^4, a^9b^2, $a^{14}b$, a^{29}		29
a^{30}		30
a^3bcd, a^3b^3c, a^7bc, $abcde$, a^7b^3, $a^{15}b$, a^{32}		31
$a^{10}b^2$, a^{32}		32
$a^{16}b$, a^{33}		33
a^6b^4, a^{34}		34
a^2b^2cd, a^5b^2c, $a^3b^2c^2$, a^8bc, a^8b^3, a^5b^5, $a^{11}b^2$, $a^{17}b$, a^{35}		35
a^{36}		36
$a^{18}b$, a^{37}		37
$a^{12}b^2$, a^{38}		38
a^4bcd, a^4b^3c, a^9bc, a^7b^4, a^9b^3, $a^{19}b$, a^{39}		39
a^{40}		40
a^6b^2c, a^6b^5, $a^{13}b^2$, $a^{20}b$, a^{41}		41
a^{42}		42
$a^{10}bc$, $a^{10}b^3$, $a^{21}b$, a^{43}		43
$a^4b^2c^2$, a^8b^4, $a^{14}b^2$, a^{44}		44
$a^{22}b$, a^{45}		45
a^{46}		46
a^3b^2cd, a^5bcd, a^5b^3c, a^2bcde, $a^3b^3c^2$, a^7b^2c, $a^{11}bc$, a^7b^5, $a^{11}b^3$, $a^{15}b^2$, $a^{23}b$, a^{47}		47
a^6b^6, a^{48}		48
a^4b^4c, a^9b^4, $a^{24}b$, a^{49}		49
$a^{16}b^2$, a^{50}		50
$a^{12}bc$, $a^{12}b^3$, $a^{25}b$, a^{51}		51
a^{52}		52
$a^2b^2c^2d$, $a^5b^2c^2$, a^8b^2c, a^8b^5, $a^{17}b^2$, $a^{26}b$, a^{53}		53
$a^{10}b^4$, a^{54}		54
a^6bcd, a^6b^3c, a^7b^6, $a^{13}bc$, $a^{13}b^3$, $a^{27}b$, a^{55}		55

Partes aliquotas

Quantitates datæ multitudinis partium aliquotarum.		Multitudines partium aliquotarum datæ.
$a^{18}b^2, a^{56}$	habent singulæ	56
$a^{28}b, a^{57}$	habent singulæ	57
a^{58}	&c.	58
$a^4b^2cd, a^4b^3c^2, a^5b^4c, a^9b^2c, a^9b^5, a^{11}b^4, a^{14}bc, a^{14}b^3, a^{19}b^2, a^{25}b, a^{59}$		59
a^{60}		60
$a^{30}b. a^{61}$		61
$a^6b^2c^2, a^8b^6, a^{20}b^2, a^{62}$		62
$a^3b^3cd, a^3bcde, a^7bcd, a^7b^3c, a^3b^3c^3, abcdef, a^7b^7, a^{15}bc, a^{15}b^3, a^{31}b, a^{63}$		63
$a^{12}b^4, a^{64}$		64
$a^{10}b^2c, a^{10}b^5, a^{21}b^2, a^{32}b, a^{65}$		65
a^{66}		66
$a^{16}bc, a^{14}b^3, a^{33}b, a^{67}$		67
$a^{22}b^2, a^{68}$		68
$a^6b^4c, a^9b^6, a^{13}b^4, a^{34}b, a^{69}$		69
a^{70}		70
$a^5b^2cd, a^3b^2c^2d, a^2b^2cde, a^5b^3c^2, a^8bcd, a^7b^2c^2, a^8b^3c, a^5b^5c, a^{11}b^2c, a^{11}b^5, a^8b^7, a^{17}bc, a^{17}b^3, a^{23}b^2, a^{35}b, a^{71}$		71
a^{72}		72
$a^{36}b, a^{73}$		73
$a^4b^4c^2, a^{14}b^4, a^{24}b^2, a^{74}$		74
$a^{18}bc, a^{18}b^3, a^{37}b, a^{75}$		75
$a^{10}b^6, a^{76}$		76
$a^{12}b^2c, a^{12}b^5, a^{25}b^2, a^{38}b, a^{77}$		77
a^{78}		78
$a^4b^3cd, a^4bcde, a^9bcd, a^4b^3c^3, a^7b^4c, a^9b^3c, a^9b^7, a^{15}b^4, a^{19}bc, a^{19}b^3, a^{39}b, a^{79}$		79
$a^2b^2c^2d^2, a^8b^2c^2, a^8b^8, a^{26}b^2, a^{80}$		80
$a^{40}b, a^{81}$		81
a^8		82
$a^6b^2cd, a^6b^3c^2, a^6b^5c, a^{13}b^2c, a^{11}b^6, a^{13}b^5, a^{20}bc, a^{20}b^3, a^{27}b^2, a^{41}b, a^{83}$		83
$a^{16}b^4, a^{84}$		84
$a^{42}b, a^{85}$		85
$a^{28}b^2, a^{86}$		86
$a^{10}bcd, a^{10}b^3c, a^{10}b^7, a^{21}bc, a^{21}b^3, a^{43}b, a^{87}$		87
a^{88}		88
$a^4b^2c^2d, a^5b^4c^2, a^8b^4c, a^9b^2c^2, a^{14}b^2c, a^9b^8, a^{14}b^5, a^{17}b^4, a^{29}b^2, a^{44}b, a^{89}$		89

Partes aliquotæ

$a^{12}b^6,$

Quantitates datæ multitudinis partium aliquotarum.		Multitudines partium aliquotarum datæ.	
$a^{12}b^6$, a^{90}	habent fingulæ	90	
$a^{22}bc$, $a^{22}b^3$, $a^{45}b$, a^{91}	habent fingulæ	91	
$a^{30}b^2$, a^{92}	&c.	92	
$a^{46}b$, a^{93}		93	
$a^{18}b^4$, a^{94}		94	
a^3b^2cde, a^5b^3cd, a^5bcde, $a^3b^3c^2d$, a^7b^2cd, a^2bcdef, $a^7b^3c^2$, $a^5b^3c^3$, a^7b^5c, $a^{11}bcd$, $a^{11}b^3c$, $a^{15}b^2c$, $a^{11}b^7$, $a^{15}b^5$, $a^{23}bc$, $a^{23}b^3$, $a^{31}b^2$, $a^{47}b$, a^{95}		95	Partes aliquotas
a^{96}		96	
a^6b^6c, $a^{13}b^6$, $a^{48}b$, a^{97}		97	
$a^{10}b^2c^2$, $a^{10}b^8$, $a^{32}b^2$, a^{98}		98	
a^4b^4cd, $a^4b^4c^3$, a^9b^4c, a^9b^9, $a^{24}bc$, $a^{19}b^4$, $a^{24}b^3$, $a^{49}b$, a^{99}		99	
a^{100}.		100.	

SECTIO IV.

Ratio inveniendi minimos numeros, datam habentes partium aliquotarum aut divisorum multitudinem.

INventis per proximè præcedentem Sectionem, quantitatibus omnibus, datam habentibus partium aut divisorum multitudinem, oportet, assumendo pro quantitatibus, ex quibus producuntur, minimos primos numeros, & ex iis assignando omnium minimos quantitatibus, quæ plurimas habent dimensiones, quærere quisnam ex his pari modo productis omnium existat minimus. Est enim hic eorum, qui ipsius datæ multitudinis inveniri possunt, minimus, qui quæritur.

Ut ad inveniendum minimum numerum, 15 partes aliquotas habentem, quoniam quantitates *abcd*, a^3bc, a^3b^3, a^7b, & a^{15} singulæ habent 15 partes, & tribuendo ipsis *a*, *b*, *c*, & *d* minimos primos numeros 2, 3, 5, 7, horum multiplicatione pro *abcd* invenitur 210; at verò ductu ipsarum *a*, *a*, *a*, *b*, *c* pro a^3bc invenitur 120; & ductu ipsarum *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, *b*, pro a^3b^3 invenitur 216; & ductu ipsarum *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *b* pro a^7b invenitur 384; ac denique ductu ipsarum *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, pro a^{15} invenitur 32768: erit 120 eorum, qui inveniri possunt, ac 15 partes aliquotas habent, minimus quæsitus. 1mum *Exemplum.*

Ita & si quæratur minimus numerus, habens 16 divisores, quo-

 niam

niam similiter quantitates 16 divisores habentes sunt $abcd$, a^3bc, a^3b^3, a^7b, & a^{15}; sumendoque $a \propto 2$, $b \propto 3$, $c \propto 5$, & $d \propto 7$, pro iis, ut supra, repeniuntur numeri 210, 120, 216, 384, & 32768, inter quos 120 est minimus: erit pariter 120 eorum, qui 16 divisores habent, omnium minimus.

2dum Exemplum. Eodem modo, ut inveniatur minimus numerus, habens 23 partes aliquotas, & 24 divisores, quoniam a^2bcd, a^3b^2c, a^5bc, a^5b^3, a^7b^2, $a^{11}b$, & a^{23} singulæ habent 23 partes & 24 divisores, ac tribuendo ipsis a, b, c, d minimos primos numeros 2, 3, 5, 7 pro a^2bcd invenitur 420, pro a^3b^2c 360, pro a^5bc 480, pro a^5b^3 864, pro a^7b^2 1152, pro $a^{11}b$ 6144, & pro a^{23} 8388608: erit 360 eorum qui 23 partes habent & 24 divisores omnium minimus.

Notandum autem est in hoc & præcedenti exemplo, cum diversæ quantitates reperiantur, eandem partium aut divisorum multitudinem admittentes, quòd iis singulis tanquam diversis modis uti possimus ad infinitos numeros inveniendos, qui datam illam partium aut divisorum multitudinem habeant.

Ita si infinitos invenire velimus numeros, qui singuli habeant 15 partes & 16 divisores, uti possumus unaquâque quantitatum $abcd$, a^3bc, a^3b^3, a^7b, & a^{15}, tribuendo tantùm quantitatibus a, b, c, & d, ex quibus producuntur, numeros primos, ut libet, eosque aliter atque aliter sumendo, vel etiam pro iis accipiendo semper alios atque alios primos. Sic enim tribuendo a 2, b 3, c 5, invenietur pro a^3bc 120. At tribuendo a 3, b 2, c 5, invenietur pro a^3bc 270. Et tribuendo a 5, b 2, c 3, invenietur pro a^3bc 750. Vel etiam assumendo $a \propto 7$, $b \propto 11$, $c \propto 13$, fiet $a^3bc \propto 49049$. Aut sumendo $a \propto 17$, $b \propto 19$, & $c \propto 23$, fiet $a^3bc \propto 2146981$. Atque ita porrò in infinitum. Idem intellige de quolibet reliquarum quantitatum $abcd$, a^3b^3, a^7b, a^{15}; ut & de singulis a^2bcd, a^3b^2c, a^5bc, a^5b^3, a^7b^2, $a^{11}b$, & a^{23}, ad infinitos numeros inveniendos, qui 23 habent partes, & 24 divisores.

Ad hæc notatu dignum, quòd, licèt indifferenter per quamlibet harum quantitatum, æquè multas partes aut divisores habentium, infiniti numeri reperiantur ejusdem multitudinis, nihilominus tamen non semper per unamquamque ex illis absque discrimine minimus numerus inveniri possit, qui totidem partes aut divisores habeat. Nam tametsi, & ante, quâlibet uti possumus quantitatum $abcd$, a^3bc, a^3b^3, a^7b, a^{15}, & per eas singulas tanquam per diversos modos invenire infinitos numeros, habentes 15 partes & 16 divisores; tamen, cum

ad

ad minimos obtinendos (tribuendo quantitatibus a, b, c, d minimos primos 2, 3, 5, 7) ipsarum beneficio nulli reperiantur minores quàm 210, 120, 216, 384, 32768, patet quantitatem a^3bc esse illam solam, per quam omnium reperire licet minimum 120.

Sic &, cum per a^3b^2c inveniatur 360, atque hic numerus omnibus illis, qui per a^2bcd, a^5bc, a^5b^3, a^7b^2, a^{11}, a^{23} reperiri possunt, minor sit: erit quantitas a^3b^2c illa, quæ ad minimum numerum inveniendum, habentem 23 partes & 24 divisores, tantùm inservit.

Adeò ut hinc constet, tunc demum datæ multitudinis partium aut divisorum minimum obtineri numerum, cùm juxta omnes modos, qui extant, inventis minimis numeris cum inter hos esse minimum apparet.

Porrò ut in præcedenti tabula quantitates, quæ minimis numeris datæ multitudinis partium aut divisorum inveniendis inserviunt, ab aliis facilè dignoscantur: concessimus illis priorem cujusque regulæ locum, reliquis consequenter posteriores tribuentes, prout continuò majores minimos numeros suppeditant, indeque aliis posthabendæ videntur.

Denique ad inveniendum minimum numerum, habentem 42 partes, & 43 divisores, quoniam quantitas hanc habens partium & divisorum multitudinem unico tantùm modo designari potest, utpote scribendo a^{42}: fit ut, si pro a minimus sumatur primus numerus 2, isque quadragesies & bis ponatur, ac deinde multiplicetur, productus numerus 4398046511104 minimus sit quæsitus, cum præter eum nullus alius minimus existat. Atque ita de aliis. *3tium Exemplum.*

His subjungere visum fuit sequentem tabulam minimorum numerorum, datæ multitudinis partium & divisorum ab 1 usque ad 100.

Syllabus 100 *minimorum numerorum, data multitudinis partium & divisorum, ab* 1 *usque ad* 100.

Minimi numeri, datæ multitudinis partium aliquotarum & divisorum.		Multitudines partium aliquotarum datæ, iisdem respondentes.		Multitudines divisorum datæ, iisdem respondentes.	
2	habet.	1	part. aliquot. &	2	divisores.
4		2		3	
6		3		4	
16		4		5	
12		5		6	
64		6		7	
24		7		8	
36		8		9	
48		9		10	
1024		10		11	
60		11		12	
4096		12		13	
192		13		14	
144		14		15	
120		15		16	
65536		16		17	
180		17		18	
262144		18		19	
240		19		20	
576		20		21	
3072		21		22	
4194304		22		23	
360		23		24	
1296		24		25	
12288		25		26	
900		26		27	
960		27		28	
268435456		28		29	
720		29		30	
1073741824		30		31	
840		31		32	

9216

Minimi numeri, datæ multitudinis partium aliquotarum & divisorum.		Multitudines partium aliquotarum datæ, iisdem respondentes.	Multitudines divisorum datæ, iisdem respondentes.
9216	habet	32 part.aliquot.&	33 diviso-
196608		33	34 res.
5184		34	35
1260		35	36
68719476736		36	37
786432		37	38
36864		38	39
1680		39	40
1099511627776		40	41
2880		41	42
4398046511104		42	43
15360		43	44
3600		44	45
12582912		45	46
70368744177664		46	47
2520		47	48
46656		48	49
6480		49	50
589824		50	51
61440		51	52
4503599627370496		52	53
6300		53	54
82944		54	55
6720		55	56
2359296		56	57
805306368		57	58
288230376151711744		58	59
5040		59	60
1152921504606846976		60	61
3221225472		61	62
14400		62	63
7560		63	64
331776		64	65
46080		65	66
73786976294838206464		66	67
			983040

Minimi numeri, datæ multitudinis partium aliquotarum & divisorum.		Multitudines partium aliquotarum datæ, iisdem respondentes.	Multitudines divisorum datæ, iisdem respondentes.
983040	habet	67 part.aliquot.&	68 diviso-
37748736		68	69 res.
25920		69	70
1180591620717411303424		70	71
10080		71	72
4722366482869645213696		72	73
206158430208		73	74
32400		74	75
3932160		75	76
746496		76	77
184320		77	78
302231454903657293676544		78	79
15120		79	80
44100		80	81
3298534883328		81	82
4835703278458516698824704		82	83
20160		83	84
5308416		84	85
13194139533312		85	86
2415919104		86	87
107520		87	88
309485009821345068724781056		88	89
25200		89	90
2985984		90	91
62914560		91	92
9663676416		92	93
211106232532992		93	94
21233664		94	95
27720		95	96
79228162514264337593543950336		96	97
233280		97	98
230400		98	99
45360		99	100
126765060022822940149670320-5376		100	101.

SE-

SECTIO V.

Syllabus numerorum primorum, qui continentur in decem prioribus chiliadibus.

CUM ad ſolutionem Quæſtionum de partibus aliquotis & diviſoribus primos numeros in promptu habere valde opportunum ſit, atque his illarum praxis omnino facilis reddatur: haud inconveniens fore duximus, ſi, in ipſis hîc, tanquam in abaco, exponendis, prout eos ab unitate uſque ad 10.000 ſummâ accuratione inveſtigavimus, Sectionem hanc inſumeremus. Quod eò, magis conſultum judicavimus, quò ipſorum uſum latiùs per haſce diſciplinas ſe diffundere deprehendimus. Cum enim operatio quælibet, quæ per numeros inſtituenda eſt, per primos numeros tanquam per omnium minimos ſeu ſimpliciſſimos procedat, ipſiq́ue ulteriùs ad Quæſtiones, quæ per numeros enodari debent, diſſolvendas, præſertim deſerviant: nullus (ut confido) futurus eſt, qui illorum uſum hac in re non ſit agniturus. Quippe conſtat, ad Quæſtionem aliquam per numeros illuſtrandam, ſi ipſi ad id abſque delectu aſſumantur, eandem interdum, licèt quæſtio aliàs per ſe facilis ſit, tam vaſtis ac tædioſis numeris involvi, ut à Quæſtionis inſpectione tyrones è veſtigio deterreantur. His adde, quòd hi numeri ad fractiones abbreviandas non parùm quoque ſubſidii conferant; & iidem in dividendis æquationibus, earumq́ue inveſtigandis radicibus, ut & in componendis Logarithmis, ac in omni fermè calculo uſum ſuum præbeant.

Numeri primi
1. Chiliadis.

2
3
5
7
11
13
17
19
23
29
31
37
41
43
25. 47
53
59
61
67
71
73
79
83
89
97

101
103
107
109
113
127
131
137
139
149
151
157
21. 163
167
173
179
181
191
193
197
199

211
223
227
229
233
239
241
251
16. 257
263
269
271
277
281
283
293

307
311
313
317
331
337
347
349
353
16. 359
367
373
379
383
389
397

401
409
419
421
431
433
439
443
449
17. 457
461
463
467
479
487
491
499

503
509
521
523
541
547
557
14. 563
569
571
577
587
593
599

601
6 7
613
617
619
631
641
16. 643
647
653
659
661
673
677
683
691

701
709
719
727
733
739
743
14. 751
757
761
769
773
787
797

811
821
823
827
829
839
853
15. 857
859
863
877
881
883
887

907
911
919
929
937
941
947
14. 953
967
971
977
983
991
997

Nu-

Numeri primi 2. Chiliadis.

1009	1213	1433	1619	1867
1013	1217	1439	1621	1871
1019	1223	1447	1627	1873
1021	1229	1451	1637	1877
1031	1231	17. 1453	1657	1879
1033	15. 1237	1459	1663	1889
1039	1249	1471	1667	1901
16. 1049	1259	1481	1669	1907
1051	1277	1483	1693	1913
1061	1279	1487	1697	1931
1063	1283	1489	1699	1933
1069	1289	1493	1709	1949
1087	1291	1499	1721	13. 1951
1091	1297	1511	1723	1973
1093	1301	1523	1733	1979
1097	1303	1531	1741	1987
1103	1307	1543	12. 1747	1993
1109	1319	1549	1753	1997
1117	1321	12. 1553	1759	1999
1123	11. 1327	1559	1777	
1129	1361	1567	1783	
12. 1151	1367	1571	1787	
1153	1373	1579	1789	
1163	1381	1583	1801	
1171	1399	1597	1811	
1181	1409	1601	1823	
1187	1423	1607	1831	
1193	1427	1609	1847	
1201	1429	1613	1861	

Numeri primi 3. Chiliadis.

	2003		2213		2393		2633		2801
	2011		2221		2399		2647		2803
	2017		2237		2411		2657		2819
	2027		2239		2417		2659		2833
	2029		2243		2423		2663		2837
	2039		2251		2437		2671		2843
	2053		2267		2441	15.	2677	12.	2851
14.	2063	15.	2269	10.	2447		2683		2857
	2069		2273		2459		2687		2861
	2081		2281		2467		2689		2879
	2083		2287		2473		2693		2887
	2087		2293		2477		2699		2897
	2089		2297		2503		2707		2903
	2099		2309		2521		2711		2909
	2111		2311		2531		2713		2917
	2113		2333		2539		2719		2927
	2129		2339		2543		2729		2939
	2131		2341	11.	2549		2731	11.	2953
10.	2137		2347		2551	14.	2741		2957
	2141	15.	2351		2557		2749		2963
	2143		2357		2579		2753		2969
	2153		2371		2591		2767		2971
	2161		2377		2593		2777		2999
	2179		2381		2609		2789		
	2203		2383		2617		2791		
	2207		2389		2621		2797		

Nu-

Numeri primi 4 Chiliadis.

	3001		3221		3433		3623		3847
	3011		3229		3449		3631		3851
	3019		3251		3457		3637	11.	3853
	3023	11.	3253	11.	3461	13.	3643		3863
	3037		3257		3463		3659		3877
	3041		3259		3467		3671		3881
12.	3049		3271		3469		3673		3889
	3061		3299		3491		3677		—
	3067		—		3499		3691		3907
	3079		3301		—		3697		3911
	3083		3307		3511		—		3917
	3089		3313		3517		3701		3919
	—		3319		3527		3709		3923
	3109		3323		3529		3719	11.	3929
	3119		3329		3533		3727		3931
	3121		3331		3539		3733		3943
	3137		3343		3541		3739		3947
	3163	15.	3347	14.	3547	12.	3761		3967
10.	3167		3359		3557		3767		3989
	3169		3361		3559		3769		—
	3181		3371		3571		3779		
	3187		3373		3581		3793		
	3191		3389		3583		3797		
	—		3391		3593		—		
	3203		—		—		3803		
	3209		3407		3607		3821		
	3217		3413		3613		3823		
					3617		3833		

Numeri primi
5. Chiliadis.

4001	4211	4421	4639	8. 4861
4003	4217	4423	4643	4871
4007	4219	11. 4441	12. 4649	4877
4013	4229	4447	4651	4889
4019	16. 4231	4451	4657	4903
4021	4241	4457	4663	4909
4027	4243	4463	4673	4919
15. 4049	4253	4481	4679	4931
4051	4259	4483	4691	4933
4057	4261	4493	4703	4937
4073	4271	4507	4721	15. 4943
4079	4273	4513	4723	4951
4091	4283	4517	4729	4957
4093	4289	4519	4733	4967
4099	4297	4523	12. 4751	4969
4111	4327	12. 4547	4759	4973
4127	9. 4337	4549	4783	4987
4129	4339	4561	4787	4993
4133	4349	4567	4789	4999
4139	4357	4583	4793	
9. 4153	4363	4591	4799	
4157	4373	4597	4801	
4159	4391	4603	4813	
4177	4397	4621	4817	
4201	4409	4637	4831	

Nu-

Numeri primi
6. Chiliadis.

	5003	10.	5233		5449		5659		5861
	5009		5237		5471		5669		5867
	5011		5261		5477		5683		5869
	5021		5273		5479		5689		5879
	5023		5279		5483		5693		5881
12.	5039		5281		—		—		5897
	5051		5297		5501		5701		—
	5059		—		5503		5711		5903
	5077		5303		5507		5717		5923
	5081		5309		5519		5737		5927
	5087		5323		5521	10.	5741	7.	5939
	5099		5333	13.	5527		5743		5953
	5101	10.	5347		5531		5749		5981
	5107		5351		5557		5779		5987
	5113		5381		5563		5783		—
	5119		5387		5569		5791		
	5147		5393		5573		—		
11.	5153		5399		5581		5801		
	5167		—		5591		5807		
	5171		5407		—		5813		
	5179		5413		5623		5821		
	5189		5417		5639		5827		
	5197		5419		5641		5839		
	5209		3431		5647		5843		
	5227	13.	5437		5651	16.	5849		
	5231		5441	12.	5653		5851		
			5443		5657		5857		

Nu-

Numeri primi
7. Chiliadis.

6007
6011
6029
6037
6043
12. 6047
6053
6067
6073
6079
6089
6091

6101
6113
6121
6131
6133
11. 6143
6151
6163
6173
6197
6199

6203
6211
6217
6221
6229
6247
13. 6257
6263
6269
6271
6277
6287
6299

6301
6311
6317
6323
6329
6337
6343
15. 6353
6359
6361
6367
6373
6379
6389
6397

6421
6427
6449
8. 6451
6469
6473
6481
6491

6521
6529
6547
6551
6553
11. 6563
6569
6571
6577
6581
6599

6607
6619
6637
6653
10. 6659
6661
6673
6679
6689
6691

6701
6703
6709
6719
6733
6737
12. 6761
6763
6779
6781
6791
6793

6803
6823
6827
6829
6833
12. 6841
6857
6863
6869
6871
6883
6899

6907
6911
6917
6947
6949
6959
13. 6961
6967
6971
6977
6983
6991
6997

Nu-

Numeri primi
8. Chiliadis.

	7001		7229		7481		7639		7841
	7013	11.	7237		7487		7643	10.	7853
	7019		7243		7489	12.	7649		7867
	7027		7247		7499		7669		7873
9.	7039		7253		—		7673		7877
	7043		7283		7507		7681		7879
	7057		7297		7517		7687		7883
	7069		7307		7523		7691		—
	7079		7309		7529		7699		7901
	7103		7321		7537		—		7907
	7109		7331		7541		7703		7919
	7121	9.	7333		7547		7717		7927
	7127		7349	15.	7549		7723	10.	7933
10.	7129		7351		7559		7727		7937
	7151		7369		7561	10.	7741		7949
	7159		7393		7573		7753		7951
	7177		7411		7577		7757		7963
	7187		7417		7583		7759		7993
	7193		7433		7589		7789		
	7207		7451		7591		7793		
	7211		7457		—		—		
	7213	11.	7459		7603		7817		
	7219		7477		7607		7823		
					7621		7829		

Numeri primi 9. Chiliadis.

	8009		8221		8429		8647		8831
	8011		8231	8.	8431	13.	8663		8837
	8017		8233		8443		8669	13.	8839
	8039		8237		8447		8677		8849
	8053		8243		8461		8681		8861
11.	8059	14.	8263		8467		8689		8863
	8069		8269		—		8693		8867
	8081		8273		8501		8699		8887
	8087		8287		8513		—		8893
	8089		8291		8521		8707		—
	8093		8293		8527		8713		8923
	—		8297		8537		8719		8929
	8101		—	12.	8539		8731		8933
	8111		8311		8543		8737		8941
	8117		8317		8563	11.	8741	9.	8951
	8123		8329		8573		8747		8963
	8147		8353		8581		8753		8969
10.	8161	9.	8363		8597		8761		8971
	8167		8369		8599		8779		8999
	8171		8377		—		8783		—
	8179		8387		8609		—		
	8191		8389		8623		8803		
	—		—		8627		8807		
	8209		8419		8629		8819		
	8219		8423		8641		8821		

Nu-

Numeri primi 10. Chiliadis.

9001
9007
9011
9013
9029
11. 9041
9043
9049
9059
9067
9091

9103
9109
9127
9133
9137
9151
12. 9157
9161
9173
9181
9187
9199

9203
9209
9221
9227
6239
11. 9241
9257
9277
9281
9283
9293

9311
9319
9323
9337
9341
11. 9343
9349
9371
9377
9391
9397

9403
9413
9419
9421
9431
9433
9437
15. 9439
9461
9463
9467
9473
9479
9491
9497

9511
9521
9533
7. 9539
9547
9551
9587

9601
9613
9619
9923
9629
9631
13. 9643
9649
9661
9677
9679
9689
9697

9719
9721
9733
9739
9743
11. 9749
9767
9769
9781
9787
9791

9803
9811
9871
9829
9833
12. 9839
9851
9857
9859
9871
9883
9887

9901
9907
9923
9929
9. 9931
9941
9949
9967
9973

SECTIO VI.

De Progressionibus, rectangula triangula constituentibus, quorum latera sint rationalia.

QUO pacto rectangula triangula inveniri possint, quorum latera per numeros rationales exprimantur, ostenditur inferiùs Sectione 24. Id autem cum in componendis variis Quæstionibus sive Problematis Geometricis ad irrationalium calculum evitandum plurimùm inserviat, aut ad ea in numeris proponenda, quibus illustrari & facilè solvi possint, magnum usum habeat: non injucundum fuerit, si ex Stifelio exposuero duas Progressiones, quas in eundem finem adfert in Commentariis suis ad 1mum caput Algebræ Christophori Rudolphi, Germanicè editæ. Quæ sunt hujusmodi:

$$1\tfrac{1}{3}.\ 2\tfrac{2}{5}.\ 3\tfrac{3}{7}.\ 4\tfrac{4}{9}.\ 5\tfrac{5}{11}.\ 6\tfrac{6}{13}.\ 7\tfrac{7}{15}.\ 8\tfrac{8}{17}, \&c.$$

$$1\tfrac{7}{8}.\ 2\tfrac{11}{12}.\ 3\tfrac{15}{16}.\ 4\tfrac{19}{20}.\ 5\tfrac{23}{24}.\ 6\tfrac{27}{28}.\ 7\tfrac{31}{32}.\ 8\tfrac{35}{36}, \&c.$$

In quarum utraque tres animadvertere licet Progressiones Arithmeticas distinctas: nimirum integrorum, tum numeratorum, ac deinde etiam denominatorum. Sunt autem omnes divisionum quotientes duorum numerorum, quorum quadrata, cùm adduntur, etiam quadratum efficiunt.

Hinc ad eos obtinendos, si integer multiplicetur per denominatorem & producto addatur numerator, fiet major quæsitus. Minor verò quæsitus semper est denominator.

Sic assumendo quotientem $2\tfrac{11}{12}$, quoniam 2 per 12 multiplicatus & producto 24 additus 11, fit 35: poterunt 35 & 12 assumi pro duobus lateribus circa rectum angulum trianguli rectanguli, cujus item 3tium latus seu hypotenusa sit rationalis. Etenim additis illorum quadratis 1225 & 144, cum inde, per 47 Prop. 1mi libri Elem. Euclidis, pro quadrato hypotenusæ reperiatur quadratus numerus 1369, cujus radix est 37: patet hypotenusam fore 37. Atque ita de aliis.

Porrò quoniam duabus hisce Stifelii Progressionibus Simon Jacobi Coburgensis in majori sua Arithmetica, Germanicè conscriptâ, ad pag. 240 sex alias superaddit, seque mille ejusmodi Progressiones exhibere posse scribit, non autem artem quâ inveniendæ sint tradens: haud afferre pigebit modum, quo infinitæ inveniri queant, qualem eum olim ab insigni Arithmetico D. Nicolao Huberti à Persijn didici. Ipsius autem modus talis est.

As-

Assumptis duobus rationis alicujus terminis, ut ex iis inveniatur numerator, oportet, uno termino per alterum multiplicato, observare utrum productum sit par an impar. Si enim impar fuerit, designabit illud ipsum numeratorem; at verò pari existente, si ejusdem producti sumatur duplum.

Deinde ad inveniendum denominatorem, addantur dicti rationis termini, & summa, si impar est, per terminorum differentiam multiplicata, dabit denominatorem; at verò pari existente, si hujus producti sumatur semissis.

Porrò ut 2^{dus} obtineatur numerator, multiplicetur terminorum differentia per 2, si par fuerit; aut per 4, si impar sit, productoque ducto in majorem terminum, quod exsurgit addatur numeratori priùs invento, & fiet numerator 2^{dus}.

Denique ad habendum 2^{dum} denominatorem, addatur quadratum differentiæ terminorum, si id par fuerit, aut ejusdem duplum, si impar, ad denominatorem priùs inventum, fietque denominator 2^{dus}.

Ex quibus inde facile est per supra dicta reliquos Progressionis terminos reperire in infinitum.

Ut si termini rationis sint 1 & 2. quoniam hi in se invicem ducti faciunt 2, numerum parem, ideo 4, ipsius duplum, erit numerator.

Deinde quia additis 1 & 2, summa 3 est impar numerus, hinc multiplicato 3 per 1, differentiam terminorum, fiet 3, denominator.

Porrò quoniam 1, differentia terminorum, impar est, hinc si ipsa multiplicetur per 4, ac rursus productum 4 per 2, majorem terminum: erit 12, summa hujus producti & prioris numeratoris, numerator 2^{dus}.

Denique quia 1, quadratum differentiæ terminorum impar est, ideo si duplum ejus 2 ad denominatorem inventum 3 addatur, fiet 5 denominator 2^{dus}. Adeò ut $\frac{4}{3}$ & $\frac{12}{5}$ singuli exhibeant duo trianguli latera, quæ sunt circa rectum angulum, cujusquè trianguli hypotenusa item rationalis sit.

Quibus ita constitutis, cùm numeratoribus per denominatores divisis oriantur $1\frac{1}{3}$ & $2\frac{2}{5}$ qui priores sunt duo termini $1^{mæ}$ ex duabus supra allatis Progressionibus Stifelii: patet, hanc eandem ex duplæ rationis terminis 1 & 2 originem ducere, ac reliquos ejusdem Progressionis terminos ex iis nullo negotio inveniri, si modò integri, tum numeratores, ac deinde etiam denominatores singuli separatim Arithmeticam Progressionem constituere fingantur.

 Ubi

Ubi notandum, quòd, ficut ex terminis rationis 1 ad 2, ope prioris partis hujus regulæ invenimus numeratorem & denominatorem primæ fractionis $\frac{4}{3}$, ac deinde ope posterioris partis numeratorem & denominatorem 2dæ fractionis $\frac{12}{5}$, & ex binis hisce postea cæteras omnes, ut dictum est, ita ope solius primæ partis numeratorem ac denominatorem invenire liceat 2dæ, utendo ad id terminis rationis 2 ad 3; at verò reliquarum omnium sequentium, utendo ad id terminis rationum 3 ad 4, 4 ad 5, 5 ad 6, &c.

Idem de sequentibus est intelligendum.

Ut si termini rationis fuerint 1 & 3, invenietur inde per priorem regulæ partem fractio $\frac{3}{4}$; sumendoque terminos rationis 3 ad 5, invenietur inde fractio $\frac{15}{8}$, atque ita porrò reliquæ $\frac{35}{12}$, $\frac{63}{16}$, $\frac{99}{20}$, $\frac{143}{24}$, $\frac{195}{28}$, $\frac{255}{32}$, $\frac{323}{36}$, assumendo terminos rationum 5 ad 7, 7 ad 9, 9 ad 11, 11 ad 13, 13 ad 15, 15 ad 17, 17 ad 19. Unde 2da Stifelii resultat Progressio $\frac{3}{4}$, $1\frac{7}{8}$, $2\frac{11}{12}$, $3\frac{15}{16}$, $4\frac{19}{20}$, $5\frac{23}{24}$, $6\frac{27}{28}$, $7\frac{31}{32}$, $8\frac{35}{36}$ &c.

Eodem modo invenitur, quòd termini Progressionis $\frac{8}{15}$, $1\frac{23}{33}$, $2\frac{38}{51}$, $3\frac{53}{69}$, $4\frac{68}{87}$, $5\frac{83}{105}$, &c. fiunt ab hisce rationum terminis 1—4, 4—7, 7—10, 10—13, 13—16, 16—19, &c.

Et Progressionis $\frac{5}{12}$, $1\frac{17}{28}$, $2\frac{29}{44}$, $3\frac{41}{60}$, $4\frac{53}{76}$, $5\frac{65}{92}$, &c. fiunt ab his 1—5, 5—9, 9—13, 13—17, 17—21, 21—25: &c.

Et Progressionis $\frac{12}{31}$, $1\frac{47}{85}$, $2\frac{82}{135}$, $3\frac{117}{185}$, $4\frac{152}{235}$, $5\frac{187}{285}$. &c. fiunt ab his 1—6, 6—11, 11—16, 16—21, 21—26, 26—31. &c.

Et Progressionis $\frac{7}{24}$, $1\frac{31}{60}$, $2\frac{55}{96}$, $3\frac{79}{132}$, $4\frac{103}{168}$, $5\frac{127}{204}$. &c. fiunt ab his 1—7, 7—13, 13—19, 19—25, 25—31, 31—37. &c.

Atque ita de aliis.

Haud secus termini Progressionis $\frac{20}{21}$, $2\frac{2}{39}$, $3\frac{5}{57}$, $4\frac{8}{75}$, $5\frac{11}{93}$, $6\frac{14}{111}$. &c. fiunt ab his 2—5, 5—8, 8—11, 11—14, 14—17, 17—20. &c.

Et Progressionis $1\frac{1}{20}$, $2\frac{5}{36}$, $3\frac{9}{52}$, $4\frac{13}{68}$, $5\frac{17}{84}$, $6\frac{21}{100}$. &c. fiunt ab his 3—7, 7—11, 11—15, 15—19, 19—23, 23—27. &c.

Et Progressionis $1\frac{7}{65}$, $2\frac{22}{115}$, $3\frac{37}{165}$, $4\frac{52}{215}$, $5\frac{67}{265}$, $6\frac{82}{315}$. &c. fiunt ab his 4—9, 9—14, 14—19, 19—24, 24—29, 29—34. &c.

Atque ita de aliis.

Cæterùm sciendum, quâlibet harum fractionum exhiberi semper triangulum in minimis numeris, eandem cum ipsis rationem habentibus: ac proinde si hæc triangula omnia similiter posita concipiantur, ipsa continuò fore dissimilia seu alterius atque alterius semper speciei. Adeò ut quis hâc arte nullo negotio centum & plura triangula intra horam reperire valeat, quæ à se invicem sint diversa.

SE-

SECTIO VII.

De modo inveniendi numeros, qui per datos divisi certos post divisionem relinquant.

QUò Sectio hæc ritè intelligatur, explicabimus eam per sequentes quæstiones.

1ma *Quæstio*:

Invenire numerum, qui per 2, 3, & 5 divisus in divisione relinquat 1; at si per 7 dividatur, ut nihil remaneat.

Ad hoc suppositâ $2 \propto a$, $3 \propto b$, $5 \propto c$, & $7 \propto d$, cum nulla hîc quotorum sit ratio habenda, patet, conditionibus requisitis satisfactum iri, si pro quæsito numero statuamus dz, vel $av + 1$, vel $bx + 1$, vel $cy + 1$; adeò ut habeatur hæc æqualitas: $dz \propto av + 1 \propto bx + 1 \propto cy + 1$, seu hæc $dz - 1 \propto av \propto bx \propto cy$.

E qua liquet, ad quæsitum numerum obtinendum, opùs tantùm esse quærere numerum, qui dividi possit per 2, 3, & 5, & si unitate augeatur, dividi queat per 7.

Quoniam autem ad id sumendo primùm 30, minimum communem dividuum numerorum 2, 3, & 5, eique addendo unitatem summa 31 absque reliquo per 7 dividi nequit: progrediendum erit ad duplum, triplum, quadruplum, aliudvé multiplum ipsius 30. Hinc cum sumendo 30 ter, & producto addendo 1, summa 91 per 7 dividi possit, erit 91 numerus quæsitus.

Porrò ne quis in his multiplis sumendis divisionem pluries tentare opus habeat, illud operosum putans, poterit quæsitum numerum è priori divisione nullo negotio elicere. Nam cum 7 in 30 contineatur quater, & remaneat 2: fiet ut in 90, ejus triplo, contineatur 12des, & 6 remaneat; adeoque 91 per 7 sine reliquo dividatur, oriaturque 13.

Cæterùm cum infiniti sint numeri, qui quæsito satisfaciant, poterimus invento jam primo seu omnium minimo 90 ex eo facilè reliquos sequentes invenire.

Etenim invento divisorum datorum 2, 3, 5, & 7 minimo communi dividuo 210, cum ipse ad 91 additus faciat numerum 301, qui iisdem divisionum legibus est obnoxius cum invento 91: idcirco ipse erit alter quæsitus. Huic autem si rursus addas 210, fiet 511, tertius quæsitus.

ſitus. Atque ita in infinitum, addendo ſemper 210 ad ultimum inventum.

Notandum autem, ut quæſtio propoſita ſolvi queat, oportere unumquemque datorum numerorum 2, 3, & 5 cum 7 eſſe primum. Aliàs enim fieri nequit, ut ipſius 7 reperiatur aliquis multiplus, qui multiplum alterius cum eo non primi unitate excedat.

2da *Quæſtio.*

Invenire numerum, qui diviſus per 7 relinquat 2, per 11 diviſus relinquat 1, & per 13 diviſus relinquat 9.

Quoniam hæc Quæſtio reducta, ut ante, ad æqualitatem, fit $7x + 2 \propto 11y + 1 \propto 13z + 9$, vel $7x + 1 \propto 11y \propto 13z + 8$, atque hæc ipſa, ad quæſitum numerum obtinendum, nos docet, ſumendum eſſe numerum 11, aliumvé hujus multiplum, qui ſit talis, ut ab eo ablatis 1 & 8 reliqui dividi poſſint per 7 & 13: patet, ſi ad id ſumatur 99, noncuplum ipſius 11, & ab eo auferantur 1 & 8, reliquorum alterum 98 dividi per 7, & alterum 91 per 13. adeoque numerum inveniendum, qui per $7x + 2$, vel $11y + 1$, vel $13z + 9$ deſignatur, fore 100. Is enim per 7 diviſus, relinquit 2, per 11 diviſus relinquit 1, & per 13 diviſus relinquit 9, ſicut requirebatur.

Porrò ut infiniti ejuſmodi numeri habeantur, opùs tantùm erit ad jam inventum 100 addere 1001, diviſorum 7, 11, & 13 minimum communem dividuum, & fit 1101, alter quæſitus. Atque ita addendo continuò 1001 ad ultimò inventum invenientur ſemper alii ac alii in infinitum.

Cæterùm cum ad hujuſmodi quæſtiones ſolvendas modum ingenioſiſſimum excogitàrit ante memoratus D. Nicolaus Huberti à Perſijn, placuit eum, qualem ab ipſo accepi, paucis hîc ſubjicere.

Ut ad ſolvendam 1mam Quæſtionem, invento primùm diviſorum 2, 3, 5, & 7 minimo communi dividuo 210, eoque per unumquemque ex ipſis bis diviſo: conſidero quid in ſingulis ſecundis diviſionibus relinquatur. Eſt autem reliquorum ſequens habenda ratio:

```
      1
210|105|52.
  2|  2|
```

Quoniam in hac diviſione relinquitur 1, erit 105 ut inferiùs pro multiplicatore ſumendus.

```
 11
210|70|23.
  3| 3|
```

Similiter quia in hac diviſione relinquitur 1, erit 70 eodem modo pro multiplicatore ſumendus.

210

2
210'42|8. Si in hac divisione reliquum fuisset 1, debuisset pariter
5| 5| 42 pro multiplicatore accipi.

Sed jam 42 toties sumi debet, ut, si per 5 dividatur, reliquum sit 1, id est, ter sumendus erit. Quod ut facili negotio exploretur, oportet tantùm inquirere, quoties reliquum 2 sumendum sit, ita ut si per 5 dividatur reliquum sit 1. Et fit, ut ante, ter. Eodem modo fac in sequentibus. Hinc sumendo 42 ter fit 126, pro multiplicatore.

2
210'30|4. Haud secus si reliquum in hac divisione fuisset 1, de-
7| 7| buisset itidem 30 pro multiplicatore assumi.

Nunc autem assumpto reliquo 2 toties, ita ut per 7 diviso relinquatur 1, id est, quater, multiplico 30 per 4, & fit 120, pro multiplicatore.

Jam quo pacto ex inventis hisce multiplicatoribus quæsitus numerus reperiatur, sequens operatio indicabit.

Divisores.	Reliqua.	Multiplicatores.	Producta.
2	1	105	105
3	1	70	70
5	1	126	126
7	0	120	0
		summa	301

9
Divid. 301 per min.com.div. 210 { 1. Reliquum 91 arguit quæsitum numerum.

Similiter ad solvendam 2dam Quæstionem, Invento divisorum 7, 11, 13 minimo communi dividuo 1001, eoque bis per unumquemque ex ipsis diviso, reliquorum cujusque divisionis sequens habeatur ratio.

32
1001|14 (3|10. Si in hac divisione reliquum fuisset 1, debuisset 143 pro multiplicatore accipi.
7 7

Jam autem assumpto reliquo 3 toties, ita ut per 7 diviso relinquatur 1, id est, quinquies: multiplico 143 per 5, & fit 715, pro multiplicatore.

```
 1  13
1001|91|8.
 11|11|
```

Si in hac divisione reliquum fuisset 1, debuisset 91 pro multiplicatore accipi.

Jam autem assumpto reliquo 3 toties, ita ut per 11 diviso relinquatur 1, id est, quater: multiplico 91 per 4, & fit 364 pro multiplicatore.

```
 9  12
1001|77|5.
 13|13|
```

Si in hac divisione reliquum fuisset 1, debuisset 77 pro multiplicatore accipi.

Jam autem assumpto reliquo 12 toties, ita ut per 13 diviso relinquatur 1, id est, duodecies: multiplico 77 per 12, & fit 924 pro multiplicatore.

Ex multiplicatoribus inventis quæsitum numerum sic elicies.

Divisores.	Reliqua.	Multiplicatores.	Producta.
7	2	715	1430
11	1	364	364
13	9	924	8316
		summa.	10110

```
            0
Divide     10110 ⎧ 10. Reliquum
per min.com.1001 ⎨ indicat quæsitũ
      div.       ⎩ numerum.
```

Atque ita de aliis.

De his tradidit quoque celebris Arithmeticus Simon Jacobi Coburgensis in Arithmetica sua majori, sed multiplicatores invenire non docet.

SECTIO VIII.

Praxis ponderandi.

CUM utilis pariter atque jucunda speculatio sit censenda, quæ ponderandi praxin concernit, docens paucis ponderibus complures libras expendere: visum fuit præsentem de illâ sectionem instituere.

Quoniam autem dupliciter id fieri posse compertum est, vel scilicet additione solâ, vel additione & subtractione simul: explicabo subinde quæ ad utrumque modum pertinent.

Ad

Ad priorèm modum pertinet Progreſſionis duplæ conſideratio ſequens:

nimirum,

Si, ab unitate in ratione dupla acceptis quotlibet numeris, ſumantur pondera tot librarum, quot Progreſſionis hujus termini indicant: poterunt eorum beneficio per ſolam additionem libræ omnes obtineri, quas aliquis ad ponderandum propoſuerit:

Etenim, aſſumptis duobus primis 1 & 2, ſi 1 ℔ in lancem ponam pendet 1 libram; & ſi 2 ℔ in lancem ponam pendent 2 libras; ac deinde ſi 1 & 2 ℔ ſimul in lancem ponam pendent 3 libras. Quòd ſi verò ad hæc duo pondera 1 & 2 librarum tertium acceſſerit pondus 4 librarum, atque hoc pondus 4 librarum lanci committatur, habebo 4 libras; quibus ſi 1 ℔ addatur, habebo 5 libras; tollendo autem hanc 1 ℔ ejuſque loco 2 ℔ immittens, habebo unà cum prædictis 4 libris 6 libras; his ſi præterea apponatur 1 ℔, fient 7 libræ. Sicque 1, 2, & 4 libris ponderare potero libras omnes ab 1 uſque ad 7 ℔.

Similiter beneficio quatuor ponderum 1, 2, 4, & 8 librarum potero librare 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, & 15 libras; & ope 5 ponderum 1, 2, 4, 8, & 16 librarum libras omnes ab 1 ℔ uſque ad 31 ℔. Pari ratione licebit cum ſex hiſce 1, 2, 4, 8, 16, & 32 librarum expendere libras omnes ab 1 ℔ uſque ad 63 ℔; & ope horum ſeptem 1, 2, 4, 8, 16, 32, & 64 librarum libras omnes ab 1 ℔ uſque ad 127 libras. Atque ſic ulteriùs in infinitum.

Porrò ad inveſtigandum, quo pacto, aſſumptis compluribus horum ponderum, ipſa ſimul jungi debeant, ut ordine libræ omnes mediantibus iis ponderentur: deſigno 1, 2, 4, 8 &c. per *a*, *b*, *c*, *d*, &c. harumque quæro electiones omnes, ſicut 1mâ ſectione oſtenſum fuit, & invenio electiones ſequentes:

1
a.

2 3
b. *ab*.

4 5 6 7
c. *ac*. *bc*. *abc*.

8 9 10 11 12 13 14 15
d. *ad*. *bd*. *abd*. *cd*. *acd*. *bcd*. *abcd*.

Indicantes ordine omnes libras, quæ datis quatuor ponderibus

1, 2, 4, & 8 librarum appendi possunt, ut & quo pacto dicta pondera conjungi debeant.

Idem de aliis compluribus in infinitum intellige.

In posterioris modi explanationem lubet hoc loco in medium adducere, quæ à Stifelio afferuntur in commentariis suis ad 1mum caput Algebræ Christophori Rudolphi, ubi hæc de Progressione tripla scribit:

Progressio 1. 3. 9. 27. 81. 243. 729 &c. singularem quoque suam habet proprietatem. Si enim pondera accipiantur totidem librarum quot hujus Progressionis termini indicant: poterimus cum duobus primis, 1 & 3 librarum, ponderare 1, 2, 3, & 4 libras. Nam si 1 ℔ in lancem ponam, pendet unam libram; & si 3 ℔ ponam in alteram lancem, pendent hæ 3 ℔ non nisi 2 libras, propter 1 ℔ in priori lance positam: quam libram si tollam, ponderabo 3 ℔; at verò si unà simul jungam, habebo 4 libras.

Eodem modo ope trium priorum librarum 1, 3, & 9 ponderari poterunt libræ sequentes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, & 13. Sic & 1, 3, 9, 27 libræ, facientes simul 40 libras, inservire poterunt ad quemvis librarum numerum ab 1 ℔ usque ad 40 ℔ ponderandum. Haud secus si quinque sumantur pondera, nimirum: 1, 3, 9, 27, & 81 librarum, poterunt eorum beneficio ponderari omnes libræ ab 1 ℔ usque ad 121 libras. Et per sex 1, 3, 9, 27, 81, & 243 omnes libræ ab 1 usque ad 364. Atque ita porrò in infinitum.

Quoniam igitur ex his constat, utendo numeris progressionis triplæ, ope pauciorum ponderum plures ponderari libras, quàm si in eundem finem uteremur ponderibus progressionis duplæ; non è re fore existimo, si hîc deinceps, ut ante, quo pacto hæc pondera separatim utrique lanci imponenda sint, ad omnes ordine libras expendendas, ostendam: ad quod investigandum & evulgandum Clarissimus Vir-Juvenis D. Theodorus Cranen, L. A. M. ac Med. Doctor Mathematumque peritissimus, me incitavit.

Ut autem pateat, quæ ratiocinatio nos ad terminorum hujus Progressionis inventionem deduxerit, sequentem propono quæstionem:

Invenire duos, tres, pluresvé numeros, qui soli sumpti ut & modis omnibus additi ac subtracti, faciant numeros ab unitate in serie naturali excrescentes.

Primò ad inveniendos duos hujusmodi numeros, pono pro uno 1, & pro

& pro altero ζ. Restat igitur ut soli sumpti, ut & additi ac subtracti, faciant numeros ab unitate in serie naturali excrescentes. Unde, cum hinc fiant 1, ζ-1, z, & $\zeta+1$, relinquitur, ut per eos designentur numeri 1, 2, 3, & 4.

E quibus elicitur, sumendo 1 pro 1mo, ad unam libram ponderandam, pro 2do z accipiendum esse 3, hisque binis ad quatuor libras nec ultra ascendi posse.

Deinde ad inveniendos tres, pono pro 1mo 1, pro 2do ζ, & pro 3tio y. Et manifestum est, si à tertio seu majori y abstulero duos primos 1 & z, reliquum y-ζ-1 indicare debere librarum numerum, omnium minimum, qui à tribus ponderibus ponderari potest, hoc est, ipsum designare debere 5 libras. Unde ad y-ζ-1 addendo 1, designabit y ζ sex libras. Cui rursus unitate additâ, fit y $z+1$ pro 7 libris. Huic verò si denuo addatur unitas, fiet y $\zeta+2$, pro 8 libris designandis. Sed cum nullum pondus 2 librarum habeam, at verò ejus loco assumere possim z 1, fit ut ad y-ζ addendo z-1 summa y-1 designet 8 libras. Ad quem si iterum unitatem addam, habebo y ad 9 libras designandas.

Et liquet, si pro 1mo quæsitorum numerorum sumatur 1, & pro 2do z. 3, tunc pro 3tio y accipiendum fore 9. Cui si ulteriùs addidero 1, tum ζ-1, tum ζ, tum $\zeta+1$: habebo $y+1$, $y+z$-1, $y+z$, & $y+z+1$, ad ordine sequentium librarum numeros 10, 11, 12, & 13, nec ultra, per inventa hæc tria pondera expendendos.

Porrò ad inveniendos quatuor numeros, pono pro 1mo 1, pro 2do z, pro 3tio y, & pro quarto x. Et evidens est, si ab hoc quarto seu majori x sustulero tres priores 1, z, & y, reliquum x-y-ζ-1 indicare librarum numerum, qui omnium minimus à quatuor ponderibus libretur; adeoque ipsum designare 14 libras. Unde quartus x facilè innotescit. Etenim cum $y+\zeta+1$ & x-y-ζ-1, indicantes 13 & 14 libras, simul additi in unam summam côalescant, quæ est x, designabit x. 27 libras. Quibus igitur quatuor ponderibus, si omnia simul sumantur, usque ad 40 libr. ascendetur. Similiterque si quinque numeri quærantur, & pro quinto ponatur v, designabit v-x-y-z-1 libras 41. Cui si addidero $x+y+z+1 \infty 40$, habebo $v \infty 81$. Atque ita ulteriùs in infinitum.

His igitur ita se habentibus, superest ut explicemus, quo pacto ad praxin referenda sint.

Quantùm itaque ad primum modum, quo libræ quotlibet beneficio ponderum duplæ Progressionis ordine ponderari possunt, perin-

de atque per literas *a, b, ab, c, ac, bc, abc, d, ad, bd, abd, cd, acd, bcd, abcd*, &c. indicatur: oportet tantùm in locum ipſarum *a, b, c, d*, &c. quibus ad pondera 1, 2, 4, 8, &c. librarum deſignanda uſi ſumus, ſubrogare numeros 1, 2, 4, 8, &c. eoſque hiſce characteribus inſignire ①, ②, ④, ⑧, &c. Quæ porrò prout ſic inſignita ſeorſim vel junctim, ſicut præcedentes literæ indicant, in lancem A immiſſa fuerint, ordine pondera exhibebunt, ad quemlibet librarum numerum expendendum.

Quod ſecundum modum concernit, quo libræ quotvis ope ponderum progreſſionis triplæ ordine ponderantur, omnino ſicut literæ $1, z-1, z, z+1, y-z-1, y-z, y-z+1, y-1, y, y+1, y+z-1, y+z, y+z+1$ &c. demonſtrant: opus ſolummodò erit in locum ipſarum $1, z, y, x, v$, &c., quæ pondera 1, 3, 9, 27, 81, &c. librarum deſignare inventa ſunt, ſubſtituere numeros 1, 3, 9, 27, 81, &c., tribuendo iis ſequentes characteres ①, ③, ⑨, ㉗, (81), &c.

Cum autem in his ponderibus deſignandis contingat ut aliis ſignum +, aliis verò ſignum — præfigatur: ſcire oportet eo caſu pondera utrique lanci eſſe committenda, nimirum illa, quæ abſque ſigno vel per + denotantur, debere lanci A imponi; at verò quæ per — deſignantur eſſe lanci B aſſignanda. Hæc enim, cum ſemper ab iis, quæ in A, præponderentur, faciunt, ut in ordine librandis quotcunque libris compenſatio juſta ad amuſsim ubique adhibeatur.

Cæterùm quoniam ponderandi praxis in omni fermè negotiatione uſu venit, placuit dilucidioris explicationis ergò eorum, quæ oſtenſa ſunt, duas hîc tabellas ſubjungere, quarum altera, ordine tradit libras omnes ab 1 uſque ad 127 ℔, quæ ope 7 ponderum 1, 2, 4, 8, 16, 32, & 64 librarum ſecundùm priorem modum expendi poſſunt; altera, omnes libras ab 1 uſque ad 121 ℔, quæ beneficio 5 ponderum 1, 3, 9, 27, & 81 librarum juxta poſteriorem modum librari queunt. Ubi præterea advertendum, utramque eodem modo de libræ partibus & minutiis eſſe intelligendam, ac proinde earundem uſum in onerum, merciumque traditione & receptione quàm maximè eſſe conſpicuum: ita ut in foris, lanienis, ac officinis denique quibuſvis, ubi ponderum ratio haberi ſolet, haud parvo cum emolumento uſurpentur.

A eſt

A } est lanx, in qua collocari debent { pondera.
B } est lanx, in qua collocari debent { merces.

C. Sunt libræ mercium expendendæ.
D. Sunt pondera lanci A imponendæ.
E. Sunt pondera unà cum mercibus lanci B imponenda.

Tabella prior.

C.	D
1.	①
2.	②
3.	①②
4.	④
5.	①④
6.	②④
7.	①②④
8.	⑧
9.	①⑧
10.	②⑧
11.	①②⑧
12.	④⑧
13.	①④⑧

Tabella posterior.

C.	D	E
1.	①	
2.	③	①
3.	③	
4.	③①	
5.	⑨	③①
6.	⑨	③
7.	⑨①	③
8.	⑨	①
9.	⑨	
10.	⑨①	
11.	⑨③	①
12.	⑨③	
13.	⑨③①	

14. ②④⑧

Tabella prior.

C.	D
14.	②④⑧
15.	①②④⑧
16.	(16)
17.	①(16)
18.	②(16)
19.	①②(16)
20.	④(16)
21.	①④(16)
22.	②④(16)
23.	①②④(16)
24.	⑧(16)
25.	①⑧(16)
26.	②⑧(16)
27.	①②⑧(16)
28.	④⑧(16)
29.	①④⑧(16)
30.	②④⑧(16)
31.	①②④⑧(16)
32.	(32)
33.	①(32)
34.	②(32)
35.	①②(32)
36.	④(32)
37.	①④(32)
38.	②④(32)
39.	①②④(32)
40.	⑧(32)
41.	①⑧(32)
42.	②⑧(32)
43.	①②⑧(32)
44.	④⑧(32)
45.	①④⑧(32)
46.	②④⑧(32)
47.	①②④⑧(32)
48.	(16)(32)
49.	①(16)(32)

Tabella posterior.

C.	D	E
14.	(27)	⑨③①
15.	(27)	⑨③
16.	(27)①	⑨③
17.	(27)	⑨①
18.	(27)	⑨
19.	(27)①	⑨
20.	(27)③	⑨①
21.	(27)③	⑨
22.	(27)③①	⑨
23.	(27)	③①
24.	(27)	③
25.	(27)①	③
26.	(27)	①
27.	(27)	
28.	(27)①	
29.	(27)③	①
30.	(27)③	
31.	(27)③①	
32.	(27)⑨	③①
33.	(27)⑨	③
34.	(27)⑨①	③
35.	(27)⑨	①
36.	(27)⑨	
37.	(27)⑨①	
38.	(27)⑨③	①
39.	(27)⑨③	
40.	(27)⑨③①	
41.	(81)	(27)⑨③①
42.	(81)	(27)⑨③
43.	(81)①	(27)⑨③
44.	(81)	(27)⑨①
45.	(81)	(27)⑨
46.	(81)①	(27)⑨
47.	(81)③	(27)⑨①
48.	(81)③	(27)⑨
49.	(81)③①	(27)⑨

50.

Tabella prior. C.	D	Tabella posterior. C.	D	E
50.	②(16)(32)	50.	(81)	(27)③①
51.	①②(16)(32)	51.	(81)	(27)③
52.	④(16)(32)	52.	(81)①	(27)③
53.	①④(16)(32)	53.	(81)	(27)①
54.	②④(16)(32)	54.	(81)	(27)
55.	①②④(16)(32)	55.	(81)①	(27)
56.	⑧(16)(32)	56.	(81)③	(27)①
57.	①⑧(16)(32)	57.	(81)③	(27)
58.	②⑧(16)(32)	58.	(81)③①	(27)
59.	①②⑧(16)(32)	59.	(81)⑨	(27)③①
60.	④⑧(16)(32)	60.	(81)⑨	(27)③
61.	①④⑧(16)(32)	61.	(81)⑨①	(27)③
62.	②④⑧(16)(32)	62.	(81)⑨	(27)①
63.	①②④⑧(16)(32)	63.	(81)⑨	(27)
64.	(64)	64.	(81)⑨①	(27)
65.	①(64)	65.	(81)⑨③	(27)①
66.	②(64)	66.	(81)⑨③	(27)
67.	①②(64)	67.	(81)⑨③①	(27)
68.	④(64)	68.	(81)	⑨③①
69.	①④(64)	69.	(81)	⑨③
70.	②④(64)	70.	(81)①	⑨③
71.	①②④(64)	71.	(81)	⑨①
72.	⑧(64)	72.	(81)	⑨
73.	①⑧(64)	73.	(81)①	⑨
74.	②⑧(64)	74.	(81)③	⑨①
75.	①②⑧(64)	75.	(81)③	⑨
76.	④⑧(64)	76.	(81)③①	⑨
77.	①④⑧(64)	77.	(81)	③①
78.	②④⑧(64)	78.	(81)	③
79.	①②④⑧(64)	79.	(81)①	③
80.	(16)(64)	80.	(81)	①
81.	①(16)(64)	81.	(81)	
82.	②(16)(64)	82.	(81)①	
83.	①②(16)(64)	83.	(81)③	①
84.	④(16)(64)	84.	(81)③	
85.	①④(16)(64)	85.	(81)③①	

Tabella prior. C.	D	Tabella posterior. C.	D	E
86.	(2)(4)(16)(64)	86.	(81)(9)	(3)(1)
87.	(1)(2)(4)(16)(64)	87.	(81)(9)	(3)
88.	(8)(16)(64)	88.	(81)(9)(1)	(3)
89.	(1)(8)(16)(64)	89.	(81)(9)	(1)
90.	(2)(8)(16)(64)	90.	(81)(9)	
91.	(1)(2)(8)(16)(64)	91.	(81)(9)(1)	
92.	(4)(8)(16)(64)	92.	(81)(9)(3)	(1)
93.	(1)(4)(8)(16)(64)	93.	(81)(9)(3)	
94.	(2)(4)(8)(16)(64)	94.	(81)(9)(3)(1)	
95.	(1)(2)(4)(8)(16)(64)	95.	(81)(27)	(9)(3)(1)
96.	(32)(64)	96.	(81)(27)	(9)(3)
97.	(1)(32)(64)	97.	(81)(27)(1)	(9)(3)
98.	(2)(32)(64)	98.	(81)(27)	(9)(1)
99.	(1)(2)(32)(64)	99.	(81)(27)	(9)
100.	(4)(32)(64)	100.	(81)(27)(1)	(9)
101.	(1)(4)(32)(64)	101.	(81)(27)(3)	(9)(1)
102.	(2)(4)(32)(64)	102.	(81)(27)(3)	(9)
103.	(1)(2)(4)(32)(64)	103.	(81)(27)(3)(1)	(9)
104.	(8)(32)(64)	104.	(81)(27)	(3)(1)
105.	(1)(8)(32)(64)	105.	(81)(27)	(3)
106.	(2)(8)(32)(64)	106.	(81)(27)(1)	(3)
107.	(1)(2)(8)(32)(64)	107.	(81)(27)	(1)
108.	(4)(8)(32)(64)	108.	(81)(27)	
109.	(1)(4)(8)(32)(64)	109.	(81)(27)(1)	
110.	(2)(4)(8)(32)(64)	110.	(81)(27)(3)	(1)
111.	(1)(2)(4)(8)(32)(64)	111.	(81)(27)(3)	
112.	(16)(32)(64)	112.	(81)(27)(3)(1)	
113.	(1)(16)(32)(64)	113.	(81)(27)(9)	(3)(1)
114.	(2)(16)(32)(64)	114.	(81)(27)(9)	(3)
115.	(1)(2)(16)(32)(64)	115.	(81)(27)(9)(1)	(3)
116.	(4)(16)(32)(64)	116.	(81)(27)(9)	(1)
117.	(1)(4)(16)(32)(64)	117.	(81)(27)(9)	
118.	(2)(4)(16)(32)(64)	118.	(81)(27)(9)(1)	
119.	(1)(2)(4)(16)(32)(64)	119.	(81)(27)(9)(3)	(1)
120.	(8)(16)(32)(64)	120.	(81)(27)(9)(3)	
121.	(1)(8)(16)(32)(64)	121.	(81)(27)(9)(3)(1)	

C. D.

122. ②⑧(16)(32)(64)
123. ①②⑧(16)(32)(64)
124. [4]⑧(16)(32)(64)
125. ①[4]⑧(16)(32)(64)
126. ②[4]⑧(16)(32)(64)
127. ①②[4]⑧(16)(32)(64)

SECTIO IX.

Ratio inveniendi numeros amicabiles, hoc est, duos numeros, quorum partes aliquotæ, cùm adduntur, eos ipsos vice versâ componunt.

SUnt qui existimant, plures operationes Arithmeticas reperiri, quæ Algebræ non subjiciantur, inter quos est Arithmeticus haud ignobilis Michaël Stifelius, qui in commentariis suis super Algebra Christophori Rudolphi, post resolutionem quæstionum, quæ ad Cubicam Æquationem ascendunt, hæc scribit:

„ Wie wol aber ein jede Coß einen unaußsprechlichen begriff hat „ in sich allerley künstlicher rechnung/dennoch findet man viel feiner „ rechnung welche der Coß nicht sind underworffen/sondern neben „ der Coß fliessen auß der Theorica / welchs ich wol wolte mit vielen „ feynen Exempeln beweysen / wil es aber hie bey einem oder zweyen „ Exempeln beruhen lassen.

Quorum sensus hic est:

At licet resolutio æquationis cujusque gradus ineffabilem usum habeat expediendi quemlibet artificiosum calculum, nihilominus tamen multa egregia supputationes reperiuntur, quæ Algebræ non sunt obnoxiæ, sed citra eam ex Theorica fluunt, quod multis utique elegantibus exemplis demonstrare possem, nisi id uno aut altero exemplo ostendisse sufficeret.

Est autem primum, quod in eum finem adfert, hujusmodi.

Quære duos numeros, ita ut partes omnes aliquotæ minoris simul additæ faciant majorem numerum, & partes omnes aliquotæ majoris simul additæ faciant minorem numerum.

Quapropter cum ego longè aliter statuendum esse putem, ostendam quo pacto Algebræ beneficio non tantùm duos hosce numeros reperire in procinctu sit; sed etiam quisnam sit progressus in infini-

tum investigandi semper alios duos, qui idem præstent; siquidem hoc id ipsum est, quod præsens Sectio innuit.

Ad quos igitur inveniendos, pono pro uno numero $4x$, & pro altero $4yz$, hoc est, a^2x & a^2yz.

Unde cum per 1mam Sectionem partes aliquotæ ipsius $4x$ sint 1, 2, 4, x, & $2x$: erit $7 + 3x \propto 4yz$

$$\& \text{ fit } x \propto \frac{4yz - 7}{3}$$

$$\text{adeoque } 4x \propto \frac{16yz - 28}{3}.$$

Eodem modo, cum partes aliquotæ ipsius $4yz$ sint 1, 2, 4, y, $2y$, $4y$, z, $2z$, $4z$, yz, & $2yz$:

$$\text{erit } 4x, \text{ hoc est, } \frac{16yz - 28}{3} \propto 7 + 7y + 7z + 3yz$$

Unde, reductâ æquatione, invenitur $y \propto \frac{3z + 7}{z - 3}$, seu $3 + \frac{16}{z - 3}$.

Vel etiam $z \propto \frac{3y + 7}{y - 3}$, seu $3 + \frac{16}{y - 3}$.

Hinc cum, pro y assumpto primo numero 5, pro z inveniatur primus 11, & pro x primus 71, è quibus $4x$ fit $\propto 284$, & $4yz \propto 220$: patet, quæsitos numeros fore 284 & 220.

Jam verò ut constet num & minores duo numeri quàm 284 & 220 inveniri possint, qui idem præstent, pono pro uno numero $2x$, & pro altero $2yz$, hoc est, ax & ayz.

Unde cum operando, ut supra, inveniatur $x \propto 2yz - 3$,

$$\& \; y \propto 1 + \frac{4}{z - 1},$$

$$\text{vel } z \propto 1 + \frac{4}{y - 1}:$$

patet, si pro y sumatur primus numerus 5, tunc pro z inveniri primum 2, & pro x primum 17. Verùm quia sic pro z idem fit numerus 2, qui hypothesium $2x$ & $2yz$, quique has easdem destruit, ac in locum ax & ayz substituit ax & aay: evidens fit inventis hisce numeris quæsito non satisfactum iri. Quare cum sumendo pro y alium primum numerum, ut 3, tunc pro z etiam inveniatur 3, quod perinde po-

positiones convertit, præterquam quod eo casu x quoque non sit primus; nec præter jam assumptos ullos alios assumere liceat (siquidem pro y, unde z & x sunt inveniendæ, talis primus numerus assumi debet, ut, ab eo sublatâ unitate, reliquum dividere possit 4): argumentum est, juxta præcedentem viam, minores duos numeros quàm supra inventos 284 & 220 non reperiri.

Sed dicet aliquis eos fortè aliâ viâ inventum iri, utpote pro iis ponendo $2x$ & yz, hoc est, ax & yz; vel etiam xy & xyz. Verùm cum juxta priorem hanc suppositionem inveniatur $z \propto \frac{y+7}{2y-1}$, & juxta posteriorem $1+x+y+z+xy+xz+yz \propto xy$; illic autem pro y nullus primus numerus assumi possit, ut inde z & x reperiantur, quales requiruntur; hîc verò æquatio omnino fit impossibilis, idemque hoc in quavis alia suppositione contingat: concludo 284 & 220 esse omnium eorum, qui inveniri possunt, minimos.

Porrò ut quærantur duo alii majores, pono pro uno numero $8x$ & pro altero $8yz$, hoc est, a^3x & a^3yz: invenieturque, operando ut ante, $x \propto \frac{8yz-15}{7}$

& $y \propto 7 + \frac{64}{z-7}$

vel $z \propto 7 + \frac{64}{y-7}$. Unde sumendo $y \propto 11$, erit $z \propto 23$, & $x \propto 287$. qui numerus non est primus. Hinc sumendo $y \propto 23$, cum pro z inveniatur 11, & pro x idem numerus, qui ante, nec pro y ullus alius primus numerus assumi possit, ita ut inde z & x reperiantur, ut requiritur: constat juxta hanc hypothesin quæsitos numeros non inveniri.

Pergo itaque, ponendo pro uno numero $16x$, & pro altero $16yz$, hoc est, a^4x & a^4yz. Unde juxta superiorem modum invenitur

$$x \propto \frac{16yz-31}{15}$$

$$\& \; y \propto 15 + \frac{256}{z-15}$$

$$\text{vel } z = 15 + \frac{256}{y-15}.$$

Hinc quoniam semper eadem ratio est quærendi quantitatem y per quantitatem z, quæ quærendi z per y, & assumendo pro y primum numerum 47, pro z fiat primus 23, & pro x primus 1151: idem continget si pro z sumatur 47, fiet enim tunc $y = 23$, & $x = 1151$, ut ante. E quibus alter quæsitus numerus $16\,x$ fit $= 18416$, & alter $16\,yz = 17296$. Qui sunt duo alii amicabiles præter supra inventos 284 & 220.

Ut autem primi numeri, pro y vel z sumendi, qui huc conducere possunt, nullo negotio ostendantur, consentaneum fuerit ad id quærere priùs numeri 256 omnes divisores, atque ex summis, postquam ipsis singulis numerus 15 est additus, eligere primos numeros. In quem finem primos numeros Sectionis 5^{tæ} inspicere haud erit inopportunum.

Omnino ut hîc videre licet.

256	128	64	32	16	8	4	2	1
2	2	2	2	2	2	2	2	

Ad	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256,	divisores numeri 256,
adde	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15:	
Et fit pro y.	16.	17.	19.	23.	31.	47.	79.	143.	271.	Qui numeri omnes præter 16 & 143 primi sunt.

Similiter, ut quærantur rursus alii duo, pono pro uno numero $32\,x$ & pro altero $32\,yz$, hoc est, a^5x & a^5yz: invenioque, sicut superiùs factum fuit,

$$x = \frac{32\,yz - 63}{31}$$

$$\& \; z = 31 + \frac{1024}{y-31}.$$

Sed cum hîc nullus primus pro y sumi queat, è quo etiam z & x primi reperiantur, sicut requiritur, progredior, ponendo pro uno $64\,x$ & pro altero $64\,yz$, hoc est, a^6x & a^6yz. At verò cum & hic non magis quàm juxta præcedentem hypothesin primi obtingant, progrediendo rursus suppono unum numerum esse $128\,x$ & alterum $128\,yz$, hoc est, a^6x & a^6yz.

Cum

Cum autem hîc operando, ut supra, x fiat $= \frac{128yz - 255}{127}$, & $z = 127 + \frac{16384}{y - 127}$; & assumpto pro y primo numero 191, pro z reperiatur primus 383, & pro x primus 73727: hinc alter quæsitus $128x$ erit 9437056, & alter $128yz = 9363584$. Qui sunt duo adhuc alii amicabiles præter supra inventos 284 & 220, & 18416 & 17296. Eodem modo procedere licet in infinitum ad inveniendos semper alios atque alios duos.

Rationem verò primos numeros eligendi, pro y sumendos, poteris ex adjuncta operatione non aliter ac supra colligere.

x	x	x			x	x			x					
16384	8192	4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	

Ad numeri 16384 divisores:

	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.	2048.	4096.	8192.	16384.
adde	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.
& fit pro y.	128.	129.	131.	135.	143.	159.	191.	255.	383.	639.	1151.	2175.	4223.	8319.	16511.

Qui numeri omnes, præter 131, 191, 383, & 1151, sunt compositi.

Cæterùm ut iis, qui Algebræ ignari sunt, ratio quoque amicabiles numeros inveniendi constet, in medium adducturus sum Regulam, quam olim ab illustri Viro Renato des-Cartes didici, qui Algebræ peritiâ doctissimorum consensu non modò summas in hisce Disciplinis difficultates superare novit, ipsiusque beneficio Regulas & Theoremata, earundem resolutioni inservientia, invenire; sed etiam, quicquid demum circa illas ab humano ingenio cognosci potuit determinare. Quam excolendo, tandem illam sibi efformavit Methodum, quâ obvia quælibet, ipsis etiam Perspicacissimis (id quod pluries expertus loquor) Ingeniis remoram injicientia, uno quasi obtutu penetrare potis fuit; ac, quidcunque certi in reliquis Scientiis lumine naturali sciri potuit, ex Indubitatis Principiis deducere valuit.

Dicta autem ipsius regula est hujusmodi:

Si sumatur binarius vel quilibet alius numerus ex solius binarii multiplicatione productus, modò sit talis, ut si tollatur unitas ab ejus triplo fiat numerus primus: Itemque si tollatur unitas ab ejus sextuplo, fiat numerus primus: Et denique si tollatur ab ejus quadrati octodecuplo, ducaturque hic ultimus

mus numerus primus per duplum numeri assumpti, Fiet numerus, cujus partes aliquotæ dabunt alium numerum, qui vice versâ partes aliquotas habebit æquales primo numero præcedenti.

1. *Exemplum.*

Sic assumendo binarium

2 binarius	2	2
per 3	per 6	2
6 ejus triplum.	12 ejus sextuplum.	4 ejus quadratum
tollatur 1 unitas.	toll. 1 unitas	per 18
5 num. primus.	11 num. primus.	72 ejus octodecuplum
		tollatur 1 unitas
		71 numerus primus.
		per 4 duplũ numeri assumpti
		284 unus numerus quęsitus.

Alius autem numerus quæsitus producetur multiplicando duos primos inventos numeros primos unum per alterum, & productum per duplum assumpti.

Ergo. 5 numerus primus prior.
per 11 numerus primus alter.
55 productum
per 4 duplum assumpti
220 alter numerus quæsitus.

2. Ex-

Assumatur numerus

2. *Exemplum.*

8 | 8 | 8
per 3 | per 6 | 8
24 ejus triplum. | 48 ejus sextuplum. | 64 ejus quadratum
tollatur 1 unitas. | tollatur 1 unitas | per 18
23 numerus primus prior. | 47 numerus primus alter. | 512
| 23 | 64
| 141 | 1152 ejus octodecuplum
| 94 | tollatur 1 unitas
| 1081 productum. | 1151 numerus primus 3tius
| per 16 duplum assumpti | per 16 duplum assumpti
| 6486 | 6906
| 1081 | 1151
| 17296 alter numerus quæsitus. | 18416 unus numerus quæsitus.

3. *Exemplum.*

Et sumendo 64, quia 191, 383, & 73727 sunt numeri primi, habebo numeros 9437056 & 9363584. Et sic de cæteris.

Ecce sequentem operationem.

64 Assumptus num. | 64 | 64
per 3 | per 6 | 64
192 ejus triplum. | 384 ejus sextuplū. | 256
tollatur 1 unitas | tollatur 1 unitas | 384
191 numerus primus prior. | 383 num. primus alter. | 4096 ejus quadratum.
| 191 | per 18
| 383 | 32768
| 3447 | 4096
| 383 | 73728 ejus octodecuplum.
| | tollatur 1 unitas
| 73153 productum. | 73727 num. prim. tert.
| per 128 duplum assumpti. | per 128 duplū assūpti.
| 585224 | 589816
| 146306 | 147454
| 73153 | 73727
| 9363584 alter num. quæsitus. | 9437056 unus num. quæsitus.

 Cum

Cum plures de partibus aliquotis quæstiones per Algebram enodare, perfectorumque numerorum naturam auxilio ejus exponere hîc decrevissem, ne tamen aliorum operam, quam ea in re collocasse post deprehendi, frustrare viderer, prætermittere id æquum duxi. Cum enim, sicut Mercennus refert in Reflexionibus suis Physico-Mathematicis, Vir Eximius D. Freniclius de numeris figuratis, primis, compositis, &c. tria volumina conscripserit, quæ nondum (quod sciam) in lucem prodiêre: præstolari illa satiùs mihi visum est, quàm plura afferendo mea ipsius inventis anteponere. His adde quòd inter Cartesii monumenta, de quo supra memini, tractatus etiam extet, qui de partibus aliquotis inscribitur, cujus item editionem ut & reliquorum ipsius scriptorum à munificentia Viri Excellentissimi, D. PETRI CHANUT, harum Scientiarum peritissimi, penes quem illa religiosè asservantur, exspectamus, quàm primùm graviora ejus munera id permittent. Quocirca ne tantorum Virorum inventis invidere, propriam quærendo gloriam, quin potiùs in iisdem promovendis operam conferre censear: placuit ea pauca, quæ de partibus aliquotis ac divisoribus tradidi (tanquam aditum ad illa) præmittere, donec illorum scripta impetremus.

SECTIO X.

De modô inveniendi triangula, quorum singula latera, segmenta basis & perpendicularis exprimantur per numeros rationales absolutos.

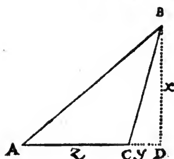
HOc Problema duos casus habet, perpendicularis enim aut cadit extra, aut intra triangulum.

1. casus, in quo perpendicularis cadit extra.

Igitur ad solvendum primum casum, pro basi A C pono z, pro perpendiculari B D x, & pro segmento externo C D y: unde segmentum A D fit $z+y$.

Quibus ita positis, cum quadratum ex C B sit æquale binis quadratis ex C D, D B, erit $xx+yy$ æquale $\square^{to}$. Esto quadrato à latere $y+b$: eritque $xx+yy \propto yy+2by+bb$. Hoc est, dempto utrinque yy, & ordinatâ æquatione ita ut y reperiatur sola, fiet $y \propto \frac{xx-bb}{2b}$.

Simi-



Similiter, quoniam quadratum ex AB æquale est binis quadratis ex AD, DB, erit $xx + \zeta\zeta + {}^2zy + yy$ æquale $\square^{to}$. Hujus autem latus fingatur esse $z + y + a$, eritque $xx + zz + {}^2zy + yy \propto \zeta\zeta + {}^2zy + yy + {}^2a\zeta + {}^2ay + aa$. Hoc est, rejectis utrobique $\zeta\zeta + {}^2zy + yy$, & $2az + aa$ in alteram partem transpositis, erit $xx - {}^2az - aa \propto {}^2ay$. Substituatur jam in locum y valor ejus inventus, & fit $xx - {}^2az - aa \propto \frac{axx - abb}{b}$. Tum multiplicato utrinque per b, & translatis terminis, ita ut quantitas ζ unam obtineat æquationis partem: habebitur $\zeta \propto \frac{bxx - axx + abb - aab}{2ab}$.

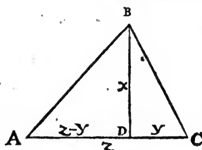
Ubi patet, sumendo x, b, & a ad libitum, quo pacto inveniantur y & ζ. Unde porrò facile est invenire AB & BC. Cum enim pro latere quadrati, cui quadratum ex CB adæquatum est, statuerimus $y + b$: erit ipsa CB $\propto \frac{xx + bb}{2b}$; & AB, cujus quadratum quadrato ex $z + y + a$ æquiparatum est, $\propto \frac{xx + aa}{2a}$. Quibus omnibus ad communem denominatorem ${}^2ab$ reductis, si ipse deinde omittatur, fiet pro BD $2abx$, pro CD $axx - abb$, pro AD $bxx - baa$, pro CB $axx + abb$, pro AB $bxx + baa$, & pro AC $bxx - axx + abb - aab$.

Hinc, assumptis pro x, b, & a quantitatibus utcunque, ita tamen ut b & a singulæ ipsâ x sint minores, liquet, quâ ratione quis tot triangula constituere possit, quot voluerit, quorum singula latera, & perpendicularis cadens extra, nec non basis segmenta per rationales numeros absolutos exprimantur.

Etenim si pro x sumatur 3, pro b 2, & pro a 1: erit perpendicularis BD $\propto 2abx \propto 12$, segmentum CD $\propto axx - abb \propto 5$, segmentum AD $\propto bxx - baa \propto 16$, unde basis AC fit 11; latus autem CB $\propto axx + abb \propto 13$, & latus AB $\propto bxx + baa \propto 20$. Et sic de aliis.

 2dus

2^{dus}. *caſus, in quo perpendicularis cadit intra.*



Quod ad ſecundum caſum attinet, is eodem modo reſolvitur atque primus. Si enim, ut ſupra, baſin A C ponamus $\propto z$, perpendicularem BD $\propto x$, & ſegmentum DC $\propto y$: erit ſegmentum AD $\propto z - y$.

His ita conſtitutis, cum quadratum ex CB æquetur duobus quadratis ex C D, D B: erit $xx + yy$ æquale $\square^{to}$. Hinc ponendo pro ejus latere $y + b$, habebitur $xx + yy \propto yy + {}^{2}by + bb$. Et fit, ut ante, $y \propto \frac{xx - bb}{2b}$.

Eodem modo, quia quadratum ex AB tantundem valet atque duo quadrata ex AD & DB: erit $xx + zz - {}^{2}zy + yy$ æquale $\square^{to}$. Pro cujus radice ſi ponamus $z - y + a$, habebitur $xx + zz - {}^{2}zy + yy \propto zz - {}^{2}zy + yy + {}^{2}az - {}^{2}ay + aa$. Et fit $2ay \propto aa + {}^{2}az - xx$. Unde ſubrogando valorem ipſius y invenietur $z \propto \frac{bxx + axx - abb - aab}{2ab}$.

Ubi, ut ſupra, patet, ſumendo x, b, & a pro lubitu, quâ ratione inveniri poſſint y & z. E quibus porrò nullo negotio inveniuntur A B & B C. Nam cum pro latere quadrati, cui quadratum ex CB æquale ſuppoſitum eſt, ſtatuerimus $y + b$: erit ipſa CB $\propto \frac{xx + bb}{2b}$, & AB, cujus quadratum quadrato à radice $z - y + a$ adæquatum eſt, $\propto \frac{xx + aa}{2a}$. Quibus omnibus ſub eodem denominatore $2ab$ reductis, fiet, ipſo deinde rejecto, pro BD $2abx$, pro CD $axx - abb$, pro AD $bxx - baa$, pro CB $axx + abb$, pro AB $bxx + baa$, & pro AC $bxx + axx - abb - baa$.

Unde, aſſumptis utcunque quantitatibus x, b, & a, ita tamen ut b & a ſingulæ minores ſint quàm x, liquet, quo pacto ex iis triangula conſtitui poſſint, quorũ latera ſingula, & perpendicularis cadens intra, nec non baſis ſegmenta per num. rationales abſolutos exprimantur.

Si enim pro x accipiatur 3, pro b 2, & pro a 1: erit perpendicularis BD $\propto {}^{2}abx \propto 12$, ſegmentum CD $\propto axx - abb \propto 5$, ſegmentum AD $\propto bxx - baa \propto 16$, unde baſis A C fit 21, latus autem CB $\propto axx + abb \propto 13$, & latus AB $\propto bxx + baa \propto 20$. Et ſic de aliis. Idem

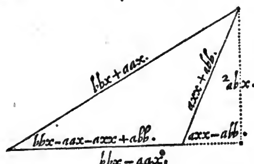
Idem aliter per disjunctionem & conjunctionem duorum triangulorum rectangulorum.

PRimò igitur, ut inveniatur triangulum, in quo perpendicularis cadit extra, patet ex ostensis, accipiendo pro lubitu duas quantitates x & b, quâ ratione ex iis inveniri possit triangulum rectangulum, quale superius CBD, cujus latera sint rationalia. Sumendo nempe latus unum circa rectum seu perpendicularem BD $\infty\, x$, & latus alterum seu basin DC $\infty\, \frac{xx-bb}{2b}$, hypotenusam verò BC $\infty\, \frac{xx+bb}{2b}$. Hoc est, in integris, multiplicando ubique per denominatorem $2b$, fiet, ipso deinde rejecto, perpendicularis $\infty\, 2bx$, basis $\infty\, xx-bb$, & hypotenusa $\infty\, xx+bb$.

Haud secus assumptis ad libitum duabus quantitatibus b & a, invenietur ex iis alterum triangulum, cujus perpendicularis est $\infty\, 2ab$, & basis $\infty\, bb-aa$, hypotenusa verò $\infty\, bb+aa$.

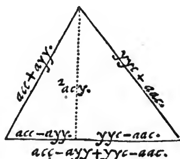
Jam ut ex binis hisce inventis triangulis tertium efformetur, cujus perpendicularis extra cadat, quæque ut & singula ipsius latera & basis segmenta absolutis numeris exprimatur, reduco ipsa ad eandem altitudinem. quod fit quærendo quantitatibus $2bx$ & $2ab$, perpendicularibus assignatis, quantitatem $2abx$, minimam scilicet, quæ per eas sine reliquo dividi potest. Hâc enim inventâ, si $2abx$ per $2bx$ & $2ab$ dividatur, & ortæ quantitates a & x per suas bases & hypotenusas multiplicentur: invenietur $axx-abb$ pro base, & $axx+abb$ pro hypotenusa unius trianguli; at $bbx-aax$ pro basi, & $bbx+aax$ pro hypotenusa alterius trianguli, quorum utriusque altitudo seu perpendicularis est $2abx$. Quæ duo triangula si ab eadem porrò perpendicularis parte constituta intelligantur, mutuâ suâ disjunctione triangulum referent, quod quæritur. Ipsum autem est quale sequitur.

Deinde, ad inveniendum triangulum, in quo perpendicularis cadit intra, quoniam sumendo pro lubitu duas quantitates c & y, per eas obtinetur triangulum rectangulum, cujus perpendicularis est $2cy$, basis $cc-yy$, & hypotenusa $cc+yy$; similiterque assumptis y & a per eas alterum invenitur, cujus perpendicularis est $2ay$, basis $yy-aa$, & hypotenusa $yy+aa$: fit, ut si hæc ipsa ad eandem postea altitudinem reducta fuerint, quæsitum triangulum ex iis constituatur.



Quocirca cum minima quantitas, quæ per $2cy$ & $2ay$ divisibilis est, sit $2acy$; & dividendo $2acy$ per $2cy$ fiat a; at $2acy$ per $2ay$ fiat c: ideo multiplicando $cc - yy$ & $cc + yy$ per a, fiet $acc - ayy$ pro base, & $acc + ayy$ pro hypotenusa unius trianguli; at verò $yy - aa$ & $yy + aa$ per c, fiet $yyc - aac$ pro base, & $yyc + aac$ pro hypotenusa alterius trianguli. Quorum itaque communis altitudo seu perpendicularis est $2acy$.

Hinc si bina hæc triangula conjunctim posita intelligantur, hoc est, ut unum ab una parte perpendicularis, & alterum ab altera parte reperiatur, component triangulum, in quo perpendicularis cadit intra, quæ haud aliter atque singula ipsius latera ac basis segmenta per absolutos numeros rationales exprimetur. Ipsum autem tale est.



SECTIO XI.

Modus inveniendi duo triangula ejusdem basis & altitudinis, quorum singula latera, basis segmenta, & perpendiculares exprimantur per numeros rationales integros.

PRoblema hoc per antecedens resolvitur, ad id nempe binis huc revocatis præcedentibus triangulis, cum quantitatibus adscriptis. Primò enim, quia invenienda hæc triangula ejusdem altitudinis requi-

requiruntur, habebitur æquatio inter $2abx$ & $2acy$. Unde pro x invenitur $\frac{cy}{b}$, & pro xx. $\frac{ccyy}{bb}$.

Deinde cum ipsa ejusdem quoque basis existere debeant, erit similiter $bbx - aax - axx + abb$ æquale $acc - ayy + yyc - aac$. Unde subrogatis valoribus ipsius x & xx, fit $\frac{bbcy - aacy}{b} - \frac{accyy}{bb} + abb = acc - ayy + yyc - aac$. Multiplicetur ubique per bb, & æquatio ritè ordinetur, fietque:

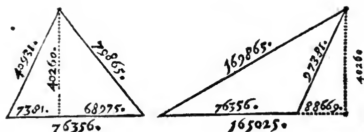
$$yy = \frac{\begin{array}{l} + b^3cy + aabbc \\ - aabc + ab^4 \\ \qquad\quad - abbcc \end{array}}{bbc + acc - abb.}$$

Jam ut in hac æquatione evitetur radicis extractio, supponatur $aabbc + ab^4 = abbcc$: invenieturque $a = c - \frac{bb}{c}$. Quoniam autem sumendo c & b ad libitum, per eas invenimus reliquas quantitates $a, y,$ & x, statuendo nempe c majorem quàm b: fiet, ut, si accipiamus $c = 3$, & $b = 2$, pro a reperiatur $\frac{5}{3}$, pro y. $\frac{22}{61}$, & pro x. $\frac{33}{61}$. E quibus inde facile est singula utriusque trianguli latera reperire, quemadmodum etiam basis segmenta, & perpendicularem. In priori namque triangulo fiet $2abx = \frac{180}{183}$, $axx - abb = -\frac{68975}{11163}$, $axx + abb = \frac{79865}{11163}$, $bbx - aax = \frac{121}{183}$, & $bbx + aax = \frac{671}{183}$. In posteriori verò triangulo, fiet $2acy$, ut ante. $= \frac{660}{183}$, $acc - ayy = \frac{165025}{11163}$, $acc + ayy = \frac{169865}{11163}$, $yyc - aac = -\frac{88669}{11163}$, & $yyc + aac = \frac{97381}{11163}$.

Porrò ne quem moveat, quòd lineæ hîc repertæ sint, quæ nihilo sunt minores, perinde ac si solutio illegitima aut absurda foret, advertendum est, ipsas tantùm hoc casu in plus convertendas esse, easdemque ad alteram partem perpendicularis sumendas; ita ut in priori triangulo perpendicularis intra cadat, & in posteriori extra, commutando videlicet unum triangulum in alterum: siquidem sic inventa triangula quæsito omnino respondent.

Cæterùm si velimus, ut lineæ hæ omnes inventæ absolutis numeris exprimantur: oportet duntaxat illas sub communi denominatore reducere, qui est 6:.61.3 seu 11163. & eundem postea ubique rejicere. Unde bina hæc emergunt triangula:

Eodem



Eodem modo infinita alia triangulorum paria invenire licet.

Ad hæc notatu dignum, ex allatis facile esse invenire trapezium, cujus duo latera sint parallela, & in quo utraque diagonalis & perpendiculares, ex angulis in opposita latera demissæ, perinde atque singula ipsius latera, eorumque ac diagonalium segmenta, rationales existant.

SECTIO XII.

Solutio Problematis, quod anno 1633 Parisiis palàm fuit propositum, qualem illam adinvenit Vir illustris R. des CARTES.

Est autem tale.

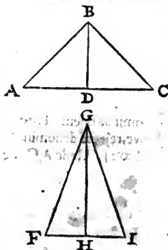
Invenire duo triangula æquicrura ejusdem areæ & ambitus, quorumque singula latera & perpendiculares sint inter se ut numerus ad numerum.

Sequitur solutio.

Primò quia latera debent exprimi numeris absolutis, pro latere AB pono $aa+bb$, & $2ab$ pro AD. Unde DB erit $aa-bb$, & ambitus $2aa+{}^{2}bb+{}^{4}ab$.

In secundo autem triangulo, si ponatur eodem modo FG ∞ $kk+dd$, FB ∞ $2kd$, & HG ∞ $kk-dd$: erit ambitus trianguli FGI ∞ $2kk+{}^{2}dd+{}^{4}kd$.

Unde



Unde patet $k+d$ & $a+b$ radices quantitatum $kk+dd+2kd$ & $aa+bb+2ab$ esse æquales.

Ac proinde in secundo triangulo, quia k ignoratur, ut & d, ponatur $a+x$ pro k, & $b-x$ pro d: eritque FH $\propto 2ab-2ax+2bx-2xx$, & HG $\propto aa-bb+2ax+2bx$. quæ in se invicem ducta producunt aream trianguli FGI $\propto 2a^3b-2a^3x+6aabx-6aaxx-2ab^3+6abbx-2b^3x+6bbxx-4ax^3-4bx^3$. Quæ summa æquatur areæ prioris trianguli, quæ est $2a^3b-2ab^3$.

Itaque demptis utrinque æqualibus $+2a^3b$, & additis $-2ab^3$, & ponendo singula sub contrario signo: erit $4ax^3+4bx^3+6aaxx-6bbxx+2a^3x+2b^3x-6aabx-6abbx \propto 0$.

Quod totum dividi potest per $4ax+4bx$.

Eritque $xx+\frac{3a}{2}x-\frac{3b}{2}x+\frac{1}{2}aa-2ab+\frac{1}{2}bb \propto 0$.

Sive $xx \propto -\frac{3a}{2}x+\frac{3b}{2}x-\frac{1}{2}aa+2ab-\frac{1}{2}bb$.

Unde $x \propto \frac{-3a+3b}{4}+\sqrt{\frac{aa+14ab+bb}{16}}$.

Quia verò x numerus rationalis esse debet, necessum est, ut $aa+14ab+bb$, rejecto denominatore, sit numerus quadratus. Igitur ponimus radicem ejus esse $a+b+c$. ubi c & b cognitæ præsupponuntur, a verò ignoratur.

Proinde $aa+2ab+2ac+bb+2bc+cc \propto aa+14ab+bb$.

Et fit $a \propto \frac{2bc+cc}{12b-2c}$.

Quilibet ergo numerus pro b & c sumi potest, modò a exurgat major quàm b: quia superiùs erat $aa-bb$.

Ut si faciam $b \propto 1$, & $c \propto 3$; habebo $a \propto \frac{5}{2}$.

Ut verò eliciatur x, respiciendum est ad æquationem : $x \propto -\frac{3a+3b}{4}+\sqrt{\frac{aa+14ab+bb}{16}}$.

Eritque $x \propto \frac{1}{2}$

$a \propto \frac{5}{2}$. ergo $aa \propto \frac{25}{4}$

$b \propto 1$. ergo $bb \propto 1$

& $ab \propto \frac{5}{2}$. unde $2ab \propto \frac{10}{2}$, vel 5.

Reducantur fractiones ad eandem denominationem, eritque in priori triangulo AB $\propto aa+bb \propto \frac{25}{4}+\frac{4}{4}$, sive, rejecto denominatore, $\propto$ 29; & AD $\propto 2ab \propto$ 20; & DB $\propto aa-bb \propto$ 21. Unde AC fit 40, & ambitus 98, & area 420.

In posteriori verò triangulo

$k \propto a+x \propto 3$
$d \propto b-x \propto \frac{1}{2}$

$kk \propto 9$
$dd \propto \frac{1}{4}$. Unde $kk+dd \propto \frac{37}{4}$
$kk-dd \propto \frac{35}{4}$
& $2kd \propto \frac{12}{4}$.

Et rejectis denominatoribus :

Erit FG $\propto kk+dd \propto 37$
HG $\propto kk-dd \propto 35$
& FH $\propto 2kd \propto 12$. Unde FI erit $\propto 24$.

Ambitus ergo erit 98, & area 420. ut ante.

SECTIO XIII.

Quæstio XIX, libri V Arithmeticorum Diophanti.

Invenire tres numeros, ut cubus summæ eorum, quovis ipsorum detracto, faciat cubum.

QUæstionis hujus solutio à Diophanto perplexè tradita, cum ab acutissimo Arithmetico, Ludolpho à Collen, Matheseos olim in alma hac Universitate Professore ac prædecessore meo, aliter inventa fuerit : haud ingratum aut è re fore judicavi, si eam qualem ex ipsius literis,

literis, benevolentiâ sæpius laudati Viri, D. Nicolaï Huberti à Persijn, addiscere mihi licuit, (cui cum illo magna intercessit familiaritas) paucis hîc exponerem.

Pono pro numerorum summa 4 N, eritque cubus summæ 64 C. Dehinc ponendo pro primo numero 56 C, pro secundo 37 C, & pro tertio 63 C: fiet, singulis hisce ex 64 C sublatis, pro 1^{mo} reliquo 8 C, pro 2^{do} reliquo 27 C, & pro 3^{tio} reliquo 1 C. Qui omnes cubi sunt.

Porrò additis 56 C, 37 C, & 63 C, erit summa 156 C æqualis 4 N. Dividatur utrinque per 4 N, & fit 39 Q æquale 1.

Jam si hic numerus 39 quadratus fuisset, soluta esset quæstio. Cum autem quadratus non sit, pro lateribus cuborum, qui relinqui debent, pono 1N—1 pro latere primi, 4—1N pro latere secundi, & 2 pro latere tertii. Quorum cubi, 1 C—3 Q+3 N—1, 64—48 N+12Q—1C, & 8, sigillatim à 64 subducti, relinquunt numeros 65+3Q—1C—3N, 48N+1C—12Q, & 56.

Quoniam verò trium horum numerorum summa est 121+45 N—9 Q: erit 121+45 N—9 Q æquale 4. & fit $\frac{121+45N-9Q}{4}$ æquale 1. Restat itaque ut $\frac{121+45N\ 9Q}{4}$ sit quadratus. Pono pro ejus latere $\frac{11+1N.}{2}$ Eritque $\frac{121+22N+1Q}{4} \propto \frac{121+45N-9Q.}{4}$

Et fit 1N. $\frac{23}{10}$. Posueram autem 1N—1 pro latere 1^{mi} cubi, 4—1N pro latere 2^{di}, & 2 pro latere 3^{tii}. Erunt igitur ipsa latera $\frac{13}{10}$, $\frac{17}{10}$, & 2. Horum cubi sunt $\frac{2197}{1000}$, $\frac{4913}{1000}$. & 8. Qui singuli ex 64 subducti, relinquunt numeros $\frac{61803}{1000}$, $\frac{59087}{1000}$, & 56.

Inventi itaque sunt tres numeri, qui singuli ex 64 detracti relinquunt cubos, & in unam summam collecti faciunt quadratum.

Hinc suppositâ, ut supra, pro summa quæsitorum numerorum 4N, & pro ejus cubo 64 C, pono jam pro 1^{mo} numero $\frac{61803}{1000}$ C, $\frac{59087}{1000}$ C pro 2^{do}, & 56C pro 3^{tio}, fit eorum summa $\frac{176890}{1000}$ C æqualis 4 N. Hoc est, $\frac{17683}{400}$ æquale 1. Unde 1N fit $\frac{20}{133}$, ac proinde 1 C $\frac{8000}{2352637}$. Id quod ductum in $\frac{61803}{1000}$, dat $\frac{494424}{2352637}$ pro 1^{mo} numero, & ductum in $\frac{59087}{1000}$, dat $\frac{472696}{2352637}$ pro 2^{do} numero, ac denique ductum in 56, dat $\frac{448000}{2352637}$ pro 3^{tio} numero. Et manifestum est, his additis, summam fore $\frac{1415120}{2352637}$ seu $\frac{80}{133}$. æqualem 4 N. A cujus cubo $\frac{512000}{2352637}$ si auferas $\frac{494424}{2352637}$, $\frac{472696}{2352637}$, & $\frac{448000}{2352637}$, relinquentur cubi $\frac{17576}{2352637}$, $\frac{39304}{2352637}$, & $\frac{64000}{2352637}$. Quorum latera sunt $\frac{26}{133}$, $\frac{34}{133}$, & $\frac{40}{133}$. Con-

 stat

ſtat ergo, numeros ritè eſſe inventos. Cujus rei ſoli Deo debetur gloria.

Cæterùm ſciendum, quæſtionem hanc convenire cum quæſtione 68, quæ una ex centum illis exiſtit, quas ſupra dictus Arithmeticus Ludolphus à Collen ad ſolvendum propoſuit in libro ſuo de Circulo, Belgicè edito, quarum ſequens 69 ejuſdem eſt argumenti, nempe:

Invenire quatuor numeros, ita ut, ſi à cubo eorum ſummæ ipſi ſigillatim auferantur, reliqui ſint cubi.

Cujus enodatio cum eâdem arte atque præcedentis obtineri queat, ſatis duxi numeros duntaxat, quales à Nicolao Huberti inventi ſunt, hîc aſcribere.

Sunt autem tales: $\frac{867160}{4657463}$, $\frac{787400}{4657463}$, $\frac{11527640}{12357115015}$, & $\frac{14087528}{12357115015}$; aut $\frac{32172736}{64481201}$, $\frac{11296152}{64481201}$, $\frac{9132168}{64481201}$, & $\frac{4724776}{64481201}$. Alios verò tres, quos preter tres Ludolphi numeros invenit, ſunt $\frac{15817815000}{86526834967}$, $\frac{9568152000}{86526834967}$, & $\frac{8925120000}{86526834967}$. Qui quoque quæſtione de duobus tantùm numeris propoſitâ, hoſce adinvenit numeros $\frac{37}{125}$, & $\frac{63}{125}$; aut $\frac{175608}{493039}$, & $\frac{173888}{493039}$; aut etiã $\frac{105045092893}{692214679736}$, & $\frac{148514839747}{692214679736}$. Et ſic de aliis.

SECTIO XIV.

De Progreſſionibus Arithmeticis.

Quoniam in his Progreſſionibus termini eodem continuè exceſſu ſe mutuò excipiunt, fit, ut in iis quinq; præcipuè ſpectanda veniant: nimirum, vel minor terminus, vel major, vel exceſſus Progreſſionis, vel multitudo terminorum, vel eorundem denique aggregatum. Quocirca, ut earum doctrina ritè pertractetur, viſum fuit earundem conſtitutionem ex origine ſua deducere, atque rem omnem paucis ob oculos ponere.

Hunc in finem inſpiciatur ſequens Progreſſio $\overset{1}{a}.\ \overset{2}{a+b}.\ \overset{3}{a+2b}.\ \overset{4}{a+3b}.\ \overset{5}{a+4b}$, in qua quinque ſunt termini, quorum minor deſignatur per a, major per $a+4b$, & in qua b Progreſſionis exceſſus exiſtit.

Quibus poſitis, patet majorem terminum $a+4b$ componi ex minori a, & ex $4b$, Progreſſionis exceſſu toties ſumpto, quot ſunt termini

mini minus 1. Quod idem de quotcunque terminis intelligendum est.

Hinc, datis minore extremo, Progressionis excessu, & multitudine terminorum, invenietur major extremus, si multitudo terminorum multata unitate ducatur in Progressionis excessum, & productum addatur minori.

Datis autem majori extremo, Progressionis excessu, & multitudine terminorum, invenietur minor extremus, auferendo idem productum à majori.

Deinde datis extremis, & multitudine terminorum, invenietur Progressionis excessus, si extremorum differentia per multitudinem terminorum minus 1 dividatur.

Datis verò extremis, & Progressionis excessu, invenietur multitudo terminorum, si divisâ hâc extremorum differentiâ per Progressionis excessum, ei quod oritur addatur unitas. Quæ quidem omnia ex diligenti Progressionis inspectione manifesta fiunt.

Postea, quoniam in omnibus terminis ejusdem Progressionis reperitur a, & b in singulis post primum deinceps semel ampliùs conspicitur quàm in proximè antecedentibus, fit ut, si extremi a & $a+4b$ simul addantur, tantundem fiat atque si addantur $a+b$ & $a+3b$, ab extremis æquè remoti; aut etiam atque medius $a+2b$ bis sumptus, si multitudo terminorum (ut hîc) impar fuerit. Id quod similiter de quotcunque aliis terminis est accipiendum. Unde constat, si extremis datis, & multitudine terminorum, horum omnium aggregatum sit inveniendum: opus tantùm esse extremorum summam multiplicare per semissem multitudinis terminorum.

Hinc si extremi fuerint a & e, & multitudo terminorum i, quæraturque eorundem aggregatum y: erit $y \propto \frac{ai+ei}{2}$.

Datis autem extremis a, e, & aggregato terminorum y, ad inveniendam multitudinem terminorum i, quoniam y æquatur $\frac{ai+ei}{2}$, hoc est, multiplicando utrinque per 2, $2y$ æquatur $ai+ei$, hinc si utrobique dividatur per $a+e$, fiet $i \propto \frac{2y}{a+e}$.

At verò datis uno extremorum a, multitudine terminorum i, & eorundem aggregato y, ut inveniatur alter extremorum e, quo-

e, quoniam $2y$ æquatur $ai + ei$, transferendo ai in alteram partem, fiet $2y - ai \propto ei$. Unde, dividendo utrinque per i, invenietur $e \propto \frac{2y}{i} - a$. Haud ſecus, datis e, i, & y: erit $a \propto \frac{2y}{i} - e$.

Iiſdem poſitis, ſi exceſſus Progreſſionis ſit u, & ex eo & binis extremis a, e, quorum a minor & e major intelligatur, quærendum ſit terminorum adgregatum y: oportet, invento $y \propto \frac{ai+ei}{2}$, in locum i ex ſuperioribus ſubſtituere $\frac{e-a}{u} + 1$, fietque $y \propto \frac{ee-aa}{2u} + \frac{a+e}{2}$.

Eodem modo, datis uno extremo a, Progreſſionis exceſſu u, & multitudine terminorum i, ad inveniendum eorundem aggregatum y, quoniam y æquatur $\frac{ee-aa}{2u} + \frac{a+e}{2}$, oportet tantùm in locum e ſubſtituere valorem inventum $\frac{2y}{i} - a$, & in locum ee ejuſdem quadratum $\frac{4yy}{ii} - \frac{4ay}{i} + aa$, fietque $y \propto \frac{2yy}{uii} - \frac{^{2}ay}{ui} + \frac{y}{i}$. Unde ordinatâ æqualitate invenitur $y \propto \frac{1}{2}uii + ai - \frac{1}{2}ui$. Haud ſecus datis e, u, & i, erit $y \propto -\frac{1}{2}uii + ei + \frac{1}{2}ui$.

Rurſus datis extremis a, e, & aggregato terminorum y, ut inveniatur Progreſſionis exceſſus u, quoniam y æquatur $\frac{ee-aa}{2u} + \frac{a+e}{2}$, hoc eſt, multiplicando ubique per $2u$, $2uy$ æquatur $ee - aa + au + eu$, transferendo au & eu in alteram partem, fiet $2uy - au - eu \propto ee - aa$. Unde dividendo utrinque per $2y - a - e$ invenietur $u \propto \frac{ee-aa}{2y-a-e}$.

Similiter dato uno extremo a, Progreſſionis exceſſu u, & adgregato terminorum y, ad inveniendum alterum extremum e, quoniam $2uy$ æquatur $ee - aa + au + eu$, transferendo $-aa + au + eu$ in alteram partem, fiet $ee \propto -ue + {}^{2}uy + aa - au$: eritque extractâ radice $e \propto -\frac{1}{2}u + \surd\overline{\frac{1}{4}uu + {}^{2}uy + aa - au}$. Datis autem e, u, & y, ſi quæratur a: erit $a \propto + \frac{1}{2}u \pm \surd\overline{\frac{1}{4}uu - {}^{2}uy + ee + eu}$.

Haud ſecus datis exceſſu Progreſſionis u, multitudine terminorum i, & eorundem aggregato y, ut inveniantur extremi a & e, quoniam rurſus $2uy$ æquatur $ee - aa + au + eu$, oportet tantùm in locum e & a ſub-

ſubſtituere valores inventos $\frac{2y}{i} - a$, & $\frac{2y}{i} - e$, & in locum *ee* & *aa* horum valorum quadrata, habebiturque $2uy \infty \frac{4yy}{ii} - \frac{4ay}{i} + \frac{2uy}{i}$, & $2uy \infty - \frac{4yy}{ii} + \frac{4ey}{i} + \frac{2uy}{i}$. Unde ordinatâ æqualitate invenietur $a \infty \frac{y}{i} + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}ui$, & $e \infty \frac{y}{i} - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}ui$.

Denique dato uno extremo *a*, Progreſſionis exceſſu *u*, & aggregato terminorum *y*, ad inveniendam eorum multitudinem *i*, quoniam *a* æquatur $\frac{y}{i} + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}ui$, multiplicando ubique per $2i$, fiet $2ai \infty 2y + ui - uii$. Unde ordinatâ æqualitate invenitur $ii \infty \frac{+ ui + 2y - 2ai}{u}$. Et fit, extractâ radice, $i \infty \frac{1}{2} - \frac{a}{u} + \frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{4}uu - au + aa + 2uy}$. Pari ratione datis *e*, *u*, & *y*, invenietur $i \infty \frac{1}{2} + \frac{e}{u} \pm \frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{4}uu + eu + ee - 2uy}$.

In quorum, ſi lubet, illuſtrationem ac uſum addantur ſequentes quæſtiones.

1. Aliquis ſolvere debet primâ ſeptimana 1 fl. ſecundâ 4 fl. tertiâ 7 fl. & ſic deinceps uſque ad 28 ſeptimanas, ſolvendo nempe ſingulis ſeptimanis ſequẽtibus ſemper 3 fl. plus quàm in proximè antecedentibus. Quæritur quantum ad finem hujus temporis perſolvere teneatur? *Facit* 82 *florenos.*

Ad quæſtionis hujus enodationem concipiatur Progreſſio Arithmetica 28 *terminorum, in qua primus terminus eſt* 1, *& exceſſus Progreſſionis* 3, *cujuſque ultimus terminus eſt inveniendus. Is autem hoc modo invenitur. Ex* 28 *terminorum multitudine ſublatâ unitate, ducatur reliquum* 27 *in Progreſſionis exceſſum* 3, *& ad productum* 81 *addatur primus terminus* 1, *fietque ultimus* 82, *deſignans florenos, quos ad finem* 28 *ſeptimanæ perſolvere tenetur.*

2. Si quis finitis 28 ſeptimanis 82 fl. perſolvere tenetur, & ſingulis ſeptimanis retrò numerandis 3 fl. minus ſolvere debeat quàm in proximè ſequentibus: Quæritur quantum ad finem primæ ſeptimanæ ſolvendum habeat?

Ex

Ex 82 fl. subductis 81 fl. restabit 1 fl. Quantum scilicet ad finem 1^{mæ} septimanæ solvendum restat.

3. Si quis per 28 septimanas ad singularum finem inæqualem pecuniæ summam erogare debeat, eodem semper excrescentem pretio, & ad primæ quidem finem solvere teneatur 1 fl.; at ad ultimæ finem 82. fl. Quæritur in quantum pretium continuè augendum sit?

Sublato 1 fl. de 82 fl. si reliquum 81 fl. dividatur per 27, orietur 3, pretium florenorum, quibus sequens pecunia summa deinceps proximè antecedentem excedere debet.

4. Aliquis debet primâ septimanâ 1 fl. secundâ 4 fl. tertiâ 7 fl. atque ita deinceps, sequenti septimanâ 3 fl. amplius quàm in proximè præcedenti. Quæritur, si ultima solutio fuerit 82 florenorum, per quot septimanas dictam solutionem præstare teneatur.

Sublato 1 fl. de 82 fl., reliquum 81 fl. dividatur per 3 fl., orieturque 27. Cui additâ unitate habebitur 28, numerus septimanarum quæsitus.

5. Est Progressio Arithmetica 28 terminorum, cujus primus terminus est 1, & ultimus 82. Quæritur summa omnium? *Facit* 1162.

a est 1, e est 82, & i est 28. Quæritur y. Hinc cum y sit $= \frac{ai + ei}{2}$, *erit* $y = 1162$.

6. Aliquis debet 1162 florenos, quos persolvere tenetur diversis temporibus, erogando singulis septimanis certam pecuniæ summam. Quæritur, si primâ septimanâ solvat 1 fl. & reliquis septimanis continuè pretium æqualiter augeat, sic ut in ultima ipsi numerandi sint 82 floreni, quot septimanis dicta summa persolvetur? *Facit* $i = \frac{2y}{a + e}$ $= 28$ *septimanis.*

7. Si 1162 fl. solvendi sint intra 28 septimanas, & in prima quidem dari debeat 1 fl.; at in singulis sequentibus pretium continuè usque ad ultimam septimanam æqualiter augendum sit: Quæritur quantum in ultima solvere oporteat? *Facit* $e = \frac{2y}{i} - a = 82$ *fl.* Eodem modo, si 1162 fl. solvi debeant spacio 28 septimanarum, dando in fine hujus temporis 82. fl., & singulis septimanis pretium retrò æqualiter sit diminuendum, invenietur ad finem primæ septimanæ solvendum esse $a = \frac{2y}{i} - e = 1$ fl.

8. Progressionis Arithmeticæ primus terminus est 1, & ultimus 82. Quæri

82. Quæritur aggregatum terminorum, si excessus Progressionis u sit $\propto 3$. *Facit* $y \propto \frac{ee-aa}{2u} + \frac{a+e}{2} \propto 1162$.

9. Si quis primâ septimanâ solvere debeat 1 fl. & singulis sequentibus septimanis deinceps 3 fl. amplius quàm in proximè antecedentibus, idque per 28 septimanas continuare teneatur: Quæritur quid in toto solvere oporteat? *Facit* $y \propto \frac{1}{2}uii + ai - \frac{1}{2}ui \propto 1162$ fl. Eodem modo, si finitis 28 septimanis solvendi sint 82 fl, & singulis præcedentibus 3 floreni minus solvi debeant quàm in proximè sequentibus, donec ad primæ finem perventum fuerit, invenietur similiter pecuniam omnem erogatam fore $y \propto -\frac{1}{2}uii + ei + \frac{1}{2}ui \propto 1162$ fl.

10. Si quis solvere debeat 1162 fl. per septimanas, ita ut in prima numerare teneatur 1 fl. & in ultima 82 fl. augendo perpetuò pretium à prima usque ad ultimam æqualiter: Quæritur quantum singulis sequentibus septimanis plus solvere teneatur quàm in proximè præcedentibus? *Facit* $u \propto \frac{ee-aa}{2y-a-e} \propto 3$.

11. Aliquis solvere debet 1162 fl. hâc conditione, ut ad finem 1[mæ] septimanæ eorum 1 fl. solvat, & ad finem singularum sequentium continuè 3 plus quàm ad proximè præcedentium, donec omnes 1162 fl. soluti fuerint. Quæritur quanta ultima solutio futura sit? *Facit* $e \propto -\frac{1}{2}u + \sqrt{\frac{1}{2}uu + {}^{2}uy + aa - au} \propto 82$ fl. Eodem modo, si 1162 fl. solvi debeant, ita ut ultima solutio sit 82 florenorum, eademque continuè 3 florenis sit diminuenda, donec tota summa 1162 soluta fuerit, invenietur primam solutionem a esse $\propto +\frac{1}{2}u - \sqrt{\frac{1}{4}uu - {}^{2}uy + ee + eu} \propto 1$ fl.

12. Si 1162 floreni solvendi sint intra 28 septimanas, ita ut singulis sequentibus semper 3 fl. ampliùs numerandi sint quàm in proximè antecentibus: Quæritur quot floreni in prima & quot in ultima erogari debeant? *Facit* $a \propto \frac{y}{i} + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}ui \propto 1$ fl. *in prima septimana*, & $e \propto \frac{y}{i} - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}ui \propto 82$ fl. *in ultima.*

13. Progressionis Arithmeticæ primus terminus est 1, excessus Progressionis 3, & aggregatum terminorum 1162. Quæritur multitudo terminorum. *Facit* $i \propto \frac{1}{2} - \frac{a}{u} + \frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{4}uu - au + aa + {}^{2}uy} \propto 28$. Haud

secus, datis ultimo termino 82, excessu Progressionis 3, & aggregato terminorum 1162, erit $i \propto \frac{1}{2}+\frac{e}{u}+\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{4}uu+eu+ee-2uy} \propto 28$.

SECTIO XV.

De numeris Multangulis seu Polygonalibus.

NUmeris Arithmeticè proportionalibus proximè succedunt illi, qui vulgò Multanguli seu Polygonales appellantur, & ex iisdem originem suam ducunt.

Sunt autem ipsi omnes summæ numerorum Progressionis Arithmeticæ ab unitate, quorum numerus angulorum binario semper excedit Progressionis excessum, & latus multitudinem terminorum designat.

Ut si Progressio fuerit numerorum ab unitate in serie naturali, id est, per 1 excrescentium, utputa 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8, &c. cujus termini ab initio continuè addantur, fient inde trianguli 1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. 36, &c. utpote qui secundùm suas unitates in trianguli formam disponi possunt, hoc modo: . .. . &c.

Sic & si Progressio fuerit numerorum ab unitate deinceps per 2 progredientium, id est, sub qua omnes impares numeri comprehendantur, nimirum: 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15, &c. & termini hujus ab initio continuè addantur, fient inde quadrati numeri 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64, &c. quorum quippe unitates in quadrati formam collocari queunt, hoc pacto: . :: ::: :::: :::::, &c. Unde inferre licet, quadratum quemlibet duplicem originem sortiri, hoc est, vel numeri al-

alicujus in se ipsum ductu procreari, vel etiam ex tot imparium ab unitate in unam summam collectione, quot unitates continet ejus latus, constare.

Haud secus si numeri ab unitate deinceps per 3 ascendant, id est, Progressio illa fuerit 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22, &c. atque termini hujus ab initio continuè accumulentur, fient inde pentagoni 1. 5. 12. 22. 35. 51. 70. 92, &c.

Pari ratione Progressione ab unitate deinceps per 4 excrescente, utputa 1. 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29, &c. dabunt hujus termini ab initio in unam summam continuè collecti hexagonos 1. 6. 15. 28. 45. 66. 91. 120, &c. Atque ita porrò in infinitum.

Hinc dato angulorum numero, si ab eo binarius auferatur, reliquum erit excessus Progressionis, è qua Polygonus componitur.

Porrò, quoniam, quæ ad horum numerorum tractationem spectant, ad duo præcipua capita revocari queunt, quę sunt, ut è dato latere inveniatur polygonus, & contra ut è dato polygono eruatur latus, locus exigit, ut de his in genere scripturi, quò ad omnes simul polygonos referri possint, funditùs ipsa repetamus atque ex origine sua derivemus.

Quocirca ut ex dato latere investigetur polygonus, supposito latere $\propto i$, & polygono $\propto y$, concipiatur Progressio Arithmetica, in qua primus terminus est 1, excessus Progressionis u, & multitudo terminorum i, quorumque aggregatum y est inveniendum.

Hunc in finem, cum, primo termino existente a, per antecedentem Sectionem, y æquetur $\frac{1}{2}uii + ai - \frac{1}{2}ui$, erit, substituto 1 in locum a, $y \propto \frac{1}{2}uii + i - \frac{1}{2}ui$. Designans in genere, quo pacto ex dato latere quilibet inveniatur polygonus. Ubi advertendum, quantitatem u datam intelligi, quippe illa (uti dictum) binarii sublatione à polygoni angulorum numero, qui ex cognomine ejus semper notus est, innotescit.

Quòd si verò ad Progresionis hunc excessum u respicere non lubeat, sed ex solo latere i, & angulorum numero, quem n vocamus, ipse polygonus y inveniendus sit: oportet tantùm in locum u subrogare $n-2$, fietque $y \propto \frac{1}{2}nii - \frac{1}{2}ni - ii + 2i$ seu $\overline{\frac{1}{2}ni - \frac{1}{2}n - i + 2}$ in i.

His igitur ita se habentibus, ut pateat, quâ ratione inde speciales regulæ deducendæ sint, quibus ex quovis latere multangulus certi angulorum numeri obtineatur: opùs tantùm erit in locum u vel n in triangulis subrogare 1 vel 3, in quadratis 2 vel 4, in pentagonis 3 vel 5,

in hexagonis 4 vel 6, in heptagonis 5 vel 7, &c. relinquendo *i* indeminatam. Unde sequentes regulæ resultant:

$$y \propto \frac{1ii + 1i}{2}, \text{ pro triangulis}$$

$$y \propto \frac{2ii \pm 0i}{2}, \text{ pro quadratis}$$

$$y \propto \frac{3ii - 1i}{2}, \text{ pro pentagonis}$$

$$y \propto \frac{4ii - 2i}{2}, \text{ pro hexagonis}$$

$$y \propto \frac{5ii - 3i}{2}, \text{ pro heptagonis.}$$ Atque sic ulteriùs in infinitum.

Quibus respondent ea, quæ Bacchetus affert in Commentariis suis super Diophantum, ubi in eundem finem has depromit regulas seu canones.

Sume quadratum dati lateris, hunc ducito in numerum binario minorem multitudine angulorum, à producto aufer quod fit ex dato latere in numerum quaternario minorem multitudine angulorum, residui semißis erit quæsitus polygonus.

vel,

Ducito datum latus in numerum angulorum binario multatum, à producto aufer numerum angulorum multatum quaternario, residuum ducito in datum latus, fiet duplum polygoni.

vel etiam,

Ducito datum latus unitate multatum in numerum angulorum binario multatum, & productum binario auctum ducito in datum latus, fiet duplum polygoni. Vel alios denique canones, quos recensere omnes nimis longum foret.

Hinc si *i* seu latus datum sit 12, & quæratur ejusdem triangulus, erit $y \propto \frac{1ii + 1i}{2} \propto 78$. Ac proinde cum numerus punctorum, in quibus plures rectæ indefinitæ, quarum nullæ parallelæ sunt, se invicem secant, semper triangulus existat: liquet 13 lineas in 78 punctis nec pluribus se mutuò intersecare.

Non secus latere existente 12 quinquangulus erit 210, hexangulus 276, heptangulus 342, atque ita de aliis.

De-

Denique dato polygono ut inveniatur latus, oportet, inventâ $y \propto \frac{1}{2}uii + i - \frac{1}{2}ui$, æqualitatem secundùm artem de i ordinare, sumendo i esse quantitatem incognitam, at verò u & y esse cognitas. Fietque $ii \propto \frac{\substack{+ui\\-2}\;+\,2y}{u}$. Unde extractâ radice invenitur

$$i \propto \frac{1}{2} - \frac{1}{u} + \sqrt{\frac{uu - 4u + 4 + 8uy}{4uu}}, \text{ vel } i \propto \frac{u - 2 + \sqrt{uu - 4u + 4 + 8uy}}{2u}.$$

Designans in genere quâ ratione ex dato quolibet polygono latus investigari possit.

Idem obtinere licet, si, ut in præcedenti Sectione Progressionis Arithmeticæ, cujus primus terminus est a, excessus Progressionis u, & aggregatum terminorum y, quæratur multitudo terminorum i. Hæc enim cum sit $\propto \frac{1}{2} - \frac{a}{u} + \frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{4}uu - au + aa + 2uy}$, subrogato 1 in locum a, erit $i \propto \frac{1}{2} - \frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{4}uu - u + 1 + 2uy}$ seu $\frac{u - 2 + \sqrt{uu - 4u + 4 + 8uy}}{2u}$, ut ante. Aut etiam substituendo $n - 2$ pro u, erit $i \propto \frac{n-4}{2n-4} + \frac{1}{2n-4}\sqrt{nn - 8n + 16 + 8ny - 16y}$ seu $\frac{n - 4 + \sqrt{nn - 8n + 16 + 8ny - 16y}}{2n - 4}$.

Ex quibus jam facile est speciales regulas pro singulis polygonis conficere.

Etenim, si, ut supra, quum y relinquitur indeterminata, pro u vel n in triangulis subrogemus 1 vel 3, in quadrangulis 2 vel 4, in quinquangulis 3 vel 5, atque ita porrò, emergent inde regulæ sequentes, nimirum: $i \propto \frac{-1 + \sqrt{1 + 8y}}{2}$, pro triangulis

$i \propto \frac{0 + \sqrt{0 + 16y}}{4}$, pro quadrangulis

$i \propto \frac{+1 + \sqrt{1 + 24y}}{6}$, pro quinquangulis

$i \propto \frac{+2 + \sqrt{4 + 32y}}{8}$, pro sexangulis

$i \infty \frac{+3+\sqrt{9+40y}}{10}$, pro septangulis. Atque sic ulteriùs in infinitum.

Quibus similia sunt ea, quæ à Bacheto afferunrur in inventionem lateris, quando polygonus est datus, ubi sic scribit:

Datum polygonum ducito in octuplum numeri multitudinis angulorum binario multati, producto adde quadratum numeri multitudinis angulorum quaternario multati, summa cape latus, huic adde numerum quaternario minorem multitudine angulorum, summam divide per duplum numeri angulorum binario multati, quotiens erit quæsitum latus.

Hinc si datus multangulus y sit triangulus 21, & quæratur ejus latus i, ponendum tantummodò erit $\frac{1\,ii+1\,i}{2} \infty 21$, hoc est, $ii \infty -1i+42$. Et fit, extractâ radice, $i \infty 6$. Vel etiam, quia i æquatur $\frac{-1+\sqrt{1+8y}}{2}$, & y valet 21, erit $i \infty 6$. ut ante.

Haud secus, si 21 fuerit octangulus, invenietur latus ejus fore 3. At verò 21 existente numero 21 angulorum, latus ipsius erit 2.

Pari ratione, dato numero 1225, eoque existente triangulo, quadrangulo, sexangulo, ac 1225gulo, latera erunt 49, 35, 25, & 2. Atque ita de aliis.

Cæterùm antequam horum numerorum tractationi finem imponamus, breviter nobis adhuc dicendum sit, quot modis datus numerus polygonus dici queat. Ut si datus numerus sit 36.

Primò itaque, quia numerus quilibet à ternario multangulus est, habens tot angulos quot ipse continet unitates, cujus latus est 2, numerus ab unitate proximus, constat 36 esse polygonum 36angulorum. quo igitur nomine triginta-sexangulus dici poterit.

Deinde, quia ex 36 elici potest radix quadrata, quæ est 6, evidens est 36 esse quoque quadratum.

Denique quia 36 octies sumptus ac unitate inde auctus facit quadratum 289, cujus latus 17 unitate multatum ac deinde per 2 divisum dat 8, integrum numerum: patet 36 esse pariter triangulum, cujus latus est 8. Quoniam verò multiplicato 36 per 24 ac producto addito 1, aut per 32 ac producto addito 4, aut per 40 ac producto addito 9, & sic deinceps, nunquam fit quadratus: convincitur 36 tribus duntaxat prædictis modis esse multangulus. Atque ita de aliis.

SE-

SECTIO XVI.

De Progressionibus Geometricis.

Progressionum harum naturam cum definiat terminorum secundùm eandem rationem continuatio, suffecerit, si, innixi huic fundamento, ea, ex quibus reliqua, doctrinam ipsarum concernentia, facili negotio deducuntur, levi penicillo adumbremus.

Hinc si Progressio fuerit trium terminorum, utputa a, b, & c, quoniam propter eandem rationem primi termini ad secundum atque secundi ac tertium, $\frac{a}{b}$ est $\infty \frac{b}{c}$, vel etiam $\frac{b}{a} \infty \frac{c}{b}$, fiet, multiplicando per crucem, $ac \infty bb$. Id quod ostendit, si tres quantitates sint proportionales, productum extremarum a & c esse æquale ei, quod fit ex media b in se ducta. Ac proinde datis duobus primis terminis a & b, ut ex iis inveniatur tertius c, opùs tantùm esse dividere productum utrumque per a, fietque tertius $c \infty \frac{bb}{a}$.

Similiter primo termino existente a, & secundo b, si progressio ulteriùs in quatuor terminis continuari debeat, quoniam tertius terminus est $\frac{bb}{a}$, atque hujus rursus quadratum æquetur ei quod fit ex secundo in quartum, fiet, statuendo quartum terminum esse d, $\frac{b4}{aa} \infty bd$. Unde diviso utrinque per b, fit $d \infty \frac{b3}{aa}$. adeò ut a, b, $\frac{bb}{a}$, & $\frac{b3}{aa}$ quatuor continuè proportionales existant.

Haud secus, si in eadem ratione quinque continuè proportionales inveniendi sint, & quintus terminus vocetur e, erit $\frac{bbe}{a} \infty \frac{b^6}{a^4}$. Unde multiplicando utrinque per a & dividendo per bb, invenitur $e \infty \frac{b^4}{a^3}$. Eruntque a, b, $\frac{bb}{a}$, $\frac{b3}{aa}$, & $\frac{b4}{a3}$ quinque continuè proportionales in ratione a ad b. Atque sic ulteriùs in infinitum.

Quoniam autem sic datis duobus primis terminis a & b reliqui omnes sequentes sunt fractiones, hinc ut integri evadant ac simul ad

tot

tot, quot quis voluerit, continuè proportionales in data ratione inveniendos inserviant, oportet tantùm eos omnes per denominatorem ultimi termini multiplicare.

Ut, quia a, b, & $\frac{bb}{a}$ tres proportionales referunt, quorum duo primi termini dantur a & b, hinc multiplicando omnes tres per a, inveniemus illorum loco aa, ab, & bb, qui in eadem ratione tres quæsitos proportionales in integris designant.

Sic si quatuor in ratione a ad b continui requirantur, quoniam pro illis invenimus a, b, $\frac{bb}{ae}$ & $\frac{b3}{aa}$, ideo multiplicando eos omnes per aa, erunt ipsi in integris a^3, aab, abb, & b^3.

Pari ratione a^4, a^3b, $aabb$, ab^3, & b^4 in integris quinque designabunt continuè proportionales in ratione a ad b; & a^5, a^4b, a^3bb, aab^3, ab^4, & b^5 sex; & a^6, a^5b, a^4bb, a^3b^3, aab^4, ab^5, & b^6 septem. Atque ita porrò in infinitum.

Hinc si a sit ∞ 3; & b ∞ 2, sex proportionales continuè in ratione 3 ad 2 erunt 243, 162, 108, 72, 48, & 32. At verò a existente 2, & b ∞ 3 septem continuè proportionales in ratione 2 ad 3 in integris erunt 64, 96, 144, 216, 324, 486, & 729. Et sic de aliis.

Ubi advertendum, quòd, sicut in Arithmeticè proportionalibus extremi termini simul additi tantundem faciunt atque ab extremis æquè remoti, aut etiam atque medius bis sumptus, si multitudo terminorum impar fuerit, ita in hisce Geometricè proportionalibus extremi a & $\frac{b^4}{a3}$ in se invicem ducti tantundem producant, atque b & $\frac{b^3}{aa}$ ab extremis æquè remoti, aut etiam atque medius $\frac{bb}{a}$ in se ductus. Fit enim ubique $\frac{b^4}{aa}$. Quod idem de quotcunque terminis est intelligendum.

Deinde apparet, primo termino a existente 1, progressionem fore 1. b. bb. b^3. b^4, &c. adeò ut ad quemlibet sequentium terminorum inveniendum opùs tantùm sit secundum terminum b toties ponere & multiplicare, quotus quisque ex illis est post primum.

Ut ad inveniendum centesimum terminum, posito b nonagies & novies & multiplicato, centesimus erit b^{99}. Quòd si autem primus ter-

terminus sit a, centesimus erit $\frac{b^{99}}{a^{98}}$, dividendo nempe b^{99}, productum antecedens secundi termini, per a^{98}, productum primi a, semel minùs positi & multiplicati. Atque ita de aliis.

Porrò Progressione existente $1, b, bb, b^3, b^4$, &c. quoniam terminorum ultimum antecedentium aggregatum est $1 + b + bb + b^3$, at verò primum sequentium aggregatum sit $b + bb + b^3 + b^4$, quorum unius ad alterum ratio eadem est, quæ primi termini 1 ad secundum b, atque idem etiam in proportionalibus $a, b, \frac{bb}{a}, \frac{b^3}{aa}, \frac{b^4}{a^3}$, &c. vel in proportionalibus $a^4, a^3b, aabb, ab^3, b^4$, &c. locum habeat, nec referat ad quotcunque proportionales hoc restringatur: liquet Progressionis cujuslibet Geometricæ primum terminum ad secundum esse, sicut aggregatum terminorum excepto ultimo ad aggregatum terminorum excepto primo.

Hinc datis primo, secundo, & ultimo termino, facile est invenire aggregatum terminorum.

Etenim si primus terminus statuatur $\infty\, a$, secundus $\infty\, b$, & ultimus $\infty\, c$, & quæratur aggregatum terminorum $\infty\, z$: erit ut a ad b, sic $z - c$ ad $z - a$. Unde multiplicando tum extremos in se invicem, tum medios, fiet $az - aa \infty bz - bc$. Hoc est, ordinatâ æqualitate, erit $z \infty \frac{aa = bc}{a = b}$.

Signum = significat differentiam inter duas pluresvè quantitates, cùm non exprimitur aut cognoscitur, penes quas sit excessus.

Hinc si a sit $\infty\, 243$, $b \infty 162$, & $c \infty 32$, erit $z \infty \frac{aa - bc}{a - b} \infty 665$. At a existente $\infty\, 64$, $b \infty 96$, & $c \infty 729$, erit $z \infty \frac{bc - aa}{b - a} \infty 2059$.

Denique a existente majore quàm b, si proportionales in infinitum decrescant, fiet $c \infty 0$. Ideoque destruendo bc, erit $z \infty \frac{aa}{a - b}$.

Hinc si a sit 1, & $b \infty \frac{1}{2}$, atque cæteræ omnes sequentes proportionales deinceps in infinitum in dupla hac ratione descendant, erit z, aggregatum omnium terminorum hujus Progressionis infinitæ, $\infty \frac{aa}{a - b} \infty 2$, hoc est, duplum maximi termini a.

Eodem modo, si maximus terminus a sit 2, & reliqui omnes ter-

 mini

mini ab hoc maximo a in tripla ratione continuè usque ad nihilum decrescant, erit z, summa omnium terminorum hujus infinitæ seriei, $\infty \frac{aa}{a-b} \infty 3$, hoc est, erit ipsa maximi termini a sesquialtera.

Similiter a existente 3, si reliquorum sequentium terminorum unus alterius subquadruplus sumatur, idque semper fiat: erit z, summa omnium, $\infty \frac{aa}{a-b} \infty 4$, hoc est, maximi termini a sesquitertia. Atque ita de aliis.

Cætera huc spectantia, ex his perinde ut in Arithmeticis Progressionibus factum est collige.

SECTIO XVII.

Quadratura Parabolæ.

Ad indagandam Parabolæ quadraturam investigetur ratio linearum NO, NQ, & NP, ductâ scilicet inter AC, MD rectâ N O alterutri ex ipsis parallelâ. Ponendo ad id latus rectum ∞r

AC vel NO ∞x

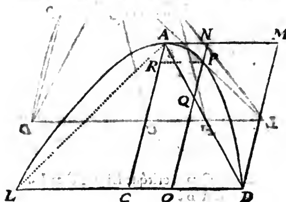
NQ ∞y

& AR vel NP ∞z.

Unde cum ex proprietate Parabolæ ▭lum sub latere recto r, & segmento diametri AC, per 11 Prop. 1mi libri Conic. Apollonii, sit æquale □to ordinatim adplicatæ CD : erit □ C D vel A M ∞rx, adeoque AM $\infty \sqrt{rx}$. Eâdem ratione RP vel AN erit $\infty \sqrt{rz}$. Hinc cum propter similitudinem triangulorum AMD, ANQ, AM $\infty \sqrt{rx}$ sit ad MD vel AC ∞x, ut A N $\infty \sqrt{rz}$ ad N Q ∞y: erit $y\sqrt{rx}$, rectangulum sub extremis, per 16. 6, æquale $x\sqrt{rz}$, rectangulo sub mediis. Hoc est, quadratis singulis partibus, erit $yy, rx \infty xx, rz$. Et dividendo utrinque per rx, fit $yy \infty xz$. Hoc est, quadratum rectæ NQ æquale est rectangulo sub N O & N P, seu quod idem est, O N est ad NQ, sicut QN ad NP. Idem intelligendum est de recta quavis NO, ductâ inter AC, MD, ubi libuerit, alterutri ex ipsis parallelâ.

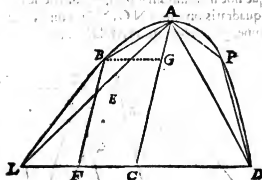
Hinc concipiendo conum & cylindrum ejusdem basis & altitudinis, quorum scilicet utriusque basis sit circulus semidiametri MD, & axis com-

communis recta AM, cum propter proportionales [1] NO, [2] NQ, & [3] NP, 1ma NO sit ad 3tiam NP, sicut quadratum 1mæ NO ad quadratum 2dæ NQ, atque hoc in infinitum intelligendum sit de rectis omnibus NO, NP & quadratis omnibus NO, NQ: erunt, regulâ existente DM, lineæ omnes parallelogrammi ACDM ad omnes lineas trilinei



APDM, sicut omnia quadrata cylindri ad omnia quadrata coni, seu quod idem est, per 2.12, sicut omnes circuli cylindri ad omnes circulos coni. Sed ut se habent omnes lineæ parallelogrammi ACDM ad omnes lineas trilinei APDM, ita per Methodum Indivisibilium Cavallerii se habet parallelogrammum ad trilineum. Similiterque sicut omnia quadrata cylindri se habent ad omnia quadrata coni, ita quoque se habet cylindrus ad conum. Quare parallelogrammum ACDM ad trilineum APDM erit, ut cylindrus ad conum. Unde cum, per 10.12, cylindrus ipsius coni sit triplus: erit itidem parallelogrammum ACDM trilinei APDM triplum. Adeoque qualium partium parallelogrammum ACDM sive triangulum LAD est 3, talium trilineum APDM erit 1, & semi-parabola CAPD 2, ac proinde tota LAPD 4. Constat idcirco Parabolam LAPD trianguli LAD in ea descripti maximi esse sesquitertiam. Quod erat propositum.

ALITER, *investigando rationem linearum* AC, BE.



Esto LC ∞a, eritque LF ∞ FC $\infty \frac{1}{2}a$.
CA ∞b
& EB ∞z.

Quibus positis, quoniam FB existente parallelâ diametro CA, & ipsa diameter est, ac, propter similitudinem triangulorum LCA, LFE, LC est ad CA, hoc est, a ad b, sicut LF, hoc est, $\frac{1}{2}a$, ad FE: erit FE $\infty \frac{1}{2}b$. Cui additâ EB ∞z, si tota FB seu CG $\infty \frac{1}{2}b + z$ ex CA ∞b auferatur, relinquetur GA $\infty \frac{1}{2}b - z$.

Deinde, quia, ex natura Parabolæ, CA est ad GA, hoc est, b ad $\frac{1}{2}b - z$; sicut □ LC ad □ BG seu FC, hoc est, aa ad $\frac{1}{4}aa$, vel 4 ad 1: erit $b \infty 2b - 4z$. Unde resolutâ æquatione fit $z \infty \frac{1}{4}b$. Quod ipsum docet, rectam CA ipsius EB quadruplam esse.

E quibus porrò facile est invenire rationem trianguli EBA ad triangulum LAC. Cum enim propter parallelas EB, AC angulos ad E & A æquales habeant, ac proinde ipsa inter se sint sicut ▭ BEA ad ▭ LAC: erit, assumptâ LE vel EA ∞c, unum ad alterum, sicut $\frac{1}{4}bc$ ad $2bc$, hoc est, ut 1 ad 8; ideoque △ LBA ad △ LAC, ut 1 ad 4.

Eodem modo, triangulo APD trianguli CAD subquadruplo existente, erunt & bina △la LBA & APD simul sumpta binorum triangulorum LAC & CAD simul sumptorum, hoc est, totius LAD, subquadrupla. Id quod eâdem ratione de cæteris triangulis, quæ dein-

deinceps in reliquis ſequentibus portionibus in infinitum deſcribuntur, eſt intelligendum.

Quocirca cum pateat triangulum Parabolæ inſcriptum maximum ad triangula in reliquis portionibus maxima eſſe ut 4 ad 1; & hæc rurſus ad illa in reliquis inde ſequentibus maxima ut 4 ad 1, atque hoc ita in infinitum contingere: manifeſtum eſt, ſi illorum maximum LAD ſtatuatur eſſe 3, ſummam omnium, hoc eſt, ipſam Parabolam LBAPD, per 16. Sect. fore 4: adeoque hanc eandem trianguli LAD eſſe ſeſquitertiam. Ut ſupra. Atque hic ipſiſſimus modus eſt, quo eam quadravit Archimedes.

Haud diſſimili ratione aliarum curvarum ſuperiorum generum quadraturæ inveſtigari poſſunt.

SECTIO XVIII.

De modo inveſtigandi relationem, quæ inter Sphæram, Cylindrum, & Conum exiſtit.

QUam inter ſe rationem Sphæra, Cylindrus, atque Conus habeant, demonſtravit Archimedes Propoſitione 32 primi libri de Sphæra & Cylindro; verùm quo pacto illam inveſtigare liceat, præſenti Sectione exponere viſum fuit.

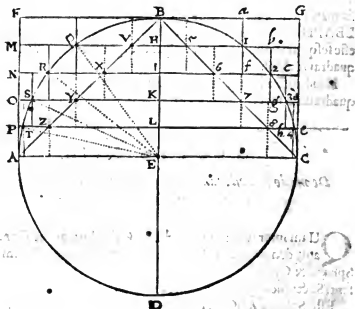
Eſto Sphæra ABCD, & in ea Conus ABC, baſin habens æqualem circulo in Sphæra maximo, altitudinem verò BE æqualem ſemidiametro Sphæræ. Dein circa hemiſphærium ABC intelligatur Cylindrus AFGC, cujus ſimiliter baſis circulo in Sphæra maximo ſit æqualis, & altitudo BE æqualis ſemidiametro Sphæræ.

Quibus poſitis, oporteat inveſtigare quam inter ſe habeant rationem, ſphæra, cylindrus, atque conus.

Ad hoc autem dividatur BE in partes quotcunque æquales, & per diviſionum puncta H, I, K, L ducantur plana baſi coni vel cylindri parallela.

Quoniam igitur, per 35 Tertii Elementorum, rectangula DHB, DIB, DKB, DLB, DEB quadratis QH, RI, SK, TL, AE ſunt æqualia, atque hæc quidem quadrata, per 2 Duodecimi Elementorum, ad quadrata MH, NI, OK, PL, AE ſint ſicut circuli ab his ſemidiametris deſcripti, ſive etiam ut cylindri æquè alti ſuper hiſce

circulis constituti: patet, rectangula DHB, DIB, DKB, DLB, DEB seu quadrata QH, RI, SK, TL, AE ad quadrata MH, NI, OK, PL, AE esse, ut figura hemisphærio ABC circumscripta ad cylindrum AFGC.



Quod ut magis fiat perspicuum, supponatur partium quælibet, in quas EB dissecta est, esse 1, eritque divisâ EB in 5 æquales partes, ratio quam figura hemisphærio ABC circumscripta habet ad cylindrum AFGC,

DH 9 — HB 1	▭ DHB seu □ QH 9	MH 5 — MH 5	□ MH 25
DI 8 — IB 2	▭ DIB seu □ RI 16	NI 5 — NI 5	□ NI 25
DK 7 — KB 3	▭ DKB seu □ SK 21	OK 5 — OK 5	□ OK 25
DL 6 — LB 4	▭ DLB seu □ TL 24	PL 5 — PL 5	□ PL 25
DE 5 — EB 5	▭ DEB seu □ AE 25	AE 5 — AE 5	□ AE 25
	ut 95 ...... ad	....	125

Cum autem loco quadratorum QH, RI, SK, TL, AE, per 47 Primi Elementorum, substituere liceat excessus, quibus quadrata EQ,

EQ, ER, ES, ET, EA superant quadrata ex EH, EI, EK, EL, & o: erit ratio figuræ hemisphærio A B C circumscriptæ ad cylindrum AFGC,

□EQ 25 — □EH	16	□MH 25
□ER 25 — □EI	9	□NI 25
□ES 25 — □EK	4	□OK 25
□ET 25 — □EL	1	□PL 25
□EA 25 —	o	□AE 25

ut 125 —— 30 . . . ad . . . . . 125. Hoc est, figura hemisphærio A B C circumscripta, constans ex cylindris æque-altis inæqualibus erit ad cylindrum A F G C, ex totidem cylindris ejusdem altitudinis, maximoque præcedentium æqualibus, composita; ut quadratum semidiametri sphæræ A E toties sumptum quot sunt cylindri lineævé E B partes minus totidem quadratis rectarum à puncto vel o inchoatarum, ac juxta numeros o. 1. 2. 3. &c. in serie naturali usque ad radium continuè crescentium, ad totidem radii quadrata.

Quod ut generaliter percipiatur, rectâ EB in quotcunque partes æquales divisâ, supponamus cum Clarissimo ac undequaque Doctissimo Viro D^no^ Johanne Wallisio * numerum terminorum seu multitudinem partium, in quas E B dissecta fuerit, esse a: eritque, quærendo summam quadratorum hujusce Progressionis juxta Bacheti aliorumvé regulas, ratio, quam figura hemisphærio A B C circumscripta habet ad Cylindrum AFGC, ut $\frac{4a^3 + 3aa - a}{6}$ ad a^3, seu $4a^3 + 3aa - a$ ad $6a^3$, hoc est, dividendo ubique per a, ut $4aa + 3a - 1$ ad $6aa$. Et manifestum est, si ratio inventa fuisset ut $4aa$ ad $6aa$, quòd tunc quidem figura hemisphærio A B C circumscripta ipsius cylindri A F G C fuisset subsesquialtera. Quoniam verò ipsi $4aa$ jam accedit $3a - 1$, in quo $3a$ semper majus est quàm 1, liquet, rationem, quam figura hemisphærio ABC circumscripta habet ad cylindrum AFGC, esse majorem quàm subsesquialteram.

* *Vide ejus Arithmeticam Infinitorum sive novam Methodum Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaqúe difficiliora Matheseos Problemata.*

Hinc, si EB in 2 æquales partes divisa fuerit, ratio erit, ut 21 ad 24 seu $\frac{21}{24}$, hoc est, $\frac{2}{3} + \frac{5}{24}$; si in 3, ut 44 ad 54 seu $\frac{44}{54}$, hoc est, $\frac{2}{3} + \frac{8}{54}$; si in 4, ut 75 ad 96 seu $\frac{75}{96}$, hoc est, $\frac{2}{3} + \frac{11}{96}$; si in 5, ut 114 ad 150 seu $\frac{114}{150}$, hoc est, $\frac{2}{3} + \frac{14}{150}$; si in 6, ut 161 ad 216 seu $\frac{161}{216}$, hoc est, $\frac{2}{3} + \frac{17}{216}$. Et sic deinceps. Hoc est, ratio proveniens ubique major est quàm $\frac{2}{3}$, excessusque perpetuò decrescit, ut patet per $\frac{5}{24}, \frac{8}{54}, \frac{11}{96}, \frac{14}{150}, \frac{161}{216}$ &c.

prout

prout nimirum EB continuè in plures partes dividi supponitur. Omnino videlicet ut per $\frac{4aa+3a-1}{6aa}$ vel $\frac{2}{3}+\frac{3a-1}{6aa}$ indicatur.

Atque hæc quidem de figuræ hemisphærio ABC circumscriptæ cum cylindro AFGC comparatione. Sequitur comparatio figuræ eidem hemisphærio ABC inscriptæ cum cylindro AFGC.

Ad hanc autem inveniendam, opùs tantùm est investigare rationem, quam habent rectangula DHB, DIB, DKB, DLB seu quadrata QH, RI, SK, TL sive etiam excessus, quibus □ta EQ, ER, ES, ET superant □ta ex EH, EI, EK, EL, ad quadrata MH, NI, OK, PL, AE.

		□MH 25
□EQ 25 — □EH 16		□NI 25
□ER 25 — □EI 9		□OK 25
□ES 25 — □EK 4		□PL 25
□ET 25 — □EL 1		□AE 25

Et invenietur rationem quæsitam fore, ut 100 ——— 30 ... ad ... 125.

Quod ut in genere de quavis figura hemisphærio ABC inscriptâ intelligatur, lineâ EB in quotlibet æquales partes sectâ, suppono partium harum numerum esse a: eritque ratio figuræ hemisphærio ABC inscriptæ ad cylindrum AFGC, ut $\frac{4a^3-3aa-a}{6}$ ad a^3, seu $4aa-3a-1$ ad $6aa$. Et manifestum est, si ratio hæc fuisset ut $4aa$ ad $6aa$, quòd figura hemisphærio ABC inscripta ipsius cylindri AFGC tunc fuisset subsesquialtera. Quia autem ipsi $4aa$ jam decedit $3a+1$, constat, rationem figuræ hemisphærio ABC inscriptæ ad cylindrum AFGC esse minorem quàm subsesquialteram.

Hinc, si EB in 2 æquales partes sit divisa, erit ratio ut 9 ad 24 seu $\frac{9}{24}$, hoc est, $\frac{2}{3}-\frac{7}{24}$; si in 3, ut 26 ad 54 seu $\frac{26}{54}$, hoc est, $\frac{2}{3}-\frac{10}{54}$; si in 4, ut 51 ad 96 seu $\frac{51}{96}$, hoc est, $\frac{2}{3}-\frac{13}{96}$; si in 5, ut 84 ad 150 seu $\frac{84}{150}$, hoc est, $\frac{2}{3}-\frac{16}{150}$; si in 6, ut 125 ad 216 seu $\frac{125}{216}$, hoc est, $\frac{2}{3}-\frac{19}{216}$. Et sic deinceps. Hoc est, ratio proveniens ubique minor est quàm $\frac{2}{3}$, defectusque perpetuò decrescit, ut liquet per $\frac{7}{24}, \frac{10}{54}, \frac{13}{96}, \frac{16}{150}, \frac{19}{216}$, &c. prout nimirum EB continuè in plures partes dividi supponitur. Omnino videlicet ut per $\frac{4aa-3a-1}{6aa}$ vel $\frac{2}{3}-\frac{3a-1}{6aa}$ indicatur.

Porrò, quoniam cylindro AFGC existente ∞ $6aa$, figura circumscripta

scripta est $\propto 4aa + 3a - 1$, & inscripta $\propto 4aa - 3a - 1$, atque harum duarum differentia $\propto 6a$: erit ratio hujus differentiæ ad cylindrum AFGC, ut $6a$ ad $6aa$ seu ut 1 ad a, hoc est, ut unitas ad multitudinem partium ipsius EB. Ut autem unitas ad multitudinem partium ipsius EB, ita quoque est cylindrus APeC ad cylindrum AFGC. Quocirca superabit circumscripta figura ipsam inscriptam differentiâ APeC. Id quod etiam patet, considerando super unoquoque circulorum Q1, R2, S3, T4 duos cylindros esse constitutos, quorum alter quidem versùs B, alter autem versùs E respiciat, quorumque illi omnes, qui versùs E constituti sunt, simul æquales sint illis omnibus simul, qui versùs B reperiuntur; adeò ut, si omnibus illis qui versùs B habentur cylindrus Ae addatur, tota figura circa hemisphærium ABC descripta superet figuram eidem ABC inscriptam cylindro Ae.

Ubi demum liquet, cùm EB in continuum in æquales partes dividi possit, ita ut hinc tandem cylindrus Ae dato quolibet solido minor evadat, sic etiam hemisphærio ABC posse hâc ratione figuram circumscribi alteramque eidem inscribi, utramque ex cylindris æquè altis constantem; ut [illegible]scriptarum differentia sit quocunque dato solido minor. Ac proinde, si partium numerus ipsius EB statuatur esse infinitè magnus, hoc est, ut hemisphærium ABC & cylindrus AFGC ex æquè multis ac infinitis quasi circulis conflari intelligatur aut etiam ex cylindris altitudinis infinitè exiguæ: erit differentia inter circumscriptam & inscriptam figuram $\propto 0$, adeoque ratio cylindri AFGC ad hemisphærium ABC, ut 3 ad 2, hoc est, sesquialtera. Hinc cum idem eodem modo de eorum duplis sit intelligendum, concluditur, cylindrum, habentem basin æqualem circulo in sphæra maximo & altitudinem diametro sphæræ æqualem, ipsius sphæræ sesquialterum haberi. Quod erat propositum.

Eodem modo, quærendo rationem, quæ inter quadrata VH, XI, YK, ZL, AE & quadrata MH, NI, OK, PL, AE existit, quantitate a multitudinem partium ipsius EB designante, invenietur figura cono ABC circumscripta esse ad cylindrum AFGC, ut $2aa + 3a + 1$ ad $6aa$, hoc est, rationem illam esse $\frac{2}{3} + \frac{3a+1}{6aa}$. Investigando autem rationem, quæ inter quadrata VH, XI, YK, ZL & quadrata MH, NI, OK, PL, AE reperitur, invenietur figura cono ABC inscripta esse ad cylindrum AFGC, ut $2aa - 3a + 1$ ad $6aa$, hoc est, rationem

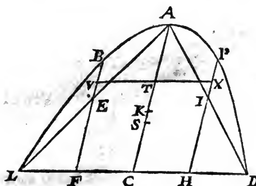
 illam

illam esse $\frac{1}{3} - \frac{3a+1}{6aa}$. Quocirca cum duarum harum figurarum illa, quæ cono ABC circumscribitur, ubique triente cylindri AFGC major sit; at verò hæc, quæ eidem cono ABC inscribitur, ubique triente cylindri AFGC minor existat, & quidem tam illius excessus $\frac{3a+1}{6aa}$, quàm hujus defectus $\frac{-3a+1}{6aa}$, dividendo continuè EB in plures atque plures partes, tandem usque ad nihilum decrescat: sequitur, conum ABC ipsius cylindri AFGC subtriplum esse habendum. Quod erat propositum.

Hinc, qualium partium conus ABC statuitur esse 1, talium cylindrus AFGC erit 3, & totus cylindrus, qui nempe integræ sphæræ ABCD circumscribitur, 6. Quo quidem ipsius sphæræ ABCD sesquialtero ostenso, hoc est, ut, cylindro hoc existente 6, sphæra ABCD sit 4: perspicuum fit, sphæram ABCD dicti coni ABC, huic sphæræ inscripti, esse quadruplam. Quod erat propositum.

SECTIO XIX.

Ratio investigandi centrum gravitatis Parabolæ.



Explicaturus quâ ratione centrū gravitatis figuræ investigari possit, supponemus illud cum Archimede aliisq; authoribus in unaquaque figura esse tantū unicum punctum, quod in respectu ad illam eundem semper situm observat; sicut etiam duo aut plura gravia juxta lineas parallelas, per centra hæc tendentes, deorsum ferri.

Quo-

Quocirca ſtatuendo K eſſe centrum gravitatis Parabolæ LBAPD, & S centrum gravitatis trianguli L A D, puncta verò V & X centra duarum portionum LBA & APD: erit, ductâ V X, punctum T centrum gravitatis, magnitudinis ex utriſque compoſitæ.

Hinc ſi ponatur C A $\propto a$, erit E B vel I P, per antec. Sect., $\propto \frac{1}{4}a$, & AS $\propto \frac{2}{3}a$. Dein poſitâ AK $\propto z$, erit CK $\propto a - z$. Quibus ita conſtitutis, cum C A ſit ad A K, hoc eſt, a ad z, ſicut E B vel IP, hoc eſt, $\frac{1}{4}a$ ad B V vel PX: erit B V vel P X $\propto \frac{1}{4}z$. Quâ ſubductâ ex E B vel IP, relinquitur EV vel IX $\propto \frac{a-z}{4}$. Huic autem additâ F E vel H I $\propto \frac{1}{2}a$, fit F V vel H X, ſeu C T $\propto \frac{3a-z}{4}$.

Porrò quoniam ablatâ CK $\propto a - z$ ex CT $\propto \frac{3a-z}{4}$, remanet KT $\propto \frac{3z-a}{4}$, at AK $\propto z$ ablatâ ex AS $\propto \frac{2}{3}a$, relinquitur KS $\propto \frac{2}{3}a - z$; & quidem K T ad K S ſit, ſicut triangulum L A D ad duas ſimul portiones LBA & APD, quorum unius ad alterum ratio, per præc. Sect., eſt, ut 3 ad 1: erit ut $\frac{3z-a}{4}$ ad $\frac{2}{3}a - z$, ſic 3 ad 1. Fietque, multiplicando tum extremos in ſe invicem tum medios, $\frac{3z-a}{4} \propto 2a - 3z$. Unde reſolutâ æquatione invenitur $z \propto \frac{3}{5}a$. Quod ipſum docet, ad obtinendum quæſitum centrum K, dividendam eſſe AC in 5 æquales partes, atque earundem pro AK ſumendas eſſe tres; conveniens cum eo, quod ab Archimede oſtenſum eſt Prop^ne 8. lib. 2. de Æquiponderantibus: nimirum, diametrum C A à gravitatis centro K ſemper ſic dividi, ut pars KA, quæ ad verticem eſt, ſit ad partem KC, quæ terminatur ad baſin, in ratione ſeſquialtera, ſeu ut 3 ad 2.

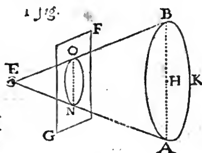
Eodem modo aliarum figurarum, quæ à curvis ſuperiorum generum comprehenduntur, centra gravitatum inveſtigari poſſunt.

SECTIO XX.

De circuli projectione in planum, quæ item circulus exiſtat.

QUo pacto, datis poſitione circulo & plano tabulæ, locus inveniri poſſit, ad quem oculo adhibito circulus in circulum projiciatur,

ciatur, oſtendit mihi per literas paucis abhinc annis ingenioſiſſimus atque exercitatiſſimus D. Claudius Mylon, J.C, qui ſuper hanc rem ſequentia excogitavit.



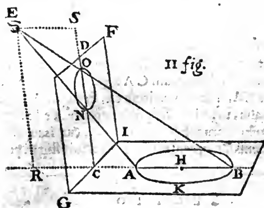
Eſto planum tabulæ G F, circulus autem datus A K B, oporteatque punctum invenire E, ita ut N O, projectio ipſius A K B in dato plano G F, ſit etiam circulus.

Primò, ſi planum tabulæ G F & circuli A K B ſunt parallela, manifeſtum eſt [a], quòd, ubicunque oculus E in ſpacio ſolido indefinito extra planum tabulæ conſtitutus fuerit, projectio N O ipſius A K B in plano G F ſemper item circulus ſit futura.

a p 4 Prop. Primi Conicorum Apollonii.

Secundò verò, ſi planum tabulæ G F & circuli A K B non ſint parallela, dico punctum oculi E ubique ſumi poſſe in Hyperbolâ, poſitione datâ.

Etenim G I exiſtente utriuſque plani communi ſectione, & rectâ C A H B, ſuper ipſam perpendiculari, in plano circuli A K B tranſeunte



per ejus centrum H, ſi ex C ſuper G I in plano tabulæ G F excitetur perpendicularis C D: erit angulus B C D aut ejus complementum

b in-

[b] inclinatio horum duorum planorum, & planum, quod per duas hasce lineas CB, CD transit, ad utrumque ex illis [c] perpendiculare.

b p 6 def. Vndecimi Elementorum.
c p 18 Prop. Vndecimi Elem.

Dein, puncto E existente in plano B C D, quò N O, sectio coni scaleni EAKB per planum tabulæ GF, circulus existat, requiritur ut triangulum E N O, ad verticem E abscissum, sit ipsi E B A, triangulo per axem [d], simile ac subcontrariè positum, hoc est, ut EO sit ad EN, sicut E A ad E B.

d p 5 Prop. Primi Conic. Apollonii.

Hinc in 3tia figura rectis CB, C D, unà cum punctis A, H, B, & E iisdem existentibus, quæ in 2da figura, si, ductâ A G æquali A B ac parallelâ C D, jungatur B G, & ex H huic agatur parallela H I, cui perpendicularis sit H K, atque Asymptotis H I, H K per puncta A & B describantur [e] Hyperbolæ oppositæ AL, BM: dico punctum oculi E ubilibet sumi posse in Hyperbola A L vel B M, hoc est, si ex quocunque in ea puncto E agantur EA, EB secantes CD in N & O, quòd triangula ENO & EBA futura sint similia ac subcontrariè posita.

e p 4 Prop. Secundi Conic. Apollonii.

Ad quod demonstrandum ducatur A P parallela H I. Hinc cum BE occurrat ipsi BG, occurret etiam BE ipsis HI, AP, quæ cum BG sunt parallelæ. Esto ipsarum B E, A P concursus P. Et quoniam B E secat Hyperbolas oppositas AL, BM, secabit & ipsa earundem Asymptotos HI, HK. quod sit in I & K. Porrò divisâ IK bifariam in Q, de-

ſcribatur ex Q intervallo IQ vel QK ſemicirculus IHK, qui tranſibit per H, propter angulum rectum IHK, jungaturque QH.

His igitur ſic poſitis, quoniam IQ eſt æqualis QK, atque etiam IE [f] æqualis KB, erit & tota EQ toti QB æqualis. Atqui æqualis quoque eſt AH ipſi HB. Parallela igitur eſt [g] AE ipſi HQ. Eſt autem per conſtr. etiam AP ipſi HI parallela. Quocirca triangulum AEP ſimile exiſtens triangulo iſoſceli HQI, & ipſum iſoſceles eſt, ejuſque angulus ad A æqualis angulo ad P ſeu huic alterno EBG. Sed in triangulo iſoſceli ABG angulus totalis ABG eſt æqualis angulo G, hoc eſt, totali GAP, ipſi alterno: è quibus æqualibus angulis ABG & GAP quum auferuntur æquales EBG & EAP, remanent æquales ABE & EAG vel ENO. Hinc cum in triangulis EBA & ENO anguli ABE & ENO ſint æquales, & angulus ad E utrique triangulo ſit communis, erit & 3^{tius} EAB 3^{tio} EON [h] æqualis, ac proinde triangulum ENO [i] ſimile triangulo EBA. Quæ cum ſubcontrariè ſint poſita, patet ſectionem NO [k] eſſe circulum. Quod erat faciendum. Eadem eſt ratio de omni alio puncto, in Hyperbola AL aſſumpto, aut etiam in oppoſita Hyperbola BM, tranſpoſitis ſolummodo literis A & B, unâ pro alia.

f p 8 Prop. Secundi Conic. Apollonii.
g p 2 Prop. Sexti Elem.
h p 32 Primi Elem.
i p 4 Prop. & 1 Def. Sexti Elem.
k p 5 Prop. Primi Conic. Apollonii.

Cæterùm notandum, demonſtrationem allatam triplici datorum poſitioni convenire, nimirum, ſive tabula CD inter oculum E & objectum AB, ſive oculus E inter tabulam CD & objectum AB, ſive etiam objectum AB inter oculum E & tabulam CD ſumatur; ſimiliterque facile eſſe demonſtrare per abſurdum, punctum oculi E non poſſe ſumi extra Hyperbolas AL, BM; ac idcirco id ipſum non cadere in Hyperbolas conjugatas.

Verùm enimverò quoniam his intellectis perſpicere jucundum eſt, quonam pacto in haſce cogitationes aliquis incidere queat, ut punctum oculi E ubicunque in alterutra Hyperbolarum AL vel BM pro lubitu ſumi poſſe autumet: non è re me facturum judicavi, ſi calculum analyticum, è quo totum hoc innoteſcit, paucis hîc ſubjecero. Ponatur itaque factum, quod quæritur, ſitque

CA ∞a
AB ∞b
AN ∞c
AR ∞x
RE ∞y
EB ∞z.

Ex ſimilitudine $\triangle^{rum}$ RBE & CBO

RB BE CB
$x+b — z — a+b$ | ad BO. $\frac{az+bz}{x+b}$. Quę ſubducta ex BE ∞z, relinquit $\frac{xz-az}{x+b}$, pro EO.

Ex similitudine $\triangle^{rum}$ CAN & RAE

$$\begin{array}{cccc} CA & AN & RA & \\ a & c & x \,| & \text{ad } AE.\ \frac{cx}{a} \end{array}$$

Ex suppositione quæsiti,
tanquam facti subtr. AN. c

Vide figuram 11.

$$\begin{array}{ccccc} EO & & & EA & EB \\ \frac{xz - az}{x+b} & \text{———} & EN.\ \frac{cx - ca}{a} & \text{———}\ \frac{cx}{a} & |\ z \end{array}$$

$$\frac{xzz - azz}{x+b} \propto \frac{ccxx - ccax}{aa}$$

$$\frac{zz}{x+b} \propto \frac{ccx}{aa}$$

$$zz \propto \frac{ccxx + ccbx}{aa}.$$

Ex similitudine $\triangle^{lorum}$ REB & SEN

$$\begin{array}{cccc} EB & ER & EN & ES \text{ vel } RC \\ z & y & \frac{cx - ca}{a} & |\ x - a \end{array}$$

$$xz - az \propto \frac{cxy - cay}{a}$$

$$z \propto \frac{cy}{a}$$

$$\& \ zz \propto \frac{ccyy}{aa} \propto \frac{ccxx + ccbx}{aa} \propto zz$$

$$\text{fit } yy \propto bx + xx$$

$$\& \ y \propto \sqrt{bx + xx}.$$

Ubi patet, cum in æquatione inventa $yy \propto bx + xx$ alterutra ex incognitis quantitatibus x vel y ad duas dimensiones ascendat, & quidem xx signo $+$ adficiatur, punctumquæsitum E cadere in Hyperbolam.

Ad cujus latus rectum & transversum inveniendum, quoniam, quantitate mm nullâ existente, per ea quæ pag. 31 Geometriæ docentur,

tur, latus rectum est $\frac{oz}{a}$, & quidem quantitas ox hîc pro eadem haberi debeat quâ bx, hoc est, o pro eadem quâ b, atque hîc non habeantur z & a: erit latus rectum $\infty\ b$.

Vide novam Geometriæ editionem.

Deinde, quoniam ratio lateris recti ad transversum latus est ut pzz ad aam, & quidem p ipsi m sit æqualis, propterea quòd nulla ipsi xx fractio adhæreat, atque z & a, (sicut dictum) in inventa æquatione non reperiantur vel sibi invicem sint æquales: erit similiter latus transversum AB $\infty\ b$.

Porrò ut inveniatur centrum, quoniam terminus illud indicans est $\frac{aom}{2pz}$, oportet facere AH $\infty\ \frac{o}{2}$ seu $\frac{1}{2}b$: eritque H, medium ipsius AB, centrum Sectionum.

Denique ER $\infty\ y\ \infty\ \sqrt{bx+xx}$ erit ordinatim adplicata ad diametrum AR. Quæ quidem, si RC vocetur x, erit $\infty\ \sqrt{aa+ab+2ax+bx+xx}$. Unde cætera huc spectantia facilia sunt.

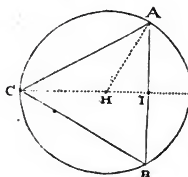
SECTIO XXI.

De figuris ordinatis, circulo inscriptis; ac angulorum vel arcuum in partes æquales sectione.

QUoniam figurarum regularium in circulo descriptio non indifferenter uno eodemque modo procedit, sed pro angulorum numero una longè aliter atque alia ei inscribatur, illiusque descriptionis diversitas à diversa suorum laterum ad radium relatione dependeat: haud inutile fuerit, si, pro radio assumptâ unitate, paucis hîc ostendam, quâ ratione in simplicissimis terminis æquationes inveniri possint, quarum radices dictam hanc laterum ad radium relationem exhibeant, ipsorumque quantitatem exactè determinent. Id quod uno aut altero exemplo ostendisse suffecerit.

In

In triangulo.



Esto CH vel HA $\propto 1$

& AB $\propto x$, eritque AI vel IB $\propto \frac{1}{2}x$.

E $\square$to HA. 1

ſubtr. $\square$ AI. $\frac{1}{4}xx$.

* $\square$ HI. $\overline{1 - \frac{1}{4}xx}$

HI. $\sqrt{1 - \frac{1}{4}xx}$

add. CH. 1

CI. $\overline{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4}xx}}$

add. $\begin{cases} \square \text{ CI. } 2 - \frac{1}{4}xx + \sqrt{4 - xx} \\ \square \text{ AI. } \frac{1}{4}xx \end{cases}$ $\square$ CA vel AB.

† fit $\square$ CA. $\overline{2 + \sqrt{4 - xx} \propto xx}$

$\sqrt{4 - xx} \propto xx - 2$

$4 - xx \propto x^4 - {}^4xx + 4$

$3xx \propto x^4$

$3 \propto xx$, vel $xx - 3 \propto 0$. Æquatio triangguli.

In pentagono.

Ex ſimilitudine $\triangle^{rum}$ HAI & CDK

□HA * □HI □CD □CK

$1 \text{———} 1 - \frac{1}{4}xx \text{———} xx \mid \text{ad } xx - \frac{1}{4}x^4$

per $\overline{\quad 4 \quad}$ † □CA

† fit □CA. $4xx - x^4 \propto 2 + \sqrt{4 - xx}$

$-2 + 4xx - x^4 \propto \sqrt{4 - xx}$

$4 - 16xx + 20x^4 - 8x^6 + x^8 \propto 4 - xx$

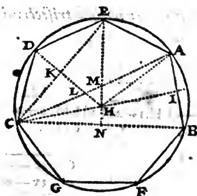
$x^6 - 8x^4 + 20xx - 15 \propto 0$

div. per $xx - 3 \propto 0$ $\overline{\quad x^4 - 5xx + 5 \propto 0.}$

Æquatio pentagoni.

In

In heptagono.



Ex similitudine △^rum^ HAI & CDK

HA AI CD DH. 1

$1 - \frac{1}{2}x - x$ | ad DK. $\frac{2}{2}xx$ } subtr.

Ex similitudine □CH KH. $\overline{1 - \frac{1}{2}xx}$ + □CE □CN

△^rum^ CKH & ENC 1 —— □KH. $\overline{1 - xx + \frac{1}{4}x^4 - {}^{4}xx - x^4}$ | ad $4xx - {}^{5}x^4 + {}^{2}x^6 - \frac{1}{4}x^8$

+ □CA □CB vel CA $\frac{\ }{4}$

$$\text{fit } 2 + \sqrt{4 - xx} \propto \overline{16xx - {}^{20}x^4 + {}^{8}x^6 - x^8}$$

$$\sqrt{4 - xx} \propto -2 + 16xx - 20x^4 + {}^{8}x^6 - x^8$$

$$4 - xx \propto 4 - {}^{64}xx + {}^{336}x^4 - {}^{672}x^6 + {}^{660}x^8 - {}^{352}x^{10} + {}^{104}x^{12} + {}^{16}x^{14} + x^{16}$$

$x^{14} - 16x^{12} + 104x^{10} - 352x^8 + 660x^6 - 672x^4 + 336xx - 63 \propto 0$. Æquatio hæc dividi poteſt per $xx - 3 \propto 0$.

Et fit

$$x^{12} - 13x^{10} + 65x^8 - 157x^6 + 189x^4 - 105xx + 21 \propto 0.$$

Hæc verò æquatio ulteriùs dividi nequit per binomium, quod conſtat ex quantitate incognita xx, + vel — aliquo numero, ultimum terminum 21 abſque fractione dividente; ſed per aliam ſummam, ut poſt patebit.

Notandum autem, tam æquationem inventam Pentagoni, quàm hanc priorem Heptagoni per idem binomium, utpote $xx - 3 = 0$, quæ est æquatio Trianguli, & non per aliud quodvis binomium esse divisibilem.

Aliter per modum trisectionis.

Ex similitudine $\triangle^{rum}$ HCD & DCL

HC CD CD Ex DH. 1 } subtr.
$1 - x - x$ | ad DL. xx }

HD DE

Ex similitudine triangulorum HDE & HLM. $1 - x -$ LH. $\overline{1 - xx}$ | ad LM. $x + x^3$ Add.

CL vel CD. x

MA vel AE. x

CA. $\overline{3x - x^3}$

$3x - x^3$

$-3x^4 + x^6$

$9xx - 3x^4$ †□CA

fit □CA. $\overline{9xx - 6x^4 + x^6} = 2 + \sqrt{4 - xx}$

$-2 + 9xx - 6x^4 + x^6 = \sqrt{4 - xx}$

$x^{12} - 12x^{18} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 36xx + 4 = 4 - xx$

$x^{10} - 12x^8 + 54x^6 - 112x^4 + 105xx - 35 = 0.$

Hæc æquatio per binomium est indivisibilis. Quòd si verò ipsa dividatur per æquationem inventam Pentagoni $x^4 - 5xx + 5 = 0$, prodibit $x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 = 0$, æquatio Heptagoni, in simplicissimis terminis. Quæ etiam obtinebitur dividendo æquationem ante inventam $x^{12} - 13x^{10} + 65x^8 - 157x^6 + 189x^4 - 105xx + 21 = 0$ per hanc summam $x^6 - 6x^4 + 9xx - 3 = 0$. Oritur enim rursus $x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 = 0$. Quæ & hoc insuper modo inveniri potest: nimirum, comparando quadratum ex CA, bisectionis modo quæsitum, cum eodem quadrato CA, per trisectionis modum investigato, omittendo ejusdem quadrati valorem = † $2 + \sqrt{4 - xx}$.

Hoc est, ponendo $16xx - 20x^4 + 8x^6 - x^8 = 9xx - 6x^4 + x^6$

& fit $x^8 - 7x^6 + 14x^4 - 7xx = 0$

vel $x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 = 0$. Æquatio heptagoni, ut ante.

His

His adde reductionis modum à D^no^ Huddenio inventum, quo ex binis inventis æquationibus $x^{12} + 13x^{10} + 65x^8 - 157x^6 + 189x^4 - 105xx + 21 \propto 0$ & $x^{10} - 12x^8 + 54x^6 - 112x^4 + 105xx - 35 \propto 0$ æquationem simplicissimam sic investigat, attollendo scilicet inferiorem, ut ad æque-multas cum superiore dimensiones ascendat, ac deinde operando, ut sequitur.

$$x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 35xx \propto 0$$
$$x^{12} - 13x^{10} + 65x^8 - 157x^6 + 189x^4 - 105xx + 21 \propto 0$$
$$x^{10} - 11x^8 + 45x^6 - 84x^4 + 70xx - 21 \propto 0$$
$$x^{10} - 12x^8 + 54x^6 - 112x^4 + 105xx - 35 \propto 0$$
$$\text{div. per } xx - 2.\ x^8 - 9x^6 + 28x^4 - 35xx + 14 \propto 0$$
$$\text{\& fit } x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 \propto 0.\ \text{Ut supra.}$$

Porrò quoniam circulo inscriptis Hexagono, Decagono, & Tetradecagono, radio, ut supra, existente $\propto 1$, & latere Polygoni $\propto x$, æquationes inveniuntur $x - 1 \propto 0$, $xx + x - 1 \propto 0$, & $x^3 - xx - 2x + 1 \propto 0$, quæ præcedentibus Trianguli, Pentagoni, & Heptagoni sunt simpliciores (id quod similiter de sequentibus Polygonis, dupli angulorum numeri, intelligendum est): consultiùs fuerit ut in eorum descriptionem æquationes, quæ Polygonis hisce dupli angulorum numeri respondeant, investigemus.

Quoniam autem ad æquationes hasce, sicut & ad superiores, compendiosè inveniendas plurimùm deserviunt æquationes, quibus datum angulum seu arcum in partes aliquot æquales dividere licet, subjungam eas, quæ ab eodem Huddenio hunc in finem sunt inventæ, qui ipsas tantâ cum facilitate unam ex alia elicere novit, ut unius circiter horæ quadrantis spacio sequentes mihi suppeditaverit.

Æquationes, ad dividendum angulum seu arcum in partes æquales, numero impares.

Æquatio		Partes
$x^3 - 3x \pm q \propto 0$	æquatio, ad dividendum angulum seu arcum in	3 æquales partes
$x^5 - 5x^3 + 5x - q \propto 0$		5
$x^7 - 7x^5 \pm 14x^3 - 7x \pm q \propto 0$		7
$x^9 - 9x^7 \pm 27x^5 - 30x^3 \pm 9x - q \propto 0$		9
$x^{11} - 11x^9 \pm 44x^7 - 77x^5 \pm 55x^3 - 11x \pm q \propto 0$		11
$x^{13} - 13x^{11} + 65x^9 - 156x^7 + 182x^5 - 91x^3 + 13x - q \propto 0$		13

 Ratio

Ratio autem, quâ eas invenit, est talis:

Supposito radio circuli $\propto 1$, & subtensa arcus dati $\propto q$, ponatur subtensa quæsitæ partis $\propto x$. Dein operatio ad trisectionem ita instituatur

x . 1
Mult. per x . 2
subtr. xx . 3
ex unitate seu 1 . 4
$1 - xx$. V
Mult. per x . 2
$x - x^3$. 6
add. x . 1
$2x - x^3$. VII
add. x . 1
Eritque $q \propto 3x - x^3$. 8. Æquatio trisectionis.

Ad quinque sectionem, sicut & ad omnes ulteriores sectiones impares, idem fermè est processus, modò pro primo termino nunc sumatur ille, qui ante notabatur VII, & tertii termini subtractio non ampliùs jam ex unitate sed ex eo, qui per V in immediatè antecedenti operatione denotabatur, deinceps in aliis omnibus fiat.

Quemadmodum hîc videre licet.

(VII) $2x - x^3$. 1
Mult. per x . 2
subtr. $2xx - x^4$. 3
ex (V) $1 - xx$. 4
$1 - 3xx + x^4$. V
Mult. per x . 2
$x - 3x^3 + x^5$. 6
add. $2x - x^3$. 1
$3x - 4x^3 + x^5$. VII
add. $2x - x^3$. 1
& fit $q \propto 5x - 5x^3 + x^5$. 8. Æquatio quinque sectionis.

Ope-

Operatio autem septusectionis est hujusmodi:

$$\begin{array}{lr}
(\text{VII})\ 3x-4x^3+x^5 & .\ 1\\
\text{Mult. per}\quad x & .\ 2\\
\text{subtr.}\ 3xx-4x^4+x^6 & .\ 3\\
\text{ex (V)}\ 1-3xx+x^4 & .\ 4\\
1-6xx+5x^4-x^6 & .\ \text{V}\\
\text{Mult. per}\quad x & .\ 2\\
x-6x^3+5x^5-x^7 & .\ 6\\
\text{add.}\ 3x-4x^3+x^5 & .\ 1\\
4x-10x^3+6x^5-x^7 & .\ \text{VII}\\
\text{add.}\ 3x-4x^3+x^5 & .\ 1
\end{array}$$

Et habebitur $q \infty 7x-14x^3+7x^5-x^7$. 8. Æquatio septusectionis.

Et sic de aliis in infinitum.

Deinde ut pateat, quo pacto æquationes, quibus datus angulus seu arcus in partes numero pares dividi potest, inveniendæ sint, oportet tantùm in æquatione, quâ datus angulus seu arcus in æquales partes dividitur, loco quantitatis incognitæ x, ubique $\sqrt{4xx-x^4}$ substituere, & loco xx hujus quadratum, hoc est, $4xx-x^4$, atque ita porrò: habebiturque alia æquatio, per quam idem angulus seu arcus in duplo plures partes secabitur.

Sic, cum, exempli gratiâ, æquatio, quâ angulus in 2 æquales partes dividitur, sit $x^4-4xx+qq \infty 0$, assumpto $4xx-x^4$ locum xx

$$\begin{array}{lll}
\text{scribo} & 16x^4-8x^6+x^8 & \text{pro}\ x^4\\
\& & -16xx+4x^4 & \text{pro}\ -4xx\\
\text{nec non} & +qq & \text{pro}\ +qq,
\end{array}$$

& invenietur $x^8-8x^6+20x^4-16xx+qq \infty 0$. Æquatio sectionis anguli seu arcus in 4 æquales partes.

Sic &, æquatione, quâ angulus in 3 æquales partes dividitur, existente $x^3-3x+q \infty 0$

$$\begin{array}{lll}
\text{scribo} & \overline{4xx-x^4}\sqrt{4xx-x^4} & \text{pro}\ x^3\\
\& & -3\sqrt{4xx-x^4} & \text{pro}\ -3x\\
\text{ut \&} & +q & \text{pro}\ +q
\end{array}$$

& habebo $q+\overline{4xx-x^4-3}\sqrt{4xx-x^4} \infty 0$

hoc est, $-\overline{4xx+x^4+3}\sqrt{4xx-x^4} \infty q$

& fit,

& fit, ductâ utrâque parte in se quadratè, ordinataque æqualitate, $x^{12} - 12x^{10} + 54x^{8} - 112x^{6} + 105x^{4} - 36xx + qq = 0$. Æquatio dividendi angulum seu arcum in 6 æquales partes.

Similiterque, cum $x^{8} - 8x^{6} + 20x^{4} - 16xx + qq = 0$ sit æquatio, quâ angulus in 4 æquales partes secatur, invenietur, operando ut ante, $x^{16} - 16x^{14} + 104x^{12} - 352x^{10} + 660x^{8} - 672x^{6} + 336x^{4} - 64xx + qq = 0$. Quæ est æquatio dividendi angulum seu arcum in 8 æquales partes. Atque ita de reliquis in infinitum.

Ubi notandum, æquationes hasce inventas, quibus angulus seu arcus in æquales partes sive pares sive impares dividitur, non semper esse simplicissimas, nisi tantùm cùm partium illorum numerus est primus. At verò reliquas quod attinet, quamvis ad præcedentes referri possint, ipsas tamen nihilominus sic ad Polygonorum æquationes, quales illas invenire intendimus, optimè omnium inservire. Id quod ostendere nunc nostrum est institutum.

In hunc finem inveniantur duæ æquationes diversæ, unam eandemque habentes quantitatem incognitam. Ad quas obtinendas, assumpto radio $= 1$, & latere Polygoni, cujus numerus angulorum sit dati duplus, $= x$, accipio duas æquationes ex jam inventis, quarum una inserviat divisioni anguli seu arcus in tot partes æquales, quot indicat minor semissis dati numeri angulorum; & altera eidem dividendo in tot partes, quot indicat ejusdem numeri major semissis. Quæ binæ si deinde ad eandem quantitatem qq revocentur, & in priori pro qq substituatur $2 - x$ & in posteriori pro qq substituatur $2 + x$: obtinebuntur duæ æquationes diversæ, unam eandemque quantitatem incognitam habentes, quæ superiori modo reductæ dabunt æquationem simplicissimam quæsitam, in quâ incognita quantitas latus Polygoni designat dupli angulorum numeri.

Ut ad describendum Pentagonum in circulo, quoniam, assumpto radio $= 1$, & latere Decagoni $= x$, minor semissis numeri angulorum 5, est 2, & major semissis 3, hinc duas accipio æquationes, ex supra inventis, nimirum: $qq = 4xx - x^{4}$ & $q = 3x - x^{3}$, quarum una inserviat dividendo angulo seu arcui in 2, & altera eidem dividendo in 3 æquales partes. Quæ binæ si ad eandem quantitatem qq revocentur, atque in æquationibus inde ortis $qq = 4xx - x^{4}$ & $qq = 9xx - 6x^{4} + x^{6}$ pro qq in priori substituatur $2 - x$ & pro qq in posteriori substituatur $2 + x$: obtinebuntur duæ æquationes differentes ejusdem radicis, nempe $x^{4} - 4xx - x + 2 = 0$ & $x^{6} - 6x^{4} + 9xx - x - 2 = 0$, quæ,

quæ, modo supra explicato, reductæ dabunt $xx + x - 1 = 0$, æquationem simplicissimam Decagoni.

Sic & ad describendum Heptagonum in circulo, quoniam ipsius 7, numeri angulorum, minor semissis est 3, & major semissis 4, ideo assumptis binis æquationibus $q = 3x - x^3$ & $qq = -x^8 + 8x^6 - 20x^4 + 16xx$, quarum prior angulo seu arcui in 3, & posterior eidem in 4 æquales partes dividendo inservit: fit, ut si ipsæ deinde ad eandem quantitatem qq revocentur, ac in priori harum pro qq substituatur $2 - x$, & in posteriori pro qq substituatur $2 + x$, duæ ejusdem radicis æquationes, sed tamen differentes, utputa $x^6 - 6x^4 + 9xx + x - 2 = 0$ & $-x^8 + {}^8x^6 - 20x^4 + 16xx - x - 2 = 0$, remaneant. Quæ si porrò, ut supra, reducantur, dabunt $x^3 - xx - 2x + 1 = 0$, æquationem simplicissimam Tetradecagoni.

Haud secus ad describendum Endecagonum in circulo, ex binis æquationibus superioribus $q = 5x - 5x^3 + x^5$ & $qq = -x^{12} + 12x^{10} - 54x^8 + 112x^6 - 105x^4 + 36xx$ (quarum una ad angulum seu arcum in 5, & altera ad eundem in 6 æquales partes dividendum inservit) duæ ejusdem radicis æquationes differentes invenientur $x^{10} - 10x^8 + 35x^6 - 50x^4 + 25xx + x - 2 = 0$ & $-x^{12} + 12x^{10} - 54x^8 + 112x^6 - 105x^4 + 36xx - x - 2 = 0$. Quæ, ut ante, reductæ dabunt $x^5 + x^4 - 4x^3 + 3xx + 3x - 1 = 0$, æquationem simplicissimam 22goni.

Pari modo, si in circulo 13gonum sit describendum, ope æquationum $qq = -x^{12} + 12x^{10} - 54x^8 + 112x^6 - 105x^4 + 36xx$ & $q = 7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7$, quibus datus angulus seu arcus in 6 & 7 æquales partes dividitur, invenientur binæ ejusdem radicis æquationes differentes $-x^{12} + 12x^{10} - 54x^8 + 112x^6 - 105x^4 + 36xx + x - 2 = 0$ & $x^{14} - 14x^{12} + 77x^{10} - 210x^8 + 294x^4 - 196x^4 + 49xx - x - 2 = 0$. Ex quibus deinde, reductione ante ostensâ, invenitur $x^6 + x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 6xx + 3x - 1 = 0$, æquatio simplicissima 26goni. Atque ita de reliquis in infinitum.

Ubi notandum, præter æquationes inventas & alias inveniri posse, quarum reductione, ut supra, faciliùs ad æquationes Polygonorum simplicissimas pervenitur: nimirum, assumendo æquationem sectionis anguli seu arcus in tot partes æquales, quot Polygonum habet angulos, & in locum q substituendo deinde binarium: habebiturque æquatio, cujus incognita quantitas designat latus polygoni dupli angulorum numeri. Quæ æquatio si porrò cum altera ex binis superioribus, quæ non per multiplicationem ad qq est reducta, compare-

Ooo tur:

tur: reductione harum duarum quæſita ſimpliciſſima, breviùs quàm ſupra, obtinebitur.

Ut quoniam ad deſcribendum in circulo Pentagonum æquatio ſectionis anguli ſeu arcus in 5 æquales partes eſt $x^5 - 5x^3 + 5x - q \propto 0$, mutatâ q in 2, habebitur $x^5 - 5x^3 + 5x - 2 \propto 0$. Quæ eſt æquatio Decagoni. Hæc autem ſi cum $x^4 - 4xx - x + 2 \propto 0$, quæ altera eſt ſupra inventarum, multiplicatione ad qq non reducta, comparetur, præcedenti reductione ſimpliciſſimam Decagoni æquationem breviùs quàm ſupra manifeſtabit. Et ſic de aliis in infinitum.

Ad hæc notandum, cum & aliæ æquationes exiſtant, eidem Polygono in circulum deſcribendo inſervientes, quarum reductione, ſive illæ inter ſe, ſive cum aliis præcedentibus comparentur, æquatio ſimpliciſſima Polygoni inveniri queat: ſuffecerit id uno aut altero exemplo oſtendiſſe. Quippe in Decagono præter tres ſuperiores inventas, utputa $x^4 - 4xx - x + 2 \propto 0$, $x^6 - 6x^4 + 9xx - x - 2 \propto 0$, & $x^5 - 5x^3 + 5x - 2 \propto 0$, reperiuntur etiam $x^6 - 4x^4 + 4xx - 1 \propto 0$ & $x^5 - 4x^3 + 3x - 1 \propto 0$.

Sic etiam in 14gono præter tres $x^6 - 6x^4 + 9xx + x - 2 \propto 0$, $x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16xx + x + 2 \propto 0$, & $x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x + 2 \propto 0$ inveniuntur etiam $x^5 - 4x^3 + 3x - 1 \propto 0$, & $x^6 - 5x^4 + 6xx - 1 \propto 0$.

Haud ſecus in 22gono præter tres $x^{10} - 10x^8 + 35x^6 - 50x^4 + 25xx + x - 2 \propto 0$, $x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 36xx + x + 2 \propto 0$, & $x^{11} - 11x^9 + 44x^7 - 77x^5 + 55x^3 - 11x + 2 \propto 0$ invenitur etiam $x^9 - 8x^7 + 21x^5 - 20x^3 + 5x - 1 \propto 0$.

Præterea animadverſione dignum, quòd, quemadmodum ſupra æquatio $x^{10} - 12x^8 + 54x^6 - 112x^4 + 105xx - 35 \propto 0$, una ex binis pro Heptagono inventis, diviſa per $x^4 - 5xx + 5 \propto 0$, æquationem Pentagoni, dat $x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 \propto 0$, æquationem ſimpliciſſimam Heptagoni; ita etiam hîc æquatio $x^5 - 4x^3 + 3x - 1 \propto 0$, una ex illis pro 14gono inventis, diviſa per $xx + x - 1 \propto 0$, æquationem Decagoni, exhibeat $x^3 - xx - 2x + 1 \propto 0$, æquationem ſimpliciſſimam 14goni.

Sic etiam, quòd $x^9 - 8x^7 + 21x^5 - 20x^3 + 5x - 1 \propto 0$, una ex illis pro 22gono inventis, diviſa per $x^3 - 3x + 1 \propto 0$, æquationem 18goni, exhibeat æquationem $x^6 - 5x^4 - x^3 + 6xx + 2x - 1 \propto 0$: quæ, prout per $x + 1 \propto 0$ diviſa fuerit, oſtendat $x^5 - x^4 - 4x^3 + 3xx + 3x - 1 \propto 0$, æquationem ſimpliciſſimam 22goni.

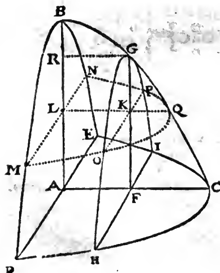
Oſtendimus itaque regulas generales, quibus æquationes omnium ſim-

ſimpliciſſimæ, tum ad angulum ſeu arcum in partes quotcunque æquales dividendum, tum ad deſcribenda in circulo quælibet Polygona regularia, inveniri queant. Ubi tandem advertendum, methodum hanc, quâ duæ aut plures æquationes differentes, unam tantùm eandemque quantitatem incognitam habentes, mutuâ reductione ſimpliciſſimam æquationum ſubminiſtrant, ad aliorum quoque difficiliorum Problematum æquationes ſimpliciſſimas inveſtigandas, inſervire poſſe.

SECTIO XXII.

De lineis curvis ſuperiorum generum, ex ſolidi ſectione ortis.

CUm curvarum linearum contemplatio per ſe jucunda pariter atque utilis exiſtat, ac illæ, quæ ſuperioris ſunt generis vel ultra Sectiones Conicas compoſitæ, à nullo (quod ſciam) hactenus ex ſolidi alicujus ſectione generari oſtenſæ ſint: viſum fuit, quæ circa hanc rem tribus abhinc annis ab ingenioſiſſimo ac amiciſſimo noſtro Huddenio excogitata & inventa ſunt, atque illarum cognitionem mirificè promovere valent, lubenti animo hîc impertiri.



Eſto DHCIE Parabola primi generis, (hoc eſt, qualis oritur ex ſectione Coni, uni laterum trianguli per axem parallelâ) cujus axis ſit AC, & ordinatim ad eum adplicata DAE. Erectâ autem ex A ſuper plano hujus Parabolæ perpendiculari AB, intelligantur ex B per ſingula puncta Parabolæ DHCIE deſcriptæ eſſe aliæ Parabolæ, habentes communem axem AB, ita ut DMBNE tota Parabola, & ABGQC ſemi-Parabola exiſtat. Quibus ita poſitis cum hoc pacto ſoli-

dum concipi possit, in quo sectio quævis per AB incedens, ut & quæ basi D H C I E sit parallela, Parabolæ existunt; atque in eo deinde sectio institui queat, ut HOGPI, quæ Parabolæ DMBNE sit parallela: dico sectionem hanc H O G P I curvam fore, quæ 2di est generis.

Ad quod demonstrandum supponatur planum basi DHCIE æquidistans, secans quidem planum curvæ H O G P I secundùm rectam lineam O K P, & planum Parabolæ D M B N E secundum rectam MLN, at planum semi-Parabolæ ABGQC secundùm rectam LKQ, quodque secans solidum in sectione faciat curvam MOQPN.

His igitur sic præsuppositis, cum G F axis curvæ HOGPI sit ipsi BA axi Parabolæ DMBNE parallelus, nec non rectæ MLN & OKP ipsis ordinatis D A E, H F I parallelæ: erunt & ipsæ MLN & OKP inter se parallelæ, & ad axes BA, GF ordinatæ. Deinde, ex G ductâ G R ipsi QK L vel CFA parallelâ, donec secet ARB in R, factâque GK ∞ x, OK vel KP ∞ y, AB ∞ a, AC ∞ b, DA vel AE ∞ g, & GR vel KL ∞ c, procedo, ut sequitur.

Ex natura Parabolæ

□AC □RG AB

$bb \ldots\ldots cc \ldots\ldots a$ | ad RB. $\frac{acc}{bb}$

Ex natura Parabolæ AB a ——— LB. $\frac{acc}{bb}+x$ (adde LR vel KG. x)

□DA vel AE $\left\{\frac{gg}{bb}\,\square AC\right\}$ ad $\left\{\begin{array}{l}\square \text{ML vel LN} \;\; \frac{ggcc}{bb}+\frac{ggx}{a}, \text{ unde ML vel LN } \sqrt{\frac{ggcc}{bb}+\frac{ggx}{a}} \\ \square LQ \\ cc+\frac{bbx}{a}\end{array}\right.$

Unde LQ. $\sqrt{cc+\frac{bbx}{a}}$

subtr. RG vel LK. c

reliq. KQ. $\sqrt{cc+\frac{bbx}{a}}, -c.$

Jam quia sectio MOQPN, parallela basi DHCIE, quæ Parabola est, etiam Parabola existit: erit rursus

Ex

Ex natura Parabolæ

$$\underset{LQ}{\sqrt{cc+\frac{bbx}{a}}} \ldots \underset{KQ}{\sqrt{cc+\frac{bbx}{a}}}, -c \ldots \underset{\square ML \text{ vel } LN}{\frac{ggcc}{bb}+\frac{ggx}{a}} \,|\, \text{ad } \underset{\square OK \text{ vel } Kp}{\frac{ggcc}{bb}+\frac{ggx}{a}-\frac{\frac{ggc^3}{bb}+\frac{cggx}{a}}{\sqrt{cc+\frac{bbx}{a}}}} \propto yy.$$

Hoc est, $yy \propto \frac{ggcc}{bb}+\frac{ggx}{a}-\sqrt{\frac{ac4g4+g4ccbbx}{ab4}}$. vel $\sqrt{\frac{ac4g4+g4ccbbx}{ab4}} \propto \frac{ggcc}{bb}+\frac{ggx}{a}-yy$.

Unde, quadratis singulis partibus, demptisque æqualibus, invenitur

$$\frac{g^4ccx}{abb}+\frac{g^4xx}{aa}-\frac{2ggcc}{bb}yy-\frac{2ggx}{a}yy+y^4 \propto 0$$

$$\text{Seu } y^4 \propto \frac{2ggx}{a}yy+\frac{2ggcc}{bb}yy-\frac{g^4}{aa}xx-\frac{g^4cc}{abb}x.$$

Cum igitur in hac æquatione quantitas incognita y ad quatuor dimensiones ascendat, nec ipsa æquatio ad aliam reduci possit, in qua y pauciores habeat dimensiones, & in qua nullum simul signum radicale uni vel pluribus terminis præfigatur, in quibus reperitur x: sequitur sectionem HOGPI esse lineam curvam secundi generis.

Ut verò constet curvam MOQPN esse Parabolam, quemadmodum hactenus fuit suppositum, considerandum est, quadratum lineæ cujusque ex L ductæ ad aliquod in ea punctum, facientis cū LM vel LN quemcunque angulum, eandem habere rationem ad quadratum lineæ ex A ad Parabolam DHCIE ductæ, eundem cum AD vel AE angulum facientis, quam BL habet ad BA. Proinde sumendo in adjuncta figura similes literas similes referre lineas, erit quadratū ex LM vel LN ad quadratum ex AD vel AE, ut quadratum ex LQ ad quadratum ex AC, & ut quadratum ex LT ad quadratum ex AS; supponendo lineas LT & AS ad libitum esse ductas, sicut dictum est.

Porrò ad veri inquisitionem, demissis ex T & S super LQ & AC

perpendicularibus TX & SV, voco AD vel AE a, LM vel LN b, AC c, & AV x, ac postea ita pergo.

□AD vel AE □LM vel LN □AC

aa ——— bb ——— cc | ad □LQ. $\frac{bbcc}{aa}$, unde LQ fit $\frac{bc}{a}$.

Ex natura Parabolæ

AC VC □AD vel AE

$c \ldots c-x \ldots aa$ | ad □VS. $\frac{aac-aax}{c}$

adde □AV. xx

□AD vel AE □LM vel LN

$aa \ldots bb \ldots$ □AS. $\overline{\frac{aac-aax}{c}+xx}$ | ad □LT. $\frac{bbc-bbx}{c}+\frac{bb}{aa}xx$ } subtr.

□AS □VS □LT

$\frac{aac-aax}{a}+xx \ldots \frac{aac-aax}{c} \ldots \frac{bbc-bbx}{c}+\frac{bb}{aa}xx$ | ad □XT. $\frac{bbc-bbx}{c}$

reliq. □LX. $\frac{bb}{aa}xx$

Ergo LX. $\frac{bx}{a}$, quæ subducta ex LQ ∞ $\frac{bc}{a}$, relinquit $\frac{bc-bx}{a}$, pro XQ.

Jam si curva MOQPN Parabola existat, erit ex natura Parabolæ LQ ∞ $\frac{bc}{a}$ ad XQ ∞ $\frac{bc-bx}{a}$, ut □LN ∞ bb ad □XT ∞ $\frac{bb-bbx}{c}$; adeoque si $\frac{bc}{a}$ multiplicetur per $\frac{bbc-bbx}{c}$ debet productum æquari producto ex $\frac{bc-bx}{a}$ in bb. Unde cum utrobique reperiatur $\frac{b^3c-b^3x}{a}$, manifestum est, curvam MOQPN esse Parabolam. Quemadmodum erat propositum.

Denique si hæc sectio HOGPI incedat perpendicularis per hujusmodi inventas curvas 2[di] generis perinde atque ipsa jam per Parabolas 1[mi] generis transire supposita fuit, exsurget inde alia rursus altioris generis curva linea. Per quas si denuo simili modo sectio transire fingatur, alia iterum superioris generis curva obtinebitur. Atque ita deinceps in infinitum, sicut superiori modo fit manifestum.

Cæ-

Cæterùm ut pateat, & aliâ ratione hujusmodi curvas per solidi sectionem generari posse, revocetur huc prima figura, in qua, ut ante, curvâ DHCIE existente Parabolâ, cujus axis AC, & ordinatim adplicatâ DAE, recta AB sit ad planum hujus Parabolæ DHCIE perpendicularis, & curva ABGQC semi-Parabola, cujus axis sit BA, & ordinatim adplicatæ AC, LQ, RG. Deinde concipiatur Parabolam hanc DHCIE sursum moveri, ita ut, dum ejus planum continuè plano basis est æquidistans, vertex ipsius C semper reperiatur in curva CQGB, & axis ejus AC in recta ALRB. Quibus ita positis, describetur hâc ratione figura semi-Conoïdis DMBNEC, cui si altera similis & æqualis figura adponatur, hæ binæ speciem Conoïdis referent, cujus ideo semissis est DMBNEC. In qua Conoïde si porrò, ut supra, sectio instituatur, qualis est HOGPI, exhibebit ipsa curvam lineam 2[di] generis.

Etenim factâ eâdem, quâ prius, præparatione, erit KQ, ut ante, $\propto \sqrt{cc + \frac{bbx}{a}}, - c$; adeoque $\square$ OK vel KP (propter Parabolam DHCIE) $\propto \frac{gg}{b}\sqrt{cc + \frac{bbx}{a}}, - \frac{ggc}{b} \propto yy$. Quæ æquatio, à signo radicali liberata, dat $y^4 + \frac{2ggc}{b}yy - \frac{g^4}{a}x \propto 0$. In hac verò cum incognita quantitas y ad quatuor dimensiones ascendat, nec ipsa, ut ante, reduci possit: sequitur lineam curvam HOGPI esse 2[di] generis.

Jam si, in locum describendi semi-Conoïdem DMBNEC per Parabolam DHCIE, ipsa per hanc inventam curvam HOGPI describatur, exurget inde alia altioris generis curva linea.

Ut patet, si in æquatione $y^4 + \frac{2ggc}{b}yy - \frac{g^4}{a}x \propto 0$ in locum x substituatur $\sqrt{cc + \frac{bbx}{a}}, - c$, atque ipsa deinde à signo radicali liberetur: habebitur enim $y^8 + \frac{4ggc}{b}y^6 \begin{matrix} + \frac{2g^4c}{a} \\ + \frac{4g^4cc}{bb} \end{matrix} y^4 + \frac{4g^6cc}{ab}yy - \frac{g^8bbx}{a^3} \propto 0$. In quâ cum incognita quantitas y ad 8 dimensiones assurgat, nec ipsa, ut supra, reduci possit: sequitur, curvam hanc HOGPI fore quarti generis.

Eodem modo, si, ad describendam hanc semi-Conoïdem DMBNEC,

DMBNEC, in locum præcedentis curvæ adhibeatur jam posterior hæc inventa curva, exhibebit sectio HOGPI aliam iterum altioris generis curvam, quæ octavi erit generis; atque hæc aliam rursus altiorem 16[ti] generis. Et sic ulterius in Geometrica Progressione in infinitum.

Porrò si in locum describendi hanc semi-Conoïdem per Parabolam ipsa describatur per motum semi-Circuli, aut semi-Ellipsis, aut etiam Hyperbolæ, cujus axis sit A C, & ordinatim adplicata D A E: erit similiter sectio HOGPI linea curva secundi generis. Quæ singulæ rursus in locum semi-Circuli, semi-Ellipsis, aut Hyperbolæ adhibitæ alias similiter curvas quarti generis producent; & hæ denuò alias 8[vi] generis, atque ita deinceps in infinitum, ut supra.

Similiterque si loco semi-Parabolæ ABGQC sumatur semi-Hyperbola, vel Ellipsis aut Circuli quadrans, sectio HOGPI pariter curvam lineam altioris generis exhibebit, & hæc rursus aliam altiorem, atque ità porrò in infinitum.

SECTIO XXIII.

Demonstratio primi modi constructionis Problematis 7[mi], Appendicis, Problematum Simplicium.

QUoniam constructionis hujus veritas in profundo magis latère videatur, quàm ut ipsa à quovis, ut quidem aliarum constructionum, in eadem Appendice traditarum, demonstrationes inveniri possit, quæque idcirco à nobis, ne aliis exercendi materiam præriperemus, consultò sunt omissæ: non è re fuerit in ejusdem constructionis demonstrationem sequentia in medium afferre.

Esto $AC \propto a$
CD vel $DE \propto b$, eritque $CE \propto 2b$
$CB \propto c$
$CQ \propto x$, eritque $AQ \propto a + x$
& $QK \propto y$.

AQ QK AC
$a+x$ — y — — a | ad CI seu RF $\frac{ay}{a+x}$. Unde SG erit $\frac{2ay}{a+x}$.

CB

CB CE SG | CE. $2b$

$c - 2b - \frac{2ay}{a+x}$ | ad SE. $\frac{4aby}{ca+cx}$ } ſubtr.

QK CQ SG

$y - x - \frac{2ay}{a+x}$ | ad CS. $\frac{2ax}{a+x} = $ CS. $\frac{2abc + 2bcx - 4aby}{ca+cx}$.

$$acx = abc + bcx - 2aby$$

$$2aby = abc + bcx - acx$$

fit $y = \frac{abc + bcx - acx}{2ab}$. Jam cum hæc æquatio id omne, quod puncti K vel O determinationem concernit, cujuſmodi illud hîc eſt inventum, includat, atque ipſa pari modo ad infinita alia determinanda (propter x vel y pro lubitu ſumendam) ſe

extendat, nec illa etiam ad xy aut xx vel yy seu altiùs assurgat: sequitur, lineam, in quam hujusmodi puncta infinita cadunt, esse rectam.

Hinc ut inveniatur, ubinam hæc ipsa rectam D B secet, ita procedatur:

CB CD TP | ad TD. TD

$c - b - y$ | $\frac{by}{c} \propto b - x$

$$by \propto bc - cx$$

$$y \propto \frac{bc - cx}{b} \propto \frac{abc + bcx - acx}{2ab} \propto y$$

$$2ab - 2ax \propto ab + bx - ax$$

$$ab \propto ax + bx$$

Et fit $x \propto \frac{ab}{a+b}$, longitudo lineæ CT. unde T D erit $\propto \frac{bb}{a+b}$. E quibus elicitur, cum CT ad TD, seu BP ad PD sit, ut $\frac{ab}{a+b}$ ad $\frac{bb}{a+b}$, seu ut a ad b, hoc est, ut AC ad CD, rectam CP ipsi AB esse parallelam. Quod erat demonstrandum.

Ostensis quo pacto linea DB secetur à recta, in quam cadunt inventa puncta K & O, haud difficile quoque erit inde invenire, quâ ratione lineæ CB, AB, EB, ut & AE, seu prout producta est, ab hac eadem recta secentur; id quod corollarii loco subjungere hîc visum fuit.

Quocirca ut innotescat, quo in loco linea CB ab hac recta intersecetur, fiat $x \propto 0$: eritque $2aby \propto abc$

& fit $y \propto \frac{1}{2}c$. Id quod monstrat, lineam C B à recta, in quam cadunt puncta K & O, bifariam dividi.

Deinde ad investigandum, ubinam linea AE, seu, prout producta est, ab hac eadem recta secetur, ponatur $y \propto 0$

eritque $0 \propto abc + bcx - acx$

seu $acx - bcx \propto abc$

& fit CW $\propto x \propto \frac{ab}{a-b}$. Hoc est, erit ut $a-b$ ad a, ita b ad x.

Ideoque assumptâ CY æquali CA, si ipsis D Y, Y C, & D C quæratur

ratur 4[ta] proportionalis C W: erit W punctum intersectionis quæsitum.

Porrò ut constet, quâ ratione linea AB à recta, in qua reperiuntur puncta inventa K & O, secetur: opùs tantùm erit considerare, postquam C P ostensa est ipsi A B parallela & C B in V bifariam divisa, triangulum C V P triangulo B V Z, per 26 primi Elem., esse æquale. hoc est, quòd præter æqualia latera C V, V B, & duos angulos V C P & P V C, ipsis V B Z & Z V B æquales, etiam latera P V & V Z, ut & CP & ZB æqualia sint. His enim æqualibus existentibus, erunt & in triangulis P V B & Z V C, propter laterum æqualitatem, angulos ad verticem V comprehendentium, qui ad bases anguli B P V & V Z C, per 4 Primi Elem., æquales; adeoque C Z ipsi D P B, per 27 Primi Elem., parallela. Ac proinde, per 2 sexti Elem., AZ ad ZB, sicut AC ad CD. E quibus exinde quoque inferre licet, AC ad CD esse, sicut A W ad C W: quandoquidem tam A C ad C D, quàm A W ad C W eandem rationem habet, quam AZ ad ZB vel CP.

Denique, lineæ EB & rectæ, in quam cadunt puncta inventa K & O, intersectio eodem investigatur pacto, quo rectæ hujus & lineæ DB intersectio supra fuit inventa, quemadmodum hîc videre licet.

CB CE YX

$c - 2b - y$ | ad Y E. $\frac{2by}{c} \propto 2b - x$

$$2by \propto {}^{2}bc - cx$$

$$y \propto \frac{{}^{2}bc - cx}{{}^{2}b} \propto \frac{abc + bcx - acx}{2ab} \propto y$$

$$2ab - ax \propto ab + bx - ax$$

$$ab \propto bx$$

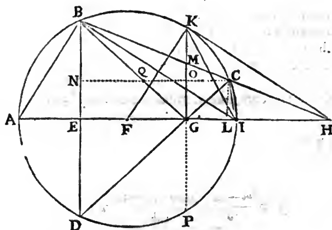
fit CY $\propto x \propto a$. Id quod ostendit, sumptâ CY, ut ante, æquali C A, si ex Y agatur YX ipsi C B parallela, hoc est, ut E B secetur in X, ita ut EX ad XB sit, sicut E Y ad Y C, punctum inventum X fore quæsitum.

SECTIO XXIV.

Ratio disquirendi proprietates circa objecta Mathematica.

CUm ad contemplationem naturæ eorum, quæ in his scientiis proponi queunt, non modò jucundum sed etiam utile sit intelligere, quâ ratione plures proprietates detegantur: visum fuit hoc loco exponere modum, quo illas in circulo (ut hinc de aliis objectis judicium fiat) indagavimus atque invenimus, sicut videre est in sequenti Porismate.

PORISMA.



Sit AE ∝ *a*
EG ∝ *b*
GI ∝ *c*
DE ∝ EB ∝ *d*
DG ∝ GB ∝ *e*
GC ∝ *f*
BM ∝ *g*
MC ∝ *h*
BH ∝ *i*
CH ∝ *k*
AH ∝ *l*
IH ∝ *m*
FG ∝ *n*
GM ∝ *p*
PG ∝ GK ∝ *q*
KH ∝ *r*

ABKCIPD *est circulus*
AH *est recta linea, ducta per centrum* F
BD *est perpendicularis ad* AH
DC *est linea ad libitum ducta, secans diametrum* AI *in* G
BCH *est recta linea, ducta ex* B *per* C, *donec occurrat ipsi* AH *in* H
GK *est linea ducta ex* G *ad angulos rectos super* AH
AB, BG, BI, IC, IK, *&* KH *sunt rectæ lineæ*
Investigare quænam circa hæc contingant.

Mult.

Mult. AE. a Mult. DE. d
per EI. $\overline{b+c}$ per EB. $\overline{d}$

▭ AEI. $\overline{ab+ac} \propto$ ▭ DEB. $\overline{dd}$. *per* 35. 3 *Elem.*

$\overline{ac \propto dd - ab}$

Mult. AG. $a+b$ Mult. DG. e
per GI. c per GC. f

▭ AGI. $\overline{ac+bc} \propto$ ▭ DGC. $\overline{ef}$, & fit $\frac{ac+bc}{f} \propto e$, ac $\frac{ackk+bckk}{f} \propto ekk$.

p 35. 3 *Elem.* $\overline{ac \propto ef - bc \propto dd - ab \propto ac}$

$\overline{ef + ab \propto dd + bc}$

Hoc est,

▭ DGC + ▭ AEG est $\propto$ ▭ DEB + ▭ EGI.

Corollarium.

Hinc si supponatur AE $\propto$ GI, hoc est, $a \propto c$, erit $ef+bc \propto dd+bc$; adeoque $ef \propto dd$. Hoc est, ▭ DGC $\propto$ ▭ DEB.

Fiat propter similia $\triangle$[la] EBH, LCH.
ut BH ad BE, ita CH ad CL
i —— d —— k | $\frac{dk}{i}$

Rursus, quia $\triangle$ DEG, vel ipsi æquale
BEG, est simile $\triangle$[lo] CLG: erit
ut DG vel GB ad DE vel EB, ita GC ad CL
e —— d —— f | $\frac{dk}{i}$

BH HC DG vel GB GC
Et fit $\frac{dk}{i} \propto f$. Hoc est, erit i ad k, sicut e ad f.

GB BH GC CH
vel $\frac{if}{e} \propto k$. Hoc est, erit e ad i, sicut f ad k.

Hinc resultat, cum BG ad GC etiam sit, ut EG ad GL, id est, ut NO ad OC, aut ut BM ad MC: esse quoque BH ad HC, sicut BM ad MC; vel etiam MB ad BH, sicut MC ad CH. Unde simul emanat Prop. 3[tia] libr. 6 Elem. videlicet, BG esse ad GC, sicut BM ad MC, quando angulus BGC per rectam GK bifariam dividitur: quemadmodum hic patet, auferendo à rectis angulis AGK & IGK æquales angulos EGB & LGC.

à BH. i ad BM. g
subtr. CH. k add. MC. b

BC. $i-k \,\infty\,$ BC. $g+b$

dele k $i-\frac{if}{e} \,\infty\, g+b$

GB BH BG-GC BC

$ei-if \,\infty\, eg+eb$. Hoc est, erit e ad i, sicut $e-f$ ad $g+b$.

$i \,\infty\, \frac{eg+eb}{e-f}$

GC CH BG-GC BC

Vel etiam, quia e est ad i, sicut f ad k: erit item f ad k, sicut e-f ad $g+b$.
Similiter quia ex similitudine △rum GOC, DNC est
ut GC ad GO vel CL, ita DC ad DN

f —— $\frac{dk}{i}$ —— $e+f \mid d+\frac{dk}{i}$

Erit item GC ad CH, sicut BG+GC ad BH+HC

f —— k —— $e+f$ | $i+k$.

Hinc patet rationes GB ad BH, GC ad CH, BG−GC ad BC, & BG+GC ad BH+HC omnes inter se easdem esse.

Mult. BI. i Mult. AH. l
per HC. k per HI. m

▭ BHC. $ik \,\infty\,$ ▭ AHI. lm. *per 36. 3 Elem.*

$i \,\infty\, \frac{lm}{k}$

f f

$fi \,\infty\, \frac{flm}{k} \,\infty\, ek \,\infty\, fi$

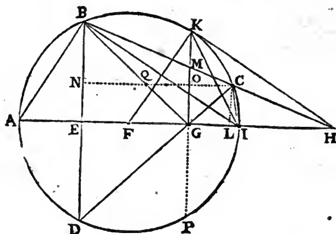
$ekk \,\infty\, \frac{ackk+bckk}{f} \,\infty\, flm \,\infty\, ekk$. □GC □CH ▭AGI ▭AHI ▭BHC

$ackk+bckk \,\infty\, fflm$. Hoc est, erit ff ad kk, sicut $ac+bc$ ad lm vel ik.

□GC ▭AGI vel □GK CH HB

vel ff ad $ac+bc$ vel qq, sicut k ad i.

Hinc liquet, cum supra quoque inventum sit GB esse ad BH, sicut GC ad CH: fore similiter □GB ad □BH, sicut ▭AGI ad ▭AHI.



$ac+bc$ ∞ ef

$\frac{ac+bc}{e}$ ∞ f

i i

fi ∞ ek ∞ $\frac{aci+bci}{e}$ ∞ fi

▭AGI vel □GK □GB CH HB

eek ∞ $aci+bci$. Hoc eſt, erit $ac+bc$ vel qq ad ee, ſicut k ad i.

Hinc patet, cum □GC ad □GK ſit, ut CH ad HB; itemque □GK ad □GB, ut CH ad HB: quòd tria quadrata ex GC, GK, & GB proportionalia ſint; adeoque tres rectæ GC, GK, & GB.

▭BGC □GK ▭AGI AG GB

Unde fit ut ef ſit ∞ qq, aut etiam $ac+bc$, hoc eſt, ut $a+b$ ſit ad e, ſi-

GC GI

cut f ad c.

E quibus inde per 6.6 Elem. ſequitur: △ ABG ſimile eſſe △lo GCI.

Similiter liquet, cum BM ad MC inventa ſit, ut BH ad HC, eſſe quoque BM ad MC, ſicut □BG ad □GK, vel □GK ad □GC.

Mult PM. $q+p$ Mult. BM. g

per MK. $q-p$ per MC. h

▭PMK. $qq-pp$ ∞ ▭BMC. gh. *per* 35.3 *Elem.*

dele qq qq ∞ $pp+gh$. Hoc eſt, □GK eſt ∞ □GM + ▭BMC.

ef ∞ $pp+gh$. Hoc eſt, ▭BGC eſt ∞ □GM + ▭BMC.

Sup-

Supponatur $k \infty m$, eritque $f \infty c$.

$ackk + bckk \infty fflm$

$acmm + bcmm \infty fflm$

$acm + bcm \infty ffl$

$acm + bcm \infty ccl$

AH HI AG GI GA AH

$am + bm \infty cl$. Hoc est, erit l ad m, sicut $a+b$ ad c; vel etiam $a+b$ ad l,

GI IH

$$a+b \infty \frac{cl}{m}$$

sicut c ad m.

Add. { □GK. qq
{ □CH. $cc + 2cm + mm$ □KH

$qq + cc + 2cm + mm \infty rr$. per 47. 1 Elem.

dele qq. $ac + bc, + cc + 2cm + mm \infty rr$.

dele $ac + bc + cc + cm$. $cl, + cm + mm \infty rr$

dele cl. $am + bm, + cm + mm \infty rr$

vel $ml \infty rr$

AE+EG+GI+IH AH

$a + b + c + m \infty l$
c c

$ac + bc + cc + cm \infty cl$

$a + b + c + m \infty l$
m m

$am + bm + cm + mm \infty ml$

Hoc est,

▭ AHI est ∞ □ KH: Unde sequitur lineam KH, per 37. 3 Elem., tangere circulum in K; hoc est, angulum FKH esse rectum.

Ubi notandum, quòd, sicut ▭[1a] A G I & B G C æqualia sunt ac singula æqualia ex G K, in quo desinunt, perinde etiam ▭[1a] AHI & BHC æqualia sint ac singula æqualia quadrato ex K H, in quo similitèr hæc ipsa desinant.

FG GK GH

℞ Cor. 8. 6. Elem. n —— q —— $c+m$, sunt 3 proportionales.

Et fit $nc + nm \infty qq$. ℞ 16. 6 Elem.

HG GA IG GF

dele qq. $nc + nm \infty ac + bc$. Hoc est, erit $c+m$ ad $a+b$, sicut c ad n.

$nc \infty ac + bc - nm$.

$2nc \infty 2ac + {}^2bc - {}^2nm$

$$i \infty \frac{lm}{k} \infty \frac{eg+eh}{e-f} \infty i$$

Hoc est,

GB-GC seu QB CH ▭GBC ▭AHI ▭BAC □KH

erit $e-f$ ... ad ...... k, sicut $eg+eh$ ad lm vel ik vel rr.

Add.

Add. { □FG. nn
  □GK. qq □FK vel FI

$nn + qq \infty nn + 2nc + cc$

dele qq & $2nc$. $ac + bc \infty 2ac + 2bc - 2nm, + cc$

$ac + bc \infty 2mn - cc$

$\frac{ac + bc + cc}{2} \infty mn$. Hoc est, erit c ad m, ficut n ad $\frac{a+b+c}{2}$.
(GI IH GF FI)

vel m ad $\frac{a+b+c}{2}$, ficut c ad n.
(HI IF IG GF)

Hinc cum fupra quoque HG ad GA fit, ficut IG ad GF: erit fimiliter HG ad GA, ficut HI ad IF.

$ackk + bckk \infty fflm$

dele $ac + bc$, & lm. $qqkk \infty ffrr$

$qk \infty fr$. Hoc eft, erit q ad r, ficut f ad k.
(GK KH GC CH)

Quocirca, cum fupra etiam fit GB ad BH, ficut GC ad CH, erit pariter GB ad BH, ficut GK ad KH.

$qqkk \infty ffrr$

dele qq. $efkk \infty ffrr$
(BG GC □KH □CH)

$ekk \infty frr$. Hoc eft, erit e ad f, ficut rr ad kk. Quoniam autem BG ad GC fupra quoque fuit inventa ut BM ad MC, vel etiam ut BH ad CH: erit pariter BM ad MC, vel BH ad HC, ficut □KH ad □CH.

$ackk + bckk \infty fflm$

dele $a + b$. $\frac{cl, ckk}{m} \infty fflm$

$cckk \infty ffmm$
(GI IH GE CH)

$ck \infty fm$. Hoc eft, erit c ad m, ficut f ad k.

Hinc cum fupra quoque fit GB ad BH, ut & GK ad KH, ficut GC ad CH; & GC ad CH, nec non GF ad FI, ficut GI ad IH: erunt rationes GF ad FI, GC ad CH, GB ad BH, GK ad KH, & GI ad IH omnes inter fe eædem. Ex quibus porrò, per 3. 6 Elem., fequitur, rectas IB, IK, & IC fecare angulos GBH, GKH, & GCH bifariam.

Atque ita porrò, comparando inter fe quantitates, fic ut aliæ atque aliæ femper obtineantur æquationes, licebit circa ea, quæ propofita funt, invenire proprietates innumeras.

SECTIO XXV.

Specimina de Algebra præstantia.

CUm in Algebra ad modum solutionis indagandum alicujus Problematis, imponendo nomina quantitatibus tum datis, tum quæsitis, difficultas tota eò sit reducenda, ut inveniatur Æquatio, atque illud ipsum ad hoc tanquam jam factum supponatur: facilè constat, quòd, dum illa omnes determinationes sive conditiones includit, quæcunque circa Æquationis constructionem aut solutionem consideranda veniunt, etiam ad modum, quo Problema resolvendum sit, pertineant. Quocirca, cum infinita Problemata sint, quæ licèt toto genere diversa videantur, ad eandem tamen Æquationem recurrant, hacque ratione pro eodem Problemate haberi possint: ita quoque contingit, ut unus idemque constructionis aut solutionis modus omnibus illis simul conveniat. Id quod sequentibus Problematibus ceu exemplis patefacere non injucundum duximus.

Probl. 1. Trianguli rectanguli datâ base $\infty\ a$, & aggregato hypotenusæ & perpendicularis $\infty\ b$: invenire hypotenusam $\infty\ x$.

Probl. 2. Trianguli rectanguli datâ base $\infty\ a$, & differentiâ inter hypotenusam & perpendicularem $\infty\ b$: invenire hypotenusam $\infty\ x$.

Probl. 3. E termino datæ rectæ $\infty\ a$ erectâ super ipsam perpendiculari indefinitâ, invenire longitudinem lineæ rectæ x, ex altero termino ad hanc ducendæ, quæ sit æqualis perpendiculari abscissæ unà cum ipsius datæ a segmento præfinito contermino b.

Probl. 4. Datam rectam lineam $\infty\ b$ producere, ita ut quadratum productæ x unà cum quadrato datæ rectæ a sit æquale quadrato totius lineæ $b+x$.

Probl. 5. Datam rectam lineam $\infty\ b$ secare in duo segmenta, ita ut quadratum minoris segmenti x unà cum quadrato datæ rectæ a sit æquale quadrato majoris segmenti $b-x$.

Probl. 6. Datam rectam lineam $\infty\ b$ secare in duo segmenta x & $b-x$, ita ut differentia quadratorum ex ipsis fit æqualis dato spacio aa. Quæritur majus segmentum $\infty\ x$.

Probl. 7. Invenire numerum x, à cujus quadrato xx si auferatur datus quadratus aa, relinquatur quadratus $xx-2bx+bb$. Fit $x\ \infty\ \frac{bb+aa}{2b}$.

Igi-

Igitur assumendo ad arbitrium alium atque alium numerum pro b, inveniri hinc poterunt infinita triangula rectangula, eandem, datamque altitudinem habentia, quorum latera exprimantur per numeros rationales. Etenim si altitudo illa, sive perpendicularis data, fuerit a, hypotenusa erit $\frac{bb+aa}{2b}$. *Vnde basis fiet* $\frac{bb-aa}{2b}$.

Vbi porrò liquet, si quis tot triangula rectangula invenire velit quot libuerit, quorum singula latera exprimantur per numeros rationales integros, multiplicandum esse tantùm ubique per denominatorem communem 2b, & fiet 2ab pro perpendiculari, bb+aa pro hypotenusa, & bb−aa pro basi.

Hinc si a sit 1, & b sit 2, perpendicularis erit 4, hypotenusa 5, & basis 3. At si a sumatur ∞ 3, & b ∞ 2, perpendicularis erit 12, hypotenusa 13, & basis 5. Et sic de aliis in infinitum.

Idem quoque obtinere licet beneficio 1mi, 2di, 3tii, 4ti, aut 5ti Problematis, atque etiam beneficio 6ti, si datum spacium fuerit quadratum.

Probl. 8. Datis duobus numeris *b* & *a*, invenire tertium *x*, minorem majore *b*, majorem autem minori *a*; ita ut, si ipsi minor addatur atque etiam ab eo auferatur, summa per reliquum multiplicata tantundem producat ac si excessus, quo major quæsitum superat, in se multiplicetur.

Probl. 9. In sympofio fuerunt *x* pueri, *b* ∞ 8 mulieres, & *a* ∞ 12 viri. Quorum quilibet virorum tot expendit stufros, quot ipsi sunt; similiterque quævis mulier tot stufros, quos sunt mulieres. Comperitur autem, si pueri singuli tot stufros solvissent, quot existunt mulieres, quòd numerus stufrorum, quos soluturi fuissent, tantum excessisset mulierum stufros, quantum idem numerus minor est numero stufrorum, à viris expensorum. Quæritur quot pueri adfuerint?

Probl. 10. Datæ rectæ lineæ $b+a$, sectæ in duo inæqualia segmenta *a* & *b*, majus segmentum *b* rursus secare in duo alia segmenta *x* & $b-x$; ita ut rectangulum contentum sub $x+a$, aggregato minoris segmenti *a* & intermedii *x*, & $x-a$, excessu quo idem medium segmentum *x* superat minus *a*, sit æquale quadrato reliqui segmenti $b-x$.

Probl. 11. Datam rectam lineam $a+b$, sectam in 2 partes *a* & *b*, producere ad alterutram partem rectâ *x*; ita ut quadrata trium partium totius simul sumpta æquentur rectangulo contento sub producta *x*, & compositâ ex producta & duplo conterminæ partis.

Probl. 12. Datam rectam lineam ∝ b sectam in 3 partes proportionales, ita ut aggregatum quadratorum ex illis sit æquale dato spacio aa: invenire summam extremarum partium ∝ x.

Probl. 13. Rectanguli datâ differentia laterum ∝ b, & differentiâ quadratorum ex ipsis ∝ aa: invenire latus majus ∝ x.

Probl. 14. In triangulo æquicruri obtusangulo, cujus utrumque crus datur ∝ b, & latus 3[tium] ∝ a, demissâ ex vertice super alterutro crure producto perpendiculari: quæritur x, aggregatum majoris segmenti & semissis basis?

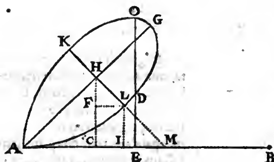
Probl. 15. Similiter: In triangulo æquicrure acutangulo, cujus utrumque crus datur ∝ b, & 3[tium] latus ∝ a, demissâ ex vertice super crus alterutrum perpendiculari: quæritur x, aggregatum minoris segmenti ex semissis basis?

In his omnibus Problematîs cum x fiat $\propto \frac{bb+aa}{2b}$, idemque similiter in infinitis aliis contingat: manifestum est ad illa simul omnia solvenda, & quantitatem x inveniendam, nil aliud faciendum esse quàm addere quadrata datarum quantitatum b & a, & earum summam dividere per duplum ipsius b. Adeò ut hinc constet Algebram, cum æquationis beneficio infinita Problemata pro uno habeat eaque simul resolvat, & ex datis notisvé quantitatibus quæsitas ignotasvé cujuslibet generis doceat invenire, haud immeritò veram Logicam ac inveniendi artem, quâ mens in cognitionem rerum Mathematicarum & inde dependentium perducatur, existimandam esse: ac proinde eam non sine ratione Artem Magnam & divinam Scientiam ab aliis fuisse appellatam.

Patet itaque ex allatis Algebræ præstantia ac utilitas. Verùm ut utrumque cuivis magis adhuc obvium sit, vellem Lector consideret ea, quæ hoc tractatu à me exposita sunt, ut & Problemata tam diversa, quæ sparsim per totum librum soluta reperiantur, quorumque solutiones, paucis exceptis, per Algebram sunt inventæ; sicut etiam illa, quæ à Vieta ac præsertim Cartesio in sua Geometria, & aliis denique præcellentibus Mathematicis ejusdem beneficio præstita sunt ac perfecta. Vix enim futurum confido, ut, qui eximiæ hujus scientiæ infallibili fretus certitudine sedulus hæc mecum perpenderit, de veritate mearum conclusionum in hac Sectione ullatenus sit dubitaturus. Verùm tamen ut rei colophonem addam, sequens Problema in medium afferre lubet unà cum ejusdem constructione, qualem

lem eam subtilissimus ac præclarè doctus vir Juvenis D. Johannes Huddenius, Amst. Batavus, atque amicus meus integerimus, haud ita pridem adinvenit.

PROBLEMA.



Est curva linea, cujus hæc est proprietas, ut, assumpto ubicunque puncto E in recta AB, si ex E ad curvam ducatur perpendicularis EO vel ED, voceturque AE ∞ x, & EO vel ED ∞ y, & data sit recta linea AB ∞ n, habeatur $xxx + yyy$ ∞ xyn: Oportet autem ducere KL, quæ curvæ maximam latitudinem designet.

Constructio.

Duco AG, ita ut angulus GAB sit ∞ 45 gr., tum assumptâ AH ∞ $\sqrt{\frac{1}{6}nn}$: erit KHL, secans AG ad rectos angulos in H, maxima latitudo quæsita.

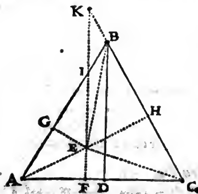
Quomodo autem Problematis hujus constructio præter Algebram inveniri possit, non video. Cum enim curva hæc ex nullo Theoremate prædemonstrato, quod eam concernit, definiri aut describi hîc intelligatur, quippe illa omnia huc spectantia adhuc ignorantur; sed ex sola æquatione $x^3 + y^3$ ∞ xyn determinetur & ab hac dependeat: manifestum est, ea, quæ circa hanc curvam construenda aut cognoscenda veniunt, ex hac ipsa æquatione esse deducenda, adeoque eam illorum omnium esse quasi fontem seu pro primo Theoremate habendam.

Cæterùm ut pateat quo pacto ex præsupposito aliquo Theoremate aut etiam ex sola subjecti definitione, infinita alia Theoremata per Algebram eliciantur: placet hîc ulteriùs ea, quæ circa hanc rem ingeniosissimus noster Huddenius olim mihi communicavit, lubenti animo impertire.

Cùm verò illa ad quasvis quæstiones, sive determinatas,

 sive

five indeterminatas, se extendant; atque etiam in iisdem perinde sit sive una, sive duæ, sive plures conditiones desint: suffecerit, ut hæc ipsa per exemplum explicemus, utendo ad hoc triangulo æquilatero ABC, in quo ad determinationem puncti E, ad tres ex eo perpendiculares EF, EG, & EH ad opposita latera demittendas, quæ simul ipsi perpendiculari BD æquales sint, conditiones duæ deficiunt. Quemadmodum in Commentariis super Cartesii Geometriam ante explicui.



Ut igitur infinita Theoremata, quæ ad æquilaterum triangulum pertinent, inveniam, fingo id quod proponitur esse Problema, supponendo ad solutionem indagandam rem tanquam jam factam. ac proinde, productâ FE donec secet AB in I, & cum CB productâ conveniat in K, junctisque AE, EB, & EC, facio AD vel DC ∞ a (eritque AB, BC, vel AC ∞ $2a$), DB ∞ b, AF ∞ x, (eritque FC ∞ $2a-x$) FE ∞ y, EG ∞ v, & EH ∞ z.

Quibus ita positis, fingendo, ad quæsiti inventionem, aliquam ex hisce lineis esse investigandam, ut, verbi gratiâ DB, quam vocavi b: quæro quot modis diversis ipsa enunciari possit, hoc est, quot æquationes differentes, quæ singulæ valorem ejus exprimant, reperiri contingat, quippe quælibet ex illis peculiare Theorema exhibet.

Quocirca ad inveniendam 1^{mam} æquationem, cum tria triangula AEC, AEB, & BEC ejusdem basis existant, atque simul sumpta toti triangulo ABC sint æqualia: erit

$$ay+av+az \infty ab,$$

adeoque $y+v+z \infty b$. Quod est primum Theorema.

Reliqua sequens calculus indicabit.

AD

AD DB AF

a —— b —— x | ad FI. $\frac{bx}{a}$

subtr. FE. y

AB AD EG EG

$2a$ —— a —— EI. $\frac{bx}{a} - y$ | ad $\frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y \propto v$

$bx - ay \propto 2av$

$bx \propto ay + 2av$

2dum Theor. $b \propto \frac{ay + 2av}{x}$.

DC DB FC

a —— b —— $2a - x$ | ad FK. $\frac{2ab - bx}{a}$

subtr. FE. y

BC CD EH EH

$2a$ —— a —— EK. $\frac{2ab - bx}{a} - y$ | ad $\frac{2ab - bx}{2a} - \frac{1}{2}y \propto z$

$2ab - bx - ay \propto 2az$

$2ab - bx \propto ay + 2az$

3tium Theor. $b \propto \frac{ay + 2az}{2a - x}$. Nota.

Ex FK. $\frac{2ab - bx}{a}$

subtr. FI. $\frac{bx}{a}$

rel. IK. $\frac{2ab - 2bx}{a}$ $\propto$ rel. IK. $2z - 2v$

Ex EK. $2z$

subtr. EI. $2v$

$2ab - 2bx \propto 2az - 2av$

$ab - bx \propto az - av$

4tum Theor. $b \propto \frac{az - av}{a - x}$.

Hoc Theorema à 2do in eo tantùm differt, quòd quantitas b hîc inveniatur ex $a, x, y,$ & z, & in 2do ex $a, x, v,$ & y. Aliàs autem ratio quærendi b utrobique eadem est.

EI EG EK EH EH

$\frac{bx}{a} - y$ .... v .... $\frac{2ab - bx}{a} - y$ | ad $\frac{2abv - bvx - avy}{bx - ay} \propto z$

$2abv - bvx - avy \propto bxz - ayz$

$2abv - bvx - bxz \propto avy - ayz$

5tum Theor. $b \propto \frac{avy - ayz}{2av - vx - xz}$.

1. Apparet itaque DB, quam vocavi b, quintupliciter posse enunciari. Nam præter terminorum inæqualitatem, eorumque diversimodam

dam connexionem primus modus caret terminis a & x, 2^{dus} z, 3^{tius} v, 4^{tus} y, & 5^{tus} nullo caret. Atque ideo 5 habemus Theoremata distincta, quorum 2^{dum}, 3^{tium}, & 4^{tum} ejusdem cum 1^{mo} sunt naturæ; hoc est, Loci ad Superficiem; at verò 5^{tum} Loci ad Solidum.

II. Inventis autem quinque hisce Theorematîs, poterunt exinde diversis modis infinita alia inveniri. 1^{mo}. Per additionem & divisionem, utpote dividendo summam 1^{mi} & 2^{di}, 1^{mi} & 3^{tii}, 1^{mi} & 4^{ti}, 1^{mi} & 5^{ti}, 2^{di} & 3^{tii}, 2^{di} & 4^{ti}, &c. per 2. erit enim quotiens ∞ b. Similiter addendo tres, quatuor, aut quinque, &c., & summam dividendo per 3, 4, aut 5, &c. 2^{do}. Sicut autem jam infinita ope additionis & divisionis invenimus, ita & infinita beneficio multiplicationis & extractionis investigare licet. Etenim si duæ, tres, aut quatuor, &c. diversæ istarum summæ in se invicem ducantur, atque ex producto extrahatur $\sqrt{}$Q. $\sqrt{}$C, aut $\sqrt{}$QQ, &c: erit similiter radix inventa ipsi b æqualis. 3^{tio}. Per multiplicationem & divisionem, quippe multiplicando duas, tres, aut quatuor, &c. diversas, & productum dividendo per 1, 2, aut 3, &c. alias; sive ad id una sola sumatur, eaque in se ducatur quadratè, aut cubicè, &c.; sive ad hoc ipsum sumantur 2, aut 3, &c. diversæ, divisioque per earum productum instituatur: quoniam semper quotiens ipsi b æqualis est. 4^{to}. Per additionem & subtractionem, quemadmodum per se manifestum est. 5^{to}. Ex quibus infinitis summis demum ope dictæ additionis, subtractionis, multiplicationis, divisionis & extractionis rursus infinitæ aliæ pro b inveniri poterunt.

III. Hinc sicut infinitos modos exprimendi valorem lineæ DB seu b invenimus, ita & infinitos alios quærere licet linearum AD vel DC, AF, FE, EG, EH, quas vocavimus a, x, y, v, z: Sumendo nempe quamlibet summam pro b inventam, in quâ a, x, y, v, vel z, quarum valores investigare volumus, reperitur; ac deinde ex illa quærendo valores ipsarum a, (x, y, v, & z). Quemadmodum hîc liquet.

1.

$$\frac{ay + 2av}{x} \infty b$$

$$ay + {}^2av \infty bx$$

$$\text{Ergo } a \infty \frac{bx}{y + {}^2v}$$

2.

$$b \infty \frac{ay + {}^2az}{{}^2a - x}$$

$${}^2ab - bx \infty ay + {}^2az$$

$${}^2ab - {}^2az - ay \infty bx$$

$$\text{Ergo } a \infty \frac{bx}{{}^2b - {}^2z - y}$$

3.

$$b \infty \frac{az - av}{a - x}$$

$$ab - bx \infty az - av$$

$$ab + av - az \infty bx$$

$$\text{Ergo } a \infty \frac{bx}{b + v - z}$$

Atque ita de aliis.

IV.

IV. Jam ſicut omnia hæc Theoremata invenimus, quatenus conſideravimus lineas in triangulo hîc ductas; ita quoque idem obtineri poteſt circa alias; adeò ut ſolummodò aliam atque aliam linearum poſitionem in eo excogitare opùs ſit, ad infinitis modis, ut ſupra, alia infinita Theoremata, quæ à ſe invicem diſtincta ſint, omniaque æquilaterum triangulum concernant, invenienda. Id quod de his ſimiliter circa alias figuras cum rectilineas tum curvilineas intelligi debet, & ſe ad Circuli, Parabolæ, Hyperbolæ, Ellipſis, aliarumque ſuperiorum generum curvarum linearum ut & ſolidorum inde ortorum proprietates inveſtigandas extendit, neque ſolo æquilatero triangulo hoc limitatur.

Liquet itaque quâ ratione infinitis modis ex præſuppoſito aliquo Theoremate aut etiam ſolâ figuræ vel ſubjecti definitione, quâ ipſius natura omnino determinetur, infinita deduci poſſint Theoremata, quæ omnia primo intuitu aut ex definitione illa, aut unum ex alio, niſi paucis fortè exceptis, non eliciantur; tam parùm, quin imò minùs, quàm ex natura circuli Theoremata omnia, quæ in 3^{tio} & 4to libro Elementorum continentur, deducta fuerint. Quod autem reverâ Theoremata exiſtant, de eo quidem dubitari nequit, cum Theorema nil niſi Propoſitio, quæ aliquam ſubjecti proprietatem continet ac declarat, cenſeri debeat.

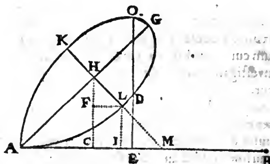
Ad hæc ſi Geometriæ præſtantiam, in demonſtrandis multis pulcherrimis ac admirabilibus Theorematis, (hoc eſt, quæ (meo quidem judicio) primâ fronte è ſubjecti natura haud ita facilè deducantur, ſed per complures conſequentias ſecundùm artis regulas ex eâ elici debeant) conſiſtere, à quovis fermè hactenus judicatum eſſe, perpendatur: ſatis obvia cuivis erit Algebræ præſtantiâ ac utilitas, quippe quæ levi negotio innumera nobis admirabiliorum Theorematum ſubminiſtrare poteſt volumina. Unde facilè judicare licet, quanta laus Illuſtri Viro Renato des Cartes meritò conferenda ſit, è cujus Methodo hæc quaſi ultrò emanant, & his longè majora maximeque utilia ad nos redundant.

SECTIO XXVI.

Inveſtigatio Conſtructionis, præcedenti ſectione traditæ.

QUandoquidem cōſtructio Problematis, præcedenti Sectione expoſita, una ex ſimpliciſſimis exiſtit, quę circa id inveniri queunt:

non ingratum fore existimavi, si modum eandem investigandi, qualem eum acutissimus Vir-Juvenis D. Johannes Huddenius, Gerh. Fil., omnium artificiosissimè excogitavit, sequenti calculo exhiberem.



Angulum G A B esse 45 graduum, convincitur ex æquatione $y^3 - nyx + x^3 \infty 0$, in qua y & x eodem modo reperiuntur. Unde porrò concluditur, suppositis AI ∞x, IL ∞y, & AM ∞z, quòd IM sit ∞y, & AM $\infty z \infty x + y$, id est, $z - x \infty y$, quæ 2da est æquatio; ac deinde, quòd AC vel CH sit $\infty \frac{1}{2} z$, adeoque FH $\infty \frac{1}{2} z - y \infty s$, omnium intellige hujusmodi linearum maximæ. Quæ 3tia est æquatio.

Quibus ita existentibus, si in 1ma & 3tia, nimirum, $y^3 \infty nyx - x^3$ & $\frac{1}{2} z - y \infty s$, in locum y substituatur $z - x$, habebitur $z^3 - 3zzx + 3zxx - x^3 \infty nzx - nxx - x^3$ vel $z^3 - 3zzx + 3zxx \infty nzx - nxx$, & $x \infty s + \frac{1}{2} z$. Cæterà calculus manifestabit.

$$z^3 - 3zzx + 3zxx \infty nzx - nxx$$

dele x. $\frac{1}{4} z^3 + 3zss \infty \frac{2}{4} nzz - nss$

Mult. per $3 \quad 1 \quad 2$ — per Huddenii methodum de Maximis & Minimis.

$$\frac{3}{4} zz + 3ss \infty \frac{1}{2} nz$$

dele s. $3zz + 12ss \infty 2nz$

$$6zz + 12xx - 12zx \infty 2nz$$

$$12xx \infty 12zx + 2nz - 6zz$$

$$xx \infty zx + \frac{1}{6} nz - \frac{1}{2} zz$$

$$z^3 - 3zzx + 3zxx \infty nzx - nxx$$

$$3zxx + nxx \infty nzx + 3zzx - z^3$$

$$xx \infty zx - \frac{z^3}{3z + n}$$

$zx-$

$$zx - \frac{z^3}{3zz+n} = zx + \tfrac{1}{6}nz - \tfrac{1}{2}zz$$

$$\tfrac{1}{2}zz = \frac{z^3}{3zz+n} + \tfrac{1}{6}nz$$

$$3zz = \frac{6z^3}{3zz+n} + nz$$

$$9z^3 + 3nzz = 6z^3 + 3nzz + nnz$$

$$3zz = nn$$

fit $z = \sqrt{\tfrac{1}{3}nn}$

Ergo $AH = \sqrt{\tfrac{1}{6}nn}$.

SECTIO XXVII.

De investigatione angulorum trianguli plani, cujus latera sunt nota, absque demissione perpendicularis.

Quò ad planorum triangulorum dimensionem expeditiorem haud quidquam deficiat, lubet hoc loco in medium afferre quatuor Theoremata seu regulas, quibus ex cognitis lateribus trianguli cujuscunque plani, absque ejusdem in rectangula triangula divisione, quilibet angulus quadrupliciter investigari possit: qualia illa ab eorum inventore D. Guilielmo Pursero, Mathematum peritissimo, Dublinii quondam addiscere licuit. Sunt autem omnia Logarithmorum usui accommodata, ut, vitato multiplicationis, divisionis, atque extractionis tædio, operatio omnis per additionem, subtractionem, & bipartitionem procederet.

THEOREMA I.

Ut rectangulum sub duobus lateribus, angulum quæsitum comprehendentibus, ad rectangulum sub semisse omnium laterum & dimidiâ differentiâ, quâ illa duo latera basin superant; ita quadratum radii, ad quadratum sinus semissis anguli, quæsito adjacentis.

THEOREMA II.

Ut rectangulum sub duobus lateribus, angulum quæsitum comprehendentibus, ad rectangulum sub dimidiâ differentiâ, quâ latus unum unà cum basi superat latus alterum, & dimidiâ differentiâ, quâ latus illud alterum unà cum basi superat latus primum; ita quadratum radii, ad quadratum sinus semissis anguli quæsiti.

THEOREMA III.

Ut rectangulum sub dimidiâ differentiâ, quâ latus unum unà cum basi superat latus alterum, & dimidiâ differentiâ, quâ latus illud alterum unà cum basi superat latus primum, ad rectangulum sub semisse omnium laterum & dimidiâ differentiâ, quâ illa duo latera basin superant; ita quadratum radii, ad quadratum tangentis semissis anguli, quæsito adjacentis.

THEOREMA IV.

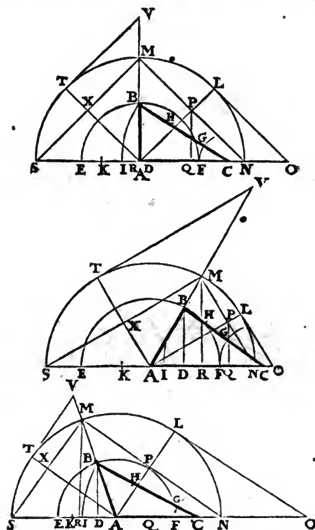
Ut rectangulum sub semisse omnium laterum & dimidiâ differentiâ, quâ duo latera basin superant, ad rectangulum sub dimidiâ differentiâ, quâ latus unum unà cum basi superat latus alterum, & dimidiâ differentiâ, quâ latus illud alterum unà cum basi superat latus primum; ita quadratum radii, ad quadratum tangentis semissis anguli quæsiti.

Voco angulum adjacentem alterius, eum, qui cum illo semicirculum complet vel illius ad 180 gr. est differentia; basin verò latus illud, quod angulo quæsito opponitur. Denique triangulum hîc intelligitur rectangulum, acutangulum, vel obtusangulum, prout quæsitus angulus est rectus, acutus, vel obtusus.

Sit triangulum ABC, in quo ex notis lateribus eliciendus sit angulus A.

Deducatur ex B in AC, vel in ipsam, hinc inde productam, perpendicularis BD; atque radio AB describatur ex A semicirculus EBF,

EBF, ſecans AC in E & F, tum ex C intervallo FC arcus FG, ſecans BC in G; ſeceturque BG biſariam in H. Rurſus centro C intervallo



CB alius deſcribatur arcus BI, ſecans AC in I, & EI biſariam ſecetur in K. Porrò ex A deſcripto alio quovis ſemicirculo, ut SMLN, ſe-

cante AC in S & N, ipſam autem AB, vel eam productam in M, bifariam ſecentur arcus NM & MS in L & T, junganturque AL, AT,

& NM, MS, ſe mutuò ſecantes in P & X. Denique ductis LO, TV tangentibus ſemicirculum SMLN in L & T, ſecantibus verò AC, AB

A B in O & V, demittantur ex P & M in A C perpendiculares P Q, M R.

His ita positis, constat K I dimidiam esse differentiam, quâ bina latera A B, A C superant basin B C; at verò semissem omnium laterum esse K C. Deinde etiam patet, sumendo A M pro radio, sinum semissis anguli quæsito B A C adjacentis esse S X vel X M.

Dico igitur 1^mo loco rectangulum B A C esse ad rectangulum C K I, ut quadratum A M ad quadratum S X vel X M.

Quoniam enim [a] □EC—□EA vel AB—□AC æquatur 2▭EA, A C; & in acutangulo quidem triangulo [b] □AC + □AB — □BC æquetur 2▭AD, AC; in rectangulo autem [c] □AC + □AB — □BC æquetur nihilo; at verò in obtusangulo [d] □ B C — □ A B — □ A C æquetur 2▭AD, A C: fiet, æqualibus æqualia addendo in acutangulo & rectangulo, hoc est, ad □EC—□AB—□AC addendo □AC + □AB—□BC; & ab æqualibus æqualia auferendo in obtusangulo, hoc est, à □EC — □AB — □AC auferendo □BC—□AB—□AC, in acutangulo quidem summa □EC—□BC vel I C æqualis summæ 2▭EA, A C + 2▭A D, A C, hoc est, [e] æqualis 2▭E D, A C; in rectangulo autem summa □EC—□BC vel I C æqualis 2▭E A, AC vel 2▭ED, AC; at verò in obtusangulo reliquum □EC — □BC vel IC æquale reliquo 2▭EA, AC — 2▭AD, AC, hoc est, [f] æquale 2▭E D, A C. Tribus igitur casibus □ E C — □ I C æquale est 2▭ED, AC. Sed □EC—□IC [g] est æquale 4▭KC, K I. Quare etiam 2▭ED, AC ipsi 4▭KC, KI est æquale, ac proinde & semissis semissi, hoc est, ▭ED, AC ipsi 2▭KC, KI. Porrò cum AB sit ad E D, ut AM ad SR; ut autem A B ad ED, ita [h], assumptâ communi altitudine AC, est ▭AB, AC ad ▭ED, AC seu 2▭KC, KI; at verò ut A M ad S R, ita, assumptâ communi altitudine A M, est □AM ad ▭AM, SR: Erit ut ▭AB, AC ad 2▭KC, KI, ita □AM ad ▭A M, SR. Sumptisque consequentium semissibus, ut ▭AB, AC ad ▭KC, KI, ita □AM ad $\frac{1}{2}$ ▭AM, SR. Est autem $\frac{1}{2}$ ▭AM, SR, hoc est, $\frac{1}{2}$ ▭AS, SR æquale □ SX vel XM: siquidem [i], propter similitudinem triangulorum A S X, M S R, A S est ad S X, ut MS ad SR, aut ut $\frac{1}{2}$ MS, hoc est, SX vel XM ad $\frac{1}{2}$SR. Quare erit ut ▭AB, AC ad ▭ K C, K I, ita □ A M ad □ S X vel X M. Quod primò erat ostendendum.

[a] p 4 Secundi Elem.
[b] p 13 Secundi Elem.
[c] p 47 Primi Elem.
[d] p 12 Secundi Elem.
[e] p 1 Secundi Elem.
[f] p 1 Secundi Elem.
[g] p 8 Secundi Elem.
[h] p 1 Sexti Elem.
[i] p 4 & 16 Sexti Elem.

Porrò constat, dimidiam differentiam, quâ latus unum A C unà cum base CB superat latus alterum AB esse H C; & dimidiam differen-

rentiam, quâ latus alterum AB unà cum base CB superat latus primum AC esse BH. Deinde etiam patet, sumendo AM pro radio, sinum semissis anguli quæsiti BAC esse MP vel PN.

Dico igitur 2^do loco rectangulum BAC esse ad rectangulum BHC, ut quadratum AM ad quadratum MP vel PN.

k p 7 Secundi Elem. Quoniam enim [k] □AC + □AF vel AB − □FC æquatur 2▭AF, AC; & in acutangulo quidem triangulo [l] □AC + □AB − □BC

l p 13 Secundi Elem. æquetur 2▭AD, AC; in rectangulo autem [m] □AC + □AB −

m p 47 Primi Elem. □BC æquetur nihilo; at verò in obtusangulo [n] □BC − □AB − □AC æquetur 2▭AD, AC: fiet, ab æqualibus æqualia auferendo

n p 12 Secundi Elem. in acutangulo & rectangulo, hoc est, à □AC + □AB − □FC auferendo □AC + □AB − □BC, & æqualibus æqualia addendo in obtusangulo, hoc est, ad □AC + □AB − □FC addendo □BC − □AB − □AC; in acutangulo quidem reliquum □BC − □FC vel

o p 1 Secundi Elem. CG æquale reliquo 2▭AF, AC − 2▭AD, AC, hoc est, [o] æquale 2▭DF, AC; in rectangulo autem reliquum □BC − □FC vel CG æquale reliquo 2▭AF, AC vel 2▭DF, AC; at verò in obtusangulo summa □BC − □FC vel CG æqualis summæ 2▭AF, AC

p p 1 Secundi Elem. + 2▭AD, AC, hoc est, [p] æquale 2▭DF, AC. Triplici igitur casu □BC − □CG æquale est 2▭DF, AC. Sed □BC − □CG

q p 8 Secundi Elem. [q] est æquale 4▭BH, HC. Quare etiam 2▭DF, AC ipsi 4▭BH, HC est æquale, adeoque & semissis semissi, hoc est, ▭DF, AC ipsi 2▭BH, HC. Porrò cum AB sit ad DF, ita AM ad RN; ut autem

r p 1 Sexti Elem. AB ad DF, ita, [r] assumptâ communi altitudine AC, est ▭AB, AC ad ▭DF, AC seu 2▭BH, HC; at verò ut AM ad RN, ita, assumptâ communi altitudine AM, est □AM ad ▭AM, RN: Erit ut ▭AB, AC ad 2▭BH, HC, ita □AM ad ▭AM, RN. Sumptisque consequentium semissibus, ut ▭AB, AC ad ▭BH, HC, ita □AM ad $\frac{1}{2}$▭AM, RN. Est autem $\frac{1}{2}$▭AM, RN, hoc est, $\frac{1}{2}$▭AN, RN

s p 4 & 16 Sexti Elem. æquale □MP vel PN: siquidem [s] propter similitudinem triangulorum ANP, MNR, AN est ad PN, ut MC ad RN, aut ut $\frac{1}{2}$MC, hoc est, MP vel PN ad $\frac{1}{2}$RN. Quare erit ut ▭AB, AC ad ▭BH, HC, ita □AM ad □MP vel PN. Quod secundò erat ostendendum.

Præterea constat, sumendo AT pro radio, tangentem semissis anguli quæsito BAC adjacentis esse TV.

Dico igitur 3^tio loco rectangulum BHC esse ad rectangulum IKC, ut □AT ad □TV.

Cum enim ex proximè demonstratis ▭AB, AC sit ad ▭BH, HC,

HC, ſicut □AM ad □MP vel PN: permutando erit [t] ut ▭AB, AC ad □AM, ſic ▭BH, HC ad □MP vel PN, ſeu AX. Rurſus cum paulò ante oſtenſum ſit ▭AB, AC ad ▭KC, KI eſſe, ſicut □AM ad □SX vel XM: ſimiliter permutando erit, ut ▭AB, AC ad □AM, ſic ▭KC, KI ad □SX vel XM. Unde [u] erit ut ▭BH, HC ad □AX, ſic ▭KC, KI ad □XM: & rurſus permutando ut ▭BH, HC ad ▭KC, KI, ita □AX ad □XM, ſeu □AT ad □TV. Quod tertiò erat oſtendendum.

t p 16 Quinti Elem.

u p 11 Quinti Elem.

Denique conſtat, ſumendo AL pro radio, tangentem ſemiſſis anguli quæſiti BAC, eſſe LO.

Dico igitur 4[to] loco rectangulum IKC eſſe ad rectangulum BHC, ut □AL ad □LO.

Etenim cum oſtenſum ſit ▭BH, HC eſſe ad ▭KC, KI, ſicut □AX ad □XM: convertendo erit [x] ut ▭KC, KI ad ▭BH, HC, ita □XM ad □AX, vel □AP ad □PN, ſeu □AL ad □LO. Quod quartò ac ultimò erat oſtendendum.

x p Cor. 4 Quinti Elem.

Illuſtratio per numeros.

Trianguli ABC eſto latus AB 5915②, & latus AC 91⓪, baſis verò BC 9555②. Quæritur angulus BAC.

Siquidem igitur angulus hic per præcedentes regulas quatuor modis inveniri poteſt, ſuffecerit ſi eum per 1[mam] regulam inveſtigemus: cum reliquarum elucidatio huic parùm diſſimilis habenda ſit. Ut autem operatio tota per additionem, ſubtractionem, & bipartitionem abſolvatur: loco numerorum multiplicandorum & dividendorum accipiantur eorum Logarithmi, quales illos Clariſſimi Briggii tabula nobis ſuppeditat, quam Vir induſtrius ac de Matheſi practica optimè meritus D. Adrianus Vlaccus ad umbilicum poſtea perduxit, replendo Logarithmos numerorum à 20.000 ad 90.000, in ſerie naturali ab 1 ad 100.000 ante deſideratos. Cui porrò tabulæ, ad quæſiti anguli inveſtigationem, altera adhibenda eſt, Logarithmos continens ſinuum, quos idem Vir Clariſſimus ad graduum centeſimas conſtruxit, aſſumpto radio circuli 1000000000000000 partium, qualis illa in opere abſolutiſſimo, quod Trigonometria Britannica inſcribitur, contenta eſt; vel etiam illa, quam Vir laudandus Adr. Vlaccus, (ſequendo uſitatam hactenus graduum in ſexagenas parteſ diviſionem) pro ſinubus & tangentibus ad decades ſecundorum ſcrupulorum condidit, ſtatuendo radium 10000000000

partium, sicut illam in opere, cui Trigonometria Artificialis titulum fecit, videre licet. Quarum tabularum ope quæcunque ad faciliorem & perfectiorem quorumvis triangulorum dimensionem spectant, calculo facillimo expediuntur.

Hinc additis AB 5915② & AC 91⓪, si à summa EC 15015② auferatur CB 9555②: erit reliqui semissis KI 273①. Cui addendo IC vel CB 9555②, habebitur KC 12285②.

Deinde cum ▭ AB, AC sit ad ▭ KC, KI, sicut □ AM ad □ SX vel XM, atque Logarithmi multiplicationem & divisionem mutent in additionem & subtractionem, extractionem verò in bipartitionem: fiet, ut, si loco multiplicandi ▭ KC, KI per □ AM ad ipsarum KC, KI Logarithmos addamus duplum radii AM Logarithmum, & in locum dividendi productum per ▭ AB, AC ab hac summa auferamus summam Logarithmorum ipsarum AB, AC, reliquum 197945417 sit Logarithmus quadrati ex SX vel XM. Cujus sumendo semissem, loco extrahendi è □ SX vel XM radicem quadratum, habebitur 98972708, pro Logarithmo ipsius SX vel XM. Unde cum utraque hæc sinus existat semissis anguli, quæsito BAC adjacentis, si in tabula quæratur cujus sinus Logarithmo inventus numerus 98972708 proximè conveniat: reperietur SX vel XM fore sinum graduum 5213② seu $52\frac{13}{100}$, vel etiam 52 gr. 7′, & 48″. Cujus ideo duplum, ut $104\frac{26}{}$, vel 104 gr. 15′, & 36″, erit quantitas anguli adjacentis. Quo subducto ex 180 gradibus, relinquetur quæsitus BAC $75\frac{74}{}$, vel 75. 44′. 24″.

Ubi demum notandum, si pro Logarithmis auferendis addantur eorum complementa ad radium, non aliâ opus fore subtractione. Ut liquet inferiùs ex collatione utriusque praxeos.

			Logarithmi.	Logarithmi
Add. { AB.	59	15	1.7719.547	Compl. 8.2280.453
Add. { AG.	91		1.9590.414	Compl. 8.0409.586
summa EC.	150	15	summa 3.7309.961	
subtr. IC vel CB.	95	55		
reliquum E I.	54	6		
semissis EK vel KI.	27	3	1.4361.626	1.4361.626
add. IC.	95	55		
summa KC.	122	85	2.0893.752	2.0893.752
			20.0000.000	
			summa 23.5255.378	
differentia summarum			19.7945.417	summa 19.7945.417
semissis			9.8972.708	semissis 9.8972.708. Log. Sin.

52,13 gr.

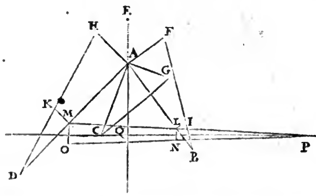
	graduum	
	52	13, vel 52. 7. 48
duplum	104	26, vel 104. 15. 36. ang. adjacens
reliq. ex 180 gr.	75	74, vel 75. 44. 24. angulus quæsitus BAC.

SECTIO XXVIII.

Ratio Geometrica invenienda lineæ meridianæ.

QUâ ratione ex tribus obſervationibus umbræ Solis, uno die in plano Horizontali factis, Geometricè inveniatur linea Meridiana, oſtendit mihi Pariſiis ante aliquot annos Mathematum peritiâ non minùs quàm omni virtute inſignis D. Claudius Mylon, J.C, cum quo tunc temporis familiariſſimè ſum verſatus, ac etiamnum amicitiam arctam colo. Quam quidem rationem ſe didiciſſe ait ex libro Italico, cui titulus: *Gli Horologi Solari nelle ſuperficie piane: Trattato di Mutio Oddi da Vrbino.* Verùm cum ipſa abſque demonſtratione ſit allata, placuit demonſtrationem qualem adinveni, unà cum Autoris methodo hîc ſubjicere.

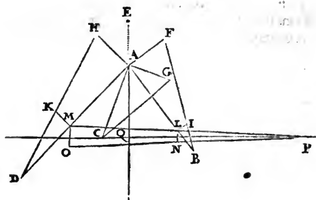
Sint igitur AB, AC, & AD tres umbræ, factæ in plano uno die per umbram ſtyli AE, ſuper eodem in A perpendiculariter erecti. Quarum quidem umbrarum, ſi duæ reperiantur æquales, patet, li-



neam à puncto A perpendiculariter demiſſam in eam, quæ conjungit illarum extrema, eſſe lineam Meridianam.

Si autem omnes tres ſint inæquales, ut ſi A C ponatur minima, erigendæ erunt in puncto A ſuper A B, A C, & A D perpendiculares A F, A G, & A H, ipſi ſtylo A E æquales, jungendæque F B, G C, & H D. Hinc quoniam A C minor eſt quàm A B, erit & G C minor quàm F B. Ob eandem rationem erit quoque G C minor quàm H D. Quocirca oportebit ex F B & H D auferre F I & H K ipſi G C æquales, & ex punctis I & K ſuper A B, A D deducere perpendiculares I L, K M; inde verò ex punctis L & M ſuper rectam hæc puncta jungentem alias duas perpendiculares erigere, ut L N & M O, quæ ipſis L I & M K ſint æquales. Siquidem autem duæ umbræ A B, A D inæquales ſunt, erunt ſimiliter F B, H D inæquales. Cum verò F I & H K æquales ſint ex constructione, ſequitur L I, K M ſeu L N, M O inæquales fore, adeoque, cum ipſæ ſint parallelæ, rectam, quæ puncta O & N conjungit cum recta M L producta concurrere. Concurrant igitur in punctum P, quo juncto cum puncto C, ex A in P C perpendicularis demittatur A Q, eritque linea Meridiana quæſita.

Atque hic ferè ſenſus Autoris eſt, ſequitur demonſtratio.



Quoniam itaque A C minor eſt quàm A B, ac ideo quadratum A C minus quadrato A B: erunt etiam, ſi æqualia utrinq; addantur quadrata A G, A F, quadrata C A, A G ſimul ſumpta quadratis B A, A F ſimul ſumptis minora. Sunt autem per 47 primi Elem. quadrata C A, A G æqualia quadrato G C; at verò quadrata B A, A F æqualia quadrato F B. Quare & quadratum G C quadrato F B minus erit, adeoque G C minor

nor

nor quàm FB. Eodem modo GC minor oſtenditur quàm HD; ut &, cùm AB & AD inæquales ponuntur, quòd FB & HD inæquales ſint: adeò ut, ſi AD major fuerit quàm AB, HD quoque major ſit futura quàm FB. è quibus ſi porrò æquales auferantur HK, FI, relinquetur etiam KD major quàm IB.

Siquidem igitur KD major eſt quàm IB, habebit, per 8 Quinti Elem., HK ad KD minorem rationem, quàm FI ad IB. Unde & componendo, per 28 Quinti Elem., HD ad DK minorem rationem habebit quàm FB ad BI. Sed ut HD ad DK, ita eſt per 4 Sexti Elem. HA ad KM; & ut FB ad BI, ita eſt FA ſeu HA ad IL. Quamobrem & HA ad KM minorem rationem habebit quàm HA ad IL: unde, per 10 Quinti Elem., major erit KM quàm IL, ſive MO quam LN, ac proinde ML & ON productæ concurrent in P.

Intelligantur jam tria triangula ABF, ACG, & ADH perpendiculariter erecta ad ſubjectum planum ſuper rectas AB, AC, & AD. Quo fiet, ut tria puncta F, G, & H in unum coïncidant punctum, ut E, in verticem nempe ſtyli AE; & ut rectæ FB, GC, & HD ſint in Conica ſuperficie umbræ, quam Sol motu ſuo eo die deſcribit; cujus vertex ſit punctum E. Quocirca ſi in ipſis rectis ſumantur rectæ FI, GC, & HK inter ſe æquales, cadent puncta I, C, & K in circuli circumferentiam, cujus planum plano Æquatoris eſt parallelum. Ideoque ſi per puncta K & I in ejuſmodi poſitione recta linea concipiatur, ad planum Horizontale producta, concurret illa cum ML producta in punctum P, ubi videlicet ON producta cum ipſa concurrit. Adeò ut, puncto P exiſtente in plano illius circuli atque etiam in ſubjecto plano, nec non puncto C in utroque plano, recta linea per puncta P & C ducta communis interſectio utriuſque plani ſit futura. Quoniam verò hæc duo plana ad Meridiani planum recta ſunt, erit etiam illorum communis interſectio PC, per 19 undecimi Elem., ad idem Meridiani planum recta, ac proinde etiam ad lineam Meridianam, per 3 defin. undecimi Elementorum. Unde patet, lineam AQ perpendiculariter demiſſam ex A ſuper rectam PC, lineam Meridianam eſſe. Quod erat demonſtrandum.

Notandum autem porrò eſt, rationem hanc inveniendæ lineæ Meridianæ, non ſolùm locum habere in planis Horizontalibus, verùm etiam in verticalibus & in inclinatis, ſicut ex demonſtratione colligere licet.

Quòd ſi verò ſupra dictum planum plano Æquatoris parallelum

pro ipſo Æquatoris plano ſumatur, referet linea P C in omni alio plano lineam Æquinoctialem; perpendicularis autem A Q lineam Subſtilarem. Quod quidem adnotaſſe viſum fuit operæ pretium.

SECTIO XXIX.

Ratio deſcribendi horologia ſciatherica per triangulum iſoſceles.

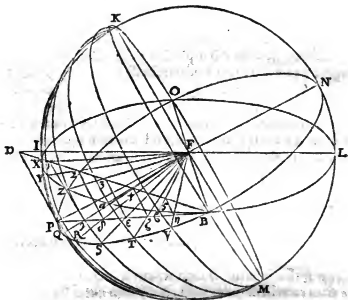
CUm ad deſcribenda horologia ſciatherica modum ingenioſiſſimum, qui ope trianguli iſoſcelis perficitur, jam ante annos aliquot excogitârit Vir eruditus D. Samuel Forſterus, apud Londinenſes in Collegio Greſhamenſi Aſtronomiæ Profeſſor: viſum fuit eum, qualem Dublinii primùm apud Purſerum videre mihi contigit; unà cum ſcalarum conſtructione, quibus in finem illum utitur, paucis hîc exponere; præmittens ad ejuſdem demonſtrationem, hoc, poſtmodum à me inventum,

LEMMA.

Eſto circulus IKLM meridianus, cujus pariter atque mundi centrum ſit F: ſitque circulus IBLO horizon, linea verò IL plani horizontis & meridiani communis interſectio ſeu linea meridiana: & puncta K & M poli mundi: at KM axis: circulus autem B NO P æquinoctialis; cujus quidem & meridiani communis ſectio ſit PN; ipſius autem & horizontis BO. Circuli porrò horarii à meridie ſeu ſecantes ſunto K Q M, KRM, KSM, KTM, KVM, & KBM, qui ſecent æquinoctialem quidem in Q, R, S, T, V, & B; horizontem verò in X, Y, Z, α, β, & B: ducanturque F Q, F R, F S, F T, F V, & F B, nec non FX, FY, FZ, Fα, Fβ, & FB. Denique junctâ B P, & ex P ductâ PD ipſi FK parallelâ, conveniente cum L I productâ in D, connectatur BD. Dico hanc ſecari à planis circulorum ſecantium in eadem ratione, in quâ recta BP ab iiſdem ſecta eſt.

Secent enim rectæ F Q, F R, F S, F T, & F V rectam BP in punctis

ctis γ, δ, ϵ, ζ, & η, eruntque ipsa in quibus plana circulorum secantium secant rectam BP. Eodem modo, rectæ FX, FY, FZ, Fα, & FB, secantes rectam BD in punctis 1, 2, 3, 4, & 5, erunt hæc ipsa puncta intersectionum, in quibus recta BD secatur à planis eorun-



dem circulorum. Dico igitur rectam BD in punctis 1, 2, 3, 4, & 5 similiter sectam esse atque recta BP in punctis γ, δ, ϵ, ζ, & η.

Quoniam enim PD parallela est ipsi FK, atque FK ad planum circuli BNOP recta, erit quoque PD eidem plano ad rectos angulos, per 8 undecimi Elementorum. Jam verò si per ipsam & rectam PB vel BD planum transire intelligatur, utpote planum trianguli BPD, erit utique & illud ad planum circuli BNOP rectum, per 18 undecimi Elementorum. Porrò, siquidem omne planum quod per FK ducitur ad planum circuli BNOP rectum est, concipiatur planum per FK, quod plano trianguli BPD sit æquidistans. Hæc igitur duo plana cum ambo secentur à planis circulorum secantium KPM, KQM, KRM, KSM, KTM, & KVM, ita ut communes intersectiones sint rectæ

rectæ P D, γ 1, δ 2, ϵ 3, ζ 4, & η 5, sequitur rectas hasce axi F K ut & inter se esse parallelas, per 16 & 9 undecimi Elementorum. Quare per 2 Sexti Elem. vel per ea, quæ demonstrantur Prop^{ne} 10 ejusdem libri, B D in eandem rationem secabitur in punctis 1, 2, 3, 4, & 5, in quam recta B P in punctis γ, δ, ϵ, ζ, & η secta est. Quod erat propositum.

Hinc liquet, si fiat triangulum rectangulum B F D, cujus unum latus BF sit instar radii; alterum verò F D instar secantis arcus complementi elevationis Poli; & cujus basis B D divisa sit in punctis 1, 2, 3, 4 & 5 similiter ac recta P B in punctis γ, δ, ϵ, ζ, & η; & in quo porrò triangulo ex angulo recto F ad puncta divisionis opposita ductæ sint rectæ F 1, F 2, F 3, F 4, & F 5, has ipsas fore lineas horarias Horologii Horizontalis ad propositam Poli elevationem. Quarum quidem F D lineam meridianam seu horam 12 indicabit, F I horam 1 pomeridianam vel horam 11 ante meridiem, F 2 horam 2 pomeridianam vel horam 10 ante meridiem, F 3 horam 3 pomeridianam vel horam 9 ante meridiem, F 4 horam 4 pomeridianam vel horam 8 ante meridiem, F 5 horam 5 pomeridianam vel horam 7 ante meridiem, & F6 horam 6 ante vel post meridiem. Ex quibus reliquæ lineæ horariæ facilè inveniuntur. In quo denique triangulo centrum horologii erit E, ubi stylus obliquus supra F D ad altitudinem Poli est erigendus.

Unde rursus infertur, si loco trianguli rectanguli, in quo unum latus circa rectum sit instar radii, & alterum instar secantis complementi elevationis Poli, aliud assumatur triangulum rectangulum; cujus unum latus circa rectum sit instar sinus elevationis Poli, & alterum instar radii (siquidem sinus arcus alicujus est ad radium, ut radius ad secantem complementi ejusdem arcus); cujusque basis rursus dividatur similiter ac recta PB: idem obtineri, quod diximus.

Quibus præmissis perceptisque accedimus porrò ad constructionem scalarum, quæ sic se habet.

Centro A intervallo quocunque describatur circulus, qui diametris BD, CE ad angulos rectos sese decussantibus in quatuor quadrantes dispescatur. Horum autem B C & C D in 90 gradus dividantur, & à puncto E ad gradus tricenos oppositos rectæ lineæ ducantur, quæ secent rectam B D: eritque D B sic secta Linea Horarum dicta. Deinde dividatur radius AC ab A versùs C secundùm seriem sinuum, positâque regulâ ad punctum D & singula puncta ipsius A C, quæ per-

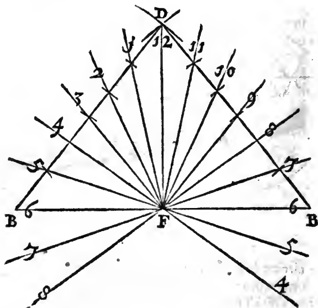
pertingat ad circumferentiam, quadrans B C in alias 90 partes dispescatur, quæ numerationem à B versùs C accipiant. Quibus peractis, si à puncto B ad singula hæc intersectionum puncta rectæ lineæ ductæ concipiantur, ipsæque à B in recta B C notentur: erit B C sic designata Linea Latitudinum appellata.

Præparatis igitur hisce duabus scalis, superest ut ostendamus, quâ ratione earundem beneficio Horologium ad datam Poli elevationem describatur.

Quod fiet utiq; describēdo ad hoc triangulum isosceles.

Ut si proponamus horologium horizontale describendum esse ad Poli elevationem 52 grad. 10 min. qualis ea hîc Leidæ reperitur: capiamus circino in Linea Latitudinum intervallum inter punctum B & terminum min. 10 gradus 52, (sive quia ob spacii angustiam gradus in minuta dividi nequeunt, satis erit ut minuta conjiciamus ob exiguam differentiam quæ inde relinquitur), eoque notato in rectâ aliquâ indefinitâ à puncto F hinc inde usque ad punctum B: capiamus porrò B D Lineam Horarum atque ad ejus intervallum ex utroque puncto B arcum decircinemus, quorum alter alterum secet in D; ita ut triangulum constituant isosceles B D B. In quo denique si denotemus super æqualibus lateribus puncta omnia in Linea Horarum designata, atque ex puncto B per hæc ipsa rectas lineas ducamus, descriptum erit horologium quæsitum. Nam ut habeantur lineæ horariæ, quæ horas indicant ante 6tam matutinam, vel post 6tam ves-

pertinam, oportet tantùm jam inventas producere ex parte puncti F. Cujus quidem descriptionis ratio ex superiori Lemmate perspicua est. Liquet enim ex constructione, si triangulum rectangulum B D F circulo B C D E inscriptum fuerit, ita ut latus ejus D F secet radium A C in G, tunc quidem A G sinum fore grad. 52. min. 10. datæ videlicet Poli elevationis. In quo præterea triangulo latus unum B F est ad latus alterum F D, ut G A ad A D, hoc est, ut sinus elevationis Poli ad radium; & in quo basis B D similiter secta est in punctis 1, 2, 3, 4, & 5 sicut superiùs recta BP in punctis γ, δ, ι, ζ, & η à planis circulorum secantium. &c.



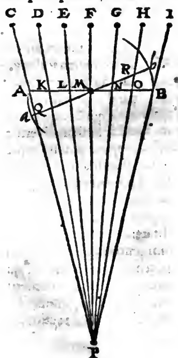
Operæ pretium duxissem reliquorum pariter horologiorum generum descriptionem hîc ostendere, verùm cum in Angliam postea reversus Londini tractatum ea de re à Forstero ipso vernaculâ linguâ conscriptum invenerim, ac anno 1638 in lucem editum, cui titulus: *The Art of Dialling by a new, easie and most speedii way*, quem adire licet: animum immutavi, sufficere existimans me ea hîc, quibus cætera innituntur, fundamenta demonstrasse.

Sz-

SECTIO XXX.

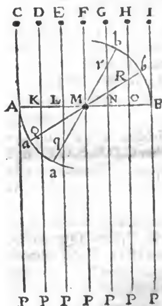
Quemadmodum centrum gravitatis in magnitudinibus mobile sit intelligendum.

GRavitatis centrum in unoquoque corpore non fixum existere, ex proprio principio ante complures annos deduxit Vir illustris Renatus des Cartes in tractatu suo de Mechanica, ubi naturam Vectis persequitur. Quoniam autem eo nondum edito centri hujus naturam cuivis ex illo perspicere haud obvium est, visum fuit hoc loco aliam ejusdem centri explicationem, quâ natura ejus perfacilè ab unoquoque intelligatur, in medium afferre; Qualem eam ingeniosissimus ac sæpiùs laudatus D. Joh. Huddenius Ger. Fil. excogitavit, mihique illius participem fecit, statuens cum D. des-Cartes gravitatem in corpore, quod grave dicitur, nil esse præter conatum aut vim descendendi versùs Terræ centrum, qui per aliorum corporum motum causetur. Quocirca ut centri hujus gravitatis mobilitas quàm facillimè percipiatur, sufficerit id in recta linea ostendisse, hoc pacto:



Esto recta illa A B, divisa in partes aliquot æquales, utputa sex AK, KL, LM, MN, NO, & O B; supponanturque C, D, E, F, G, H, & I septem sphærulæ æquales, in recta versùs Terræ centrum P eâdem vi tendentes, queque eodem temporis momento ipsi A B occurrant in A, K, L, M, N, O, & B. Quo posito, manifestum est, rectâ AB immotâ existente, ac super M P cum ejus medio M quiescente, angulis AMP & P M B existentibus rectis, quòd per hunc motum sphærularum causari non possit, ut terminorum A, B alter altero priùs descendat: quandoquidem vis, quæ illud præstaret, utrinq; omnino eadem existit. Adeò ut AB eo casu in æquilibrio permanere teneatur, punctumq; M pro illius centro gravitatis sit habendum.

Quòd si verò ipsi AB alia positio tribuatur, ut hîc *a* M *b*, debet necessario pars una *a* M, quæ Terræ centro P vicinior est, plus semper ponderare quàm pars altera M *b*, quæ à centro P est remotior: quoniam prædicta vis hâc ratione inæqualis redditur, atque illa hoc pacto in inferiorem partem *a* M accrescit, dum in eam non solùm plures sphærulæ impingunt, sed ipsæ etiam in angulis, ad rectos magis accedentibus, occurrunt; ac proinde in eam fortiùs agunt. Ita ut recta *a* M *b* aliam positionem appetere teneatur, parsque M *b* ipsâ parte *a* M major sumenda sit, quò ipsa in eodem statu seu æquilibrio permaneat; ac idcirco ejus centrum gravitatis non fixum sed mobile existere. Cujus quidem ad corpora adplicatio ex se manifesta est.



Cæterùm sciendum, differentiam hanc, ex ingenti horum corporum à Terræ centro distantiâ, cum eorundem magnitudine comparatâ, esse planè imperceptibilem seu insensibilem; ac proinde considerationem hujus mutabilitatis centri in praxi nullius esse usus. Quoniam, rectis CP, DP, EP, FP, GP, HP, & IP, propter immensam hujus lineæ AB à Terrę centro P elongationem & ex illius ad hanc relatione parvitatem, parallelis existentibus (quemadmodum absq; ullo experientię detrimento, quæ hîc nullam diversitatem agnoscit, supponi potest) æquemultæ semper sphærulæ in utramque partem ipsius AB, quamcunque illa positionem habuerit, impingunt; eædemque etiam, propter angulorum utrinque æqualitatem, in eam hinc inde æquè fortiter agunt. Adeò ut M punctum centrum gravitatis ipsius AB existens ejusdem quoque gravitatis centrum in omni alia ejus positione existat, ipsaque positionem omnem, quam quis ei dederit, retineat. Indicans quo sensu gravitatis centrum in magnitudinibus immobile seu fixum sit intelligendum non secus ac illud Sectione 19 à nobis cum aliis fuit acceptum.

AD

AD
LECTOREM.

Ostquam finem exercitationibus hisce imponere decreveram, diversa mihi alia, Amice Lector, jucundissimæ ac perpulchræ contemplationis argumenta superesse deprehendi, quæ, si pro eorum dignitate pertractata Sectionibus hisce adjunxissem, non parùm & meis laboribus ornamenti, & tuis fortè studiis adjumenti commodiqúe attulissent; sed tam labor quam opus in immensum accrevisset. Quocirca cum inter alia, præcedentibus Sectionibus pertractata, modum, quo, elegantiores & sublimiores quædam Propositiones, partim ab Antiquis, partim à præstantissimis hujus sæculi Mathematicis ingeniosissimè inventæ, ab ipsis investigatæ fuerint, illævé Analyticæ artis præsidio inveniri possint, ostenderim: haud alienum ab instituto judicavi, si, ad uberiorem hujus artis usum, ea, quæ Nobilissimus atque Clarissimus D. CHRISTIANUS HUGENIUS nuper de Ratiociniis in aleæ ludo adinvenit mihiqúe conscripta communicavit, hîc unà cum ipsius literis, reliquorum, quæ mihi supersunt, loco, adjicerem.

 Quem

Quem igitur illius tractatum vel eò tibi acceptiorem fore confido, quò ea quæ inibi traduntur & ſubtiliora & à vulgo remotiora eſſe invenies; præſertim cum ad horum inveſtigationem eâdem mecum Analyſi, cujus olim fundamenta à me edoctus eſt, utatur; atque ita ejus ſtudioſis viam ad conſimiles quæſtiones reſolvendas aperiat. In quibus ſi cum reliquis noſtris laboribus amplam tibi ſatis, Benevole Lector, in hoc ſtudiorum genere exercitationis anſam præbuiſſe videar; animum exinde meum tui ſtudioſiſſimum (ut ſpero) agnoſces, ac noſtram proinde operam in tui & Reïpublicæ Literariæ bonum ſuſceptam in bonam partem interpretaberis. Vale.

CHRI-

CHRISTIANUS HUGENIUS

Clarissimo Viro,

D. FRANCISCO SCHOTENIO

S. D.

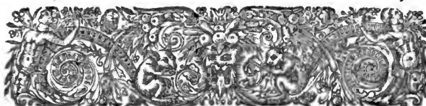
Vm in editione elegantissimorum ingenii tui monumentorum, quam præ manibus nunc habes, Vir Clarissime, id inter cætera te spectare sciam, ut varietate rerum, quarum tractationem instituisti, ostendas quàm latè se protendat divina Analytices scientia, facilè intelligo etiam illa plurimùm proposito tuo inservire posse, quæ de aleæ ratiociniis conscripsimus; quantò enim minus rationis terminis comprehendi posse videbantur, quæ fortuita sunt atque incerta, tantò admirabilior ars censebitur, cui ista quoque subjacent. Quare cum in tui gratiam primùm illa exponenda susceperim, túque digna existimes, quæ simul cum subtilissimis tuis inventis in lucem exeant, adeò tibi non refragabor, ut etiam è re mea esse existimem hâc potissimùm ratione ipsa in manus hominum pervenire. Quippe cum in re levi ac frivola operam collocasse videri alioqui possem, non tamen prorsus utilitatis expers ac nullius pretii censebitur, quòd tu veluti inter tua adoptaveris, nec sine multo labore è vernacula lingua nostra in Latinam converteris. Quanquam, si quis penitiùs ea quæ tradimus examinare cœperit, non dubito quin continuò reperturus sit rem non ut videtur ludicram agi, sed pulchræ subtilissimaqúe contemplationis fundamenta explicari. Et Problemata quidem quæ in hoc genere proponuntur, nihilo minus profundæ indaginis visum iri confido, quàm quæ Diophanti libris continentur, voluptatis autem aliquantò plus habitura, cum non, sicut illa, in nuda numerorum consideratione terminentur. Sciendum verò, quod jam pridem inter præstantissimos totâ Galliâ Geo-

metras

metras calculus hic agitatus fuerit, ne quis indebitam mihi primæ inventionis gloriam hac in re tribuat. Cæterùm illi, difficillimis quibusque quæstionibus se invicem exercere soliti, methodum suam quisque occultam retinuêre, adeò ut à primis elementis universam hanc materiam evolvere mihi necesse fuerit. Quamobrem ignoro etiamnum an eodem mecum principio illi utantur; at in resolvendis Problematis pulchrè nobis convenire sæpenumero expertus sum. Horum Problematum nonnulla in fine operis addidisse me invenies, omissa tamen analysi, cum quòd prolixam nimis operam poscebant, si perspicuè omnia exequi voluissem, tum quòd relinquendum aliquid videbatur exercitationi nostrorum, si qui erunt, Lectorum. Vale.

Dat. Hagæ Com.
27 Apr. 1657.

DE



DE
RATIOCINIIS
IN
LUDO ALEÆ.

Etsi lusionum, quas sola sors moderatur, incerti solent esse eventus, attamen in his, quanto quis ad vincendum quàm perdendum propior sit, certam semper habet determinationem. Ut si quis primo jactu unâ tesserâ senarium jacere contendat, incertum quidem an vincet; at quantò verisimilius sit eum perdere quàm vincere, reipsâ definitum est, calculoque subducitur. Ita quoque, si cum aliquo certem hâc ratione, ut ternis lusibus constet victoria, atque ego jam unum lusum vicerim, incertum adhuc uter nostrum prior tertii victor sit evasurus. Verùm quanti exspectatio mea, & contra quanti illius, æstimari debeat, certissimo ratiocinio consequi licet, atque hinc definire, si ludum uti est imperfectum linquere inter nos convenerit, quantò major portio ejus quod depositum est mihi quàm adversario meo tribuenda esset: vel etiam si quis in locum sortemque meam succedere cupiat, quo pretio me eam ipsi vendere æquum sit. Atque hinc innumeræ quæstiones exoriri possunt inter duos, tres, pluresve collusores. Cumque minimè vulgaris sit hujusmodi supputatio, & sæpe utiliter adhibeatur, breviter hîc quâ ratione aut methodo expedienda sit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam sive tesseras propriè pertinent, explicabo.

Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ ludo tanti æstimandam esse cujusque sortem seu expectationem ad ali-

quid obtinendum, quantum si habeat, possit denuo ad similem sortem sive expectationem pervenire, æquâ conditione certans. Ut, exempli gratiâ, si quis me inscio alterâ manu 3 solidos occultet, alterâ 7 solidos, mihique optionem det ex utra manu solidos accipere malim; hoc tantundem mihi valere dico, ac si 5 solidi mihi dentur. Quoniam quinque solidos habens, denuo eò pervenire possum, ut æquam expectationem nanciscar ad 3 vel 7 solidos obtinendos: idque æquo lusu contendens.

PROPOSITIO I.

Si a vel b expectem, quorum utrumvis æquè facilè mihi obtingere possit, expectatio mea dicenda est valere $\frac{a+b}{2}$.

Ad hanc regulam non solùm demonstrandam, verùm etiam primitùs eruendam posito x pro eo quod æquivalet expectationi meæ, oportet me, quum x habeo, rursus ad similem sortem pervenire posse, æquâ conditione certantem. Ponatur itaque lusus esse talis, ut cum altero certem hâc conditione, ut quisque deponat x, ac ut victor victo traditurus sit a. Hic autem lusus justus est, & patet me hâc ratione æquam habere sortem ad obtinendum a, si lusum perdam scilicet; aut $2x - a$, si vincam: tum enim obtineo $2x$, id nempe quod depositum est, de quo alteri erogandum est a. Quòd si autem $2x - a$ tantundem valeret atque b, æqua mihi sors obtingeret ad a quàm ad b. Pono itaque $2x - a \propto b$, & fit $x \propto \frac{a+b}{2}$, pro valore meæ expectationis. Cujus demonstratio facilis est. Etenim habens $\frac{a+b}{2}$ possum cum alio certare, qui etiam $\frac{a+b}{2}$ deponere volet, hâc conditione ut vincens victo sit traditurus a. Quâ ratione similis expectatio mihi obtinget ad obtinendum a, si perdam, aut ad obtinendum b, si vincam; tum enim obtineo $a + b$, id nempe quod depositum est, alterique inde concedo a.

In numeris. Si ad 3 vel 7 æqua sors mihi obtingat, tum expectatio mea per hanc Propositionem valet 5; & certum est me 5 habentem rursus ad eandem expectationem pervenire posse. Si enim cum alio certans 5 deponam, atque ille similiter 5 deponat, hâc conditione, ut, qui vincit, alteri sit daturus 3: erit hic lusus omnino justus, & patet

tet mihi æquam obtingere sortem ad obtinendum 3, si perdam, aut 7, si vincam: quoniam tunc obtineo 10, de quo alteri concedo 3.

PROPOSITIO II.

Si a, b, vel c expectem, quorum unumquodque pari facilitate mihi obtingere possit, expectatio mea æstimanda est $\frac{a+b+c}{3}$.

Ad quod rursus inveniendum, ponatur, ut ante, x pro valore expectationis meæ. Oportet ergo me, cùm x habeo, ad eandem expectationem pervenire posse justo lusu. Ponatur lusus esse talis, ut cum duobus aliis ludam hâc conditione, ut quisque nostrum trium deponat x, & ut cum uno hoc pactum aggrediar, si ipse victor evadat, mihi sit daturus b, & ego ipsi traditurus sim b, si idem mihi obtingat. Cum altero autem hanc ineam conditionem, ut ille ludum vincens mihi traditurus sit c, aut ego ipsi sim daturus c, si ego vincam. Et patet hunc ludum justum esse. Æquam autem hâc ratione sortem habebo ad obtinendum b, si nimirum primus vincat, aut c, si secundus vincat, aut etiam $3x - b - c$ si ego vincam; tunc enim obtineo $3x$, quod depositum est, de quo uni concedo b, & alteri c. Quòd si $3x - b - c$ æquale fuerit ipsi a, eadem mihi obtingeret expectatio ad obtinendum a, quæ ad b, aut ad c. Pono itaque $3x - b - c \mathrel{\infty} a$, & fit $x \mathrel{\infty} \frac{a+b+c}{3}$, pro valore meæ expectationis. Eodem modo invenitur, si ad a, b, c, aut d æqua sors mihi obtingat, id tanti valoris esse, quanti $\frac{a+b+c+d}{4}$. Atque ita porrò.

PROPOSITIO III.

Si numerus casuum, quibus mihi eveniet a, sit p, numerus autem casuum quibus mihi eveniet b sit q, sumendo omnes casus æquè in proclivi esse: expectatio mea valebit $\frac{pa+pq}{p+q}$.

Ad hanc regulam eruendam, ponatur rursus x pro valore expectationis meæ: ergo oportet me, cùm x habeo, ad eandem expectationem pervenire posse, ut ante, justo lusu. Ad hoc autem tot collusores sumam, ut unà mecum numerum ipsius $p+q$ efficiant, quorum

 deponat

deponat quisque x, ita ut depositum sit $px + qx$, & quisque sibi ludat æquâ expectatione ad vincendum. Porrò cum tot ex hisce collusoribus, quot indicat numerus q, sigillatim hoc pactum inibo, ut eorum qui vincat mihi sit daturus b, aut ego contra ipsi idem b, si vincam. Similiter cum reliquis collusoribus, constituentibus $p - 1$ sigillatim hanc conditionem aggrediar, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus a, & ego tantundem (a scilicet) ipsi, si ego vincam. Et patet hunc lusum hâc conditione justum esse, nemine videlicet injuriam patiente. Deindè patet me nunc q expectationis habere ad b, & $p - 1$ expectationes ad a, & 1 expectationem (me nempe vincente) ad $px + qx - bq - ap + a$, tunc enim obtineo $px + qx$, id quod depositum est, de quo tradere debeo b unicuique q lusorum, & a unicuique $p - 1$ lusorum, quæ simul conficiunt $ab + pa - a$. Si itaque $qx + bx - bq - ap + a$ æquale esset ipsi a, haberem p expectationes ad a, (quandoquidem jam $p - 1$ expectationes ad id habebam) & q expectationes ad b, & sic ad priorem meam exspectationem rursus pervenissem. Quocirca porrò $px + qx - bq - ap + a \propto a$, & fit $x \propto \frac{ap + bq}{p + q}$, pro valore expectationis meæ, omnino ut in initio positum fuit.

In numeris. Si 3 mihi expectationes forent ad 13, & 2 expectationes ad 8, haberem per hanc regulam tantundem ac 11. Et facile est ostendere, me, si 11 habeam, rursus ad eandem expectationem pervenire posse. Ludens enim contra 4 alios, & quisque nostrum quinque deponens 11, cum duobus ex illis sigillatim pactum inibo, ut horum qui vincat mihi sit daturus 8, aut ego ipsi idem 8, si vincam. Similiter cum duobus reliquis, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus 13, aut ego ipsi tantundem, si ego vincam. Qui quidem lusus justus est. Et patet me hoc modo duas habere expectationes ad 8, nimirum si alteruter eorum, qui mihi 8 promiserunt, vincat, & 3 expectationes ad 13, nimirum si alteruter reliquorum duorum, qui mihi 13 tradere debent, vincat, aut si ipse ludum vincam: ego enim ludum vincens obtineo depositum, id est, 55, de quo unicuique duorum tradere debeo 13, & unicuique reliquorum duorum 8, ita ut & mihi relinquatur 13.

PRO-

PROPOSITIO IV.

Vt igitur ad primò propositam quæstionem veniamus, nimirum, de facienda distributione inter diversos collusores, quando eorum sortes inæquales sunt, opùs est ut à facilioribus incipiamus.

Sumpto itaque me cum aliquo certare, hoc pacto: ut qui priùs ter vicerit, quod depositum est, lucretur, & me jam bis vicisse, alterum verò semel. Scire cupio, si lusum prosequi non velimus, sed pecuniam, de qua certamus, prout æquum est, partiri, quantum ejus mihi obtingeret.

Primò considerare oportet lusus, qui utrobique deficiunt. Certum enim est, si inter nos convenerit, verbi gratiâ, ut quod depositum est lucretur is, qui priùs vigesies vicerit, & ego decies & novies vicero, at alter decies & octies, tantò meliorem fore eo casu sortem meam quantò hîc melior est, ubi à tribus lusibus binos consequutus sum, ille verò unum duntaxat: quia nimirum utrobique mihi unus tantummodo lusus sed ipsi duo deficiunt.

Porrò ad inveniendum quanta pars utrique debeatur, advertendum est quid fieret, si in lusu pergeremus. Certum enim est, si primum ludum vincerem, me præscriptum numerũ impleturum & omne depositum consecuturum, id quod vocetur a. Quod si autem alter primum ludum vinceret, tunc æquata utriusque sors foret, (quippe utrique uno adhuc deficiente ludo,) adeoque cederet cuique $\frac{1}{2}a$. Manifestum autem est me æquam habere sortem ad primum ludum vincendum aut perdendum, ita ut mihi nunc æqua sit expectatio ad obtinendum a aut $\frac{1}{2}a$: quod ipsum per 1^{mam} Propositionem tantum est ac si utriusque sortis dimidium, id est, $\frac{3}{4}a$, haberem; & relinquitur alteri meo collusori $\frac{1}{4}a$, quæ ipsius portio statim ab initio eodem modo reperiri potuisset. Unde patet, eum, qui ludum meum in se recipere vellet, mihi $\frac{3}{4}a$ pro eo tradere debere; ac proinde semper tria contra unum deponere eum posse, qui unum ludum vincere contendat, priusquàm alter duos vincat.

PROPOSITIO V.

Ponamus unum mihi deficere ludum & collusori meo tres lusus. Oportet hîc facere distributionem.

Advertamus itaque rursus, in quo essemus statu, si ego vel ipse primum vinceret lusum. Si ego vincerem, obtinerem depositum, id est, a; quòd si autem ille primum ludum vinceret, deficerent ipsi duo lusus & mihi unus; ac proinde in eodem statu essemus, qui in præcedenti Propositione positus fuit, mihique obtingeret $\frac{3}{4}a$, ut ibi ostensum est. Itaque pari facilitate vel a mihi obtinget vel $\frac{3}{4}a$, id quod tantum est, per 1mam Propositionem, ac $\frac{7}{8}a$. Et relinquitur $\frac{1}{8}a$ collusori meo; ita ut mea sors ad sortem illius se habeat, sicut 7 ad 1.

Quemadmodum autem ad hunc calculum requisitus est præcedens, ita rursus hicce inservit sequenti: nimirum, si ponamus mihi unum ludum deficere & collusori meo 4or lusus. Et invenitur eodem modo, mihi deberi $\frac{15}{16}$ istius quod depositum est, & ipsi $\frac{1}{16}$.

PROPOSITIO VI.

Ponamus mihi deficere duos lusus & collusori meo tres lusus.

Fiet itaque primo lusu; vel ut mihi unus lusus deficiat & ipsi tres (unde mihi per præcedentem Propositionem obtinget $\frac{7}{8}a$); vel ut cuique nostrum adhuc duo lusus deficiant, unde mihi debebitur $\frac{1}{2}a$, quandoquidem sic utrique æqua sors futura est. Est mihi autem æqualis facilitas ad primum ludum vincendum aut perdendum; ita ut mihi æqua sit expectatio ad obtinendum $\frac{7}{8}a$ aut $\frac{1}{2}a$, id quod mihi valet $\frac{11}{16}a$, per 1mam Propositionem. Et debentur mihi 11 partes ejus quod depositum est, & collusori meo 5 partes.

PROPOSITIO VII.

Ponamus mihi deficere duos lusus & collusori meo quatuor.

Fiet itaque, ut, si primum ludum vincam, unum ludum vincere debeam & alter quatuor; vel, si eundem perdam, duos & alter tres. Ita ut æqua mihi sors obtingat ad $\frac{15}{16}a$ aut $\frac{11}{16}a$, id quod tantum valet ac $\frac{13}{16}a$, per 1mam Propositionem. Unde patet, eum meliorem habere sortem, qui duos lusus vincere debet dum alter quatuor, quàm eum, qui unum dum alter duos. In hoc enim posteriori casu, nimirum ipsius 1 ad 2, portio mea, per 4tam Propositionem, est $\frac{3}{4}a$, quæ minor est quàm $\frac{13}{16}a$.

PROPOSITIO VIII.

Nunc verò ponamus tres esse collusores, quorum primo ut & secundo unus lusus deficiat, sed tertio duo lusus.

Ut igitur inveniatur primi pars, rursus advertendum est, quid ipsi deberetur, si vel ipse vel alter reliquorum duorum primum lusum vinceret. Si ipse vinceret, haberet depositum, id quod sit a. Quòd si secundus vinceret, primus nihil haberet, quoniam secundus sic lusui finem imposuisset. At si tertius vinceret, tunc cuique trium adhuc unus deficeret lusus, ideóque tam primo quàm utrique reliquorum deberetur $\frac{1}{3}a$. Et sit primo una expectatio ad a, una ad o, & una ad $\frac{1}{3}a$, (quandoquidem æquè facilè contingere potest cuique trium ut primum ludum vincat,) quod ipsi tantundem valet ac $\frac{4}{9}a$, per 2dam Propositionem. Et fit similiter secundo $\frac{4}{9}a$, & remanet tertio $\frac{1}{9}a$. Cujus pars separatim etiam inveniri potuerat, atque inde reliquorum partes determinari.

PROPOSITIO IX.

Ut tot collusorum, quot quis voluerit, ex quibus uni plures & alii pauciores lusus deficiunt, cujusque pars inveniatur, considerandum est, quid illi, cujus partem invenire volumus, deberetur, si vel ipse, vel quislibet reliquorum primum sequentem ludum vinceret. Horum autem partes si in unam summam colligantur, & aggregatum per numerum collusorum dividatur, quotiens ostendet unius quæsitam partem.

Ponamus tres esse collusores A, B, & C, & ipsi A unum ludum deficere, ipsi B duos lusus, & ipsi C similiter duos lusus. Invenire oportet, quid ipsi B, ejus quod depositum est, debeatur. Id quod vocetur q.

Primò examinandum est, quid ipsi B deberetur, si vel ipse, vel A, vel C primum sequentem ludum vinceret.

Si A vinceret, ludo finem imposuisset, ac per consequens ipsi B deberetur o. Si ipse B vinceret, deficeret illi adhuc unus lusus, & ipsi A unus lusus, at ipsi C duo lusus. Quocirca ipsi B hoc in casu deberetur $\frac{4}{9}q$, per 8vam Propositionem.

Denique si C primum sequentem ludum vinceret, tunc ipsis A & C sin-

C singulis unus deficeret lusus, sed ipsi B duo lusus, ac per consequens ipsi B deberetur $\frac{1}{9}q$, per eandem Propositionem 8^{vam}. Nunc autem in unam summam colligendum est, id quod in tribus hisce casibus ipsi B deberetur: nimirum, 0, $\frac{4}{9}q$, $\frac{1}{9}q$: quorum summa est $\frac{5}{9}q$. Quod ipsum divisum per 3, numerum collusorum, dat $\frac{5}{27}q$. Quæ ipsius B quæsita pars est. Demonstratio autem hujus patet ex 2^{da} Propositione. Quoniam enim B æquam habet sortem ad obtinendum 0, $\frac{4}{9}q$, vel $\frac{1}{9}q$, habet per 2^{dam} Propositionem tantundem ac $\frac{c+\frac{4}{9}q+\frac{1}{9}q}{3}$, id est, $\frac{5}{27}q$. Et certum est, hunc divisorem 3 esse numerum collusorum.

Ut autem inveniatur, quid cuipiam debeatur in quolibet casu, videlicet si vel ipse vel aliquis reliquorum primum sequentem ludum vincat: oportet simpliciores casus primò investigare, & horum medio sequentes. Nam sicut hic ultimus casus solvi non potuit priusquam ille octavæ Propositionis calculo subductus esset, in quo deficientes lusus erant 1, 1, 2, ita etiam cujusque pars supputari nequit in tali casu, ubi deficientes lusus sunt 1, 2, 3, quin primum calculo subductus sit casus deficientium lusuum 1, 2, 2, quemadmodum jam fecimus, & præterea ille, in quo lusus deficientes sunt 1, 1, 3; qui similiter per 8^{vam} Propositionem supputari potuisset. Atque hoc quidem pacto consequenter supputare licet casus omnes, qui in sequenti tabula comprehenduntur, & infinitos alios.

Tabula pro 3 collusoribus.

Lusus, qui ipsis deficiunt.	1 . 1 . 2	1 . 2 . 2	1 . 1 . 3	1 . 2 . 3
Eorum partes.	4 . 4 . 1	17 . 5 . 5	13 . 13 . 1	19 . 6 . 2
	9	27	27	27

Lusus, qui ipsis deficiunt.	1 . 1 . 4	1 . 1 . 5	1 . 2 . 4	1 . 2 . 5
Eorum partes.	40 . 40 . 1	121 . 121 . 1	178 . 58 . 7	542 . 179 . 8
	81	243	243	729

Lusus, qui ipsis deficiunt.	1 . 3 . 3	1 . 3 . 4	1 . 3 . 5
Eorum partes.	65 . 8 . 8	616 . 82 . 31	629 . 87 . 13
	81	729	729

Lusus, qui ipsis deficiunt.	2 . 2 . 3	2 . 2 . 4	2 . 2 . 5	2 . 3 . 3	2 . 3 . 4	2 . 3 . 5
Eorum partes.	34 . 34 . 13	338 . 338 . 53	353 . 353 . 23	133 . 55 . 55	451 . 195 . 83	1433 . 635 . 119
	81	729	729	243	729	2187

Quod

Quod ad tesseras attinet, de iis hæ quæstiones proponi possunt: videlicet, quotâ vice unâ tesserâ senarium jacere periclitandum sit, aut aliquod reliquorum punctorum. Item quotâ vice duos senarios duabus tesseris, aut tres senarios tribus tesseris jacere sit tentandum. Et plures aliæ hujusmodi quæstiones.

Ad quas solvendas advertendum est. Primò unius tesseræ sex esse jactus diversos, quorum quivis æquè facilè eveniat. Sumo enim tesseram habere figuram cubi perfectam. Porrò duarum tesserarum 36 esse diversos jactus, quorum similiter quivis æquè facilè obtingere potest. Nam ratione cujusque jactus unius tesseræ potest unus sex jactuum alterius tesseræ simul contingere. Et sexies 6 efficiunt 36 jactus. Item trium tesserarum esse 216 jactus diversos. Nam ratione cujusque 36 jactuum duarum tesserarum potest unus sex jactuum, qui in 3^{tia} sunt, evenire. Et sexies 36 efficiunt 216 jactus. Eodem modo patet, quatuor tesserarum jactus esse sexies 216, id est, 1296; atque sic ulteriùs jactus quotlibet tesserarum supputari posse, sumendo semper pro accessione unius tesseræ sexies jactus præcedentis.

Porrò notandum, duarum tesserarum unum duntaxat esse jactum, qui 2 aut 12 puncta efficiat, duos verò jactus, qui 3 aut 11 puncta efficiant. Si enim tesseras vocemus A & B, patet, ad 3 puncta jacienda in A unum & in B duo, vel in B unum & in A duo puncta reperiri posse. Similiter ad 11 puncta jacienda in A quinque & in B sex, vel in A sex & in B quinque puncta patêre posse. Quatuor punctorum tres sunt jactus, videlicet, ipsius A 1 & B 3 puncta; vel ipsius A 3 & B 1 punctum; vel ipsius A 2 & B 2 puncta.

Decem punctorum similiter tres sunt jactus.

Quinque vel novem punctorum 4^{or} sunt jactus.

Sex vel octo punctorum 5^{que} sunt jactus.

Septem punctorum 6 sunt jactus.

In tribus tesseris reperiuntur	3 vel 18	punctorum	1	jactus.
	4 vel 17		3	
	5 vel 16		6	
	6 vel 15		10	
	7 vel 14		15	
	8 vel 13		21	
	9 vel 12		25	
	10 vel 11		27	

PROPOSITIO X.

Invenire, quot vicibus suscipere quis possit, ut unâ tesserâ 6 puncta jaciat.

Si quis primâ vice senarium jacere contendat, apparet unum esse casum, quo vincat, habeatque id, quod pignoris loco depositum est; quinque verò esse casus, quibus perdat, & nihil habeat. Sunt enim 5 jactus contra ipsum, & tantùm unus pro ipso. Quod autem depositum est vocetur a. Est itaque ipsi unica expectatio ad obtinendum a, sed quinque ad obtinendum 0; id quod per 2^{dam} Propositionem tantundem valet ac $\frac{1}{6}a$. Et manet pro eo qui ipsi hunc casum offert $\frac{5}{6}a$. Ita ut tantummodo 1 contra 5 deponere possit, qui primâ vice suscipere velit.

Qui duabus vicibus semel senarium jacere certet, sors ejus hoc pacto computatur. Si primâ vice 6 jaciat, obtinet a. Si diversum eveniat, unus ipsi restat jactus, qui ex præcedenti tantum valet, quantum $\frac{1}{6}a$. Atqui ut primâ vice 6 jaciat, unus tantùm casus est, & quinque casus, quibus diversum eveniat. Itaque ab initio unus casus est, qui det ipsi a; & quinque qui dent $\frac{1}{6}a$, id quod per 2^{dam} Propositionem valet $\frac{11}{36}a$. Unde contracertanti lusori cedit reliquum $\frac{25}{36}a$; adeò ut sors utriusque sive æstimatio expectationis eam servet rationem, quam 11 ad 25; id est minus quàm 1 ad 2.

Hinc eodem modo calculo subducitur, quòd sors ejus, qui tribus vicibus semel senarium jacere suscipit, sit futura $\frac{91}{216}a$; ita ut 91 contra 125 deponere possit; id est, paulò minus quàm 3 ad 4.

Qui quatuor vicibus idem suscipit, sors ejus est $\frac{671}{1296}a$; ita ut 671 contra 625 deponere possit; id est, plùs quam 1 ad 1.

Qui quinque vicibus idem suscipit, sors ejus est $\frac{4651}{7776}a$, & potest 4651 contra 3125 deponere; id est, paulò minus quàm 3 ad 2.

Qui sex vicibus idem suscipit, sors ejus est $\frac{31031}{46656}a$, & potest 31031 contra 15625 deponere; id est, paulò minus quàm 2 ad 1.

Atque ita consequenter quilibet jactuum numerus inveniri potest. Sed licet majori compendio progredi, ut in sequenti Propositione ostendetur; sine quo calculus aliàs multò prolixior foret.

PRO-

PROPOSITIO XI.

Invenire, quot vicibus ſuſcipere quis poſſit, ut duabus teſſeris 12 puncta jaciat.

Si quis primâ vice duos ſenarios jacere contendat, apparet unum eſſe caſum, quo vincat, id eſt, ad obtinendum a; & 35 eſſe caſus, quibus perdat ſive nihil habeat, quoniam 36 ſunt jactus. Itaque habet, per 2dam Propoſitionem, $\frac{1}{36}a$.

Qui duabus vicibus idem ſuſcipit, ſi primâ vice duos ſenarios jaciat, obtinebit a; ſi verò primâ vice diverſum eveniat, unus ipſi reſtat jactus, id quod ipſi, per illud quod jam dictum eſt, valet $\frac{1}{36}a$.

Atqui ut primâ vice duos ſenarios jaciat, unus tantum eſt caſus, ſed 35 caſus, quibus diverſum eveniat. Itaque ab initio unus caſus eſt, qui det ipſi a, & 35 qui dent $\frac{1}{36}a$; id quod per 2dam Propoſitionem valet $\frac{71}{1296}a$. Et remanet contracertanti $\frac{1225}{1296}a$.

Ex his invenire licet, qualis ſit ei ſors aut pars, qui idem ſuſcipit quaternis jactibus, prætereundo caſum eum, cùm quis illud ternis jactibus ſuſcipit.

Etenim, qui 4or vicibus duos ſenarios jacere contendit, ſi illud 1ma aut 2da vice faciat, obtinet a; ſin minùs, reſtant ipſi duo jactus, qui per illud quod ſuperiùs dictum eſt, valent $\frac{71}{1296}a$. Sed propter eandem rationem habet etiam 71 caſus, ut ex duobus primis jactibus ſemel duos ſenarios jaciat, contra 1225 caſus, quibus diverſum eveniat. Habet itaque ab initio 71 caſus, qui ipſi dent a, & 1225 caſus, qui dent ipſi $\frac{71}{1296}a$. Quod ipſi per 2dam Propoſitionem valet $\frac{178991}{1679616}a$. Et remanet contracertanti $\frac{1500625}{1679616}a$. Id quod oſtendit eorum ſortes eſſe ad ſe invicem, ut 178991 ad 1500625.

E quibus porrò eâdem ratione invenitur expectatio ejus, qui 8 vicibus ſemel duos ſenarios jacere certat. Ac inde rurſus expectatio ejus, qui idem ſuſcipit 16 vicibus. Atque ex hujus expectatione, ut etiam ex expectatione illius, qui iſtud 8 vicibus ſuſcipit, invenitur expectatio ejus, qui illud 24 vicibus in ſe recipit. In qua operatione, quoniam præcipuè quæritur in quo numero jactuum æqualis ſors incipiat, inter eum qui id ſuſcipit & eum qui offert, licebit à numeris, qui alioquin in immenſum excreſcerent, poſteriores aliquot characteres auferre. Atque ita quidem reperio ei, qui illud 24 vicibus ſuſcipit, adhuc aliquid deficere; tumque demum eum potiorem conditionem inire, cùm 25 jactibus aggreditur.

PROPOSITIO XII.

Invenire quot tesseris suscipere quis possit, ut primâ vice duos senarios jaciat.

Hoc autem tantundem est, ac si quis scire velit, quoto jactu quispiam unâ tesserâ suscipere possit, ut bis senarium jaciat. Quòd si quis duobus jactibus susciperet, obtingeret ei, per ea quæ ante ostensa sunt, $\frac{1}{36}a$. Qui illud tribus jactibus in se reciperet, si primus ejus jactus senarius non foret, haberet adhuc duos jactus, quorum uterque senarius esse deberet, id quod tantundem valere dictum est ac $\frac{1}{36}a$. At verò primo ejus jactu existente senario, opùs est ut ex duobus jactibus non nisi semel senarium jaciat. Quod per 10 Propositionem tantundem valet ac si $\frac{11}{36}a$ haberet. Atqui certum est ipsum unum habere casum, quo primâ vice senarium jaciat, & quinque casus quibus diversum eveniat. Habet itaque ab initio unum casum ad $\frac{11}{36}a$, & 5 casus ad $\frac{1}{36}a$, id quod per 2^{dam} Propositionem tantundem valet ac $\frac{16}{216}a$ seu $\frac{2}{27}a$. Hoc pacto assumendo continuè unum jactum ampliùs, invenitur 10 jactibus unâ tesserâ, aut 10 tesseris primo jactu suscipi posse, ut duo senarii jaciantur, idque cum lucro.

PROPOSITIO XIII.

Si cum alio ludam duabus tesseris unum solummodo jactum, hâc conditione, ut, si septenarius eveniat, ego vincam; at ille, si denarius obtingat; si verò quidquam aliud accidat, ut tum id quod depositum est æqualiter dividamus: Invenire qualis istius pars cuique nostrum debeatur.

Quoniam 36 jactuum, qui duabus tesseris proveniunt, 6 jactus existunt septem punctorum, & 3 jactus decem punctorum, restant adhuc 27 jactus, qui ludum æquare possunt; id quod si fiat, cuique nostrum debebitur $\frac{1}{2}a$. Verùm si id non obtingat, habebo 6 casus, quibus vincam, id est, ut a habeam; & 3 casus, quibus diversum eveniat, nihilque habeam: id quod per 2^{dam} Propositionem tantundem est ac si tali casu $\frac{2}{3}a$ haberem. Habeo itaque ab initio 27 casus ad $\frac{1}{2}a$ & 9 casus ad $\frac{2}{3}a$, id quod, per 2^{dam} Propositionem, tantundem est ac $\frac{13}{24}a$. Et remanet contracertanti $\frac{11}{24}a$.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

Si ego & alius duabus tesseris alternatim jaciamus, hâc conditione, ut ego vincam simul atque septenarium jaciam, ille verò quàm primùm senarium jaciat; ita videlicet, ut ipsi primum jactum concedam: Invenire rationem meæ ad ipsius sortem.

Ponatur, sortem meam valere x, & id quod depositum est vocari a; eritque sors alterius $\infty\, a - x$. Et patet, quandocunque ipsius vices jàciendi revertuntur, sortem meam tum rursus debere esse $\infty\, x$. At quandocunque meæ vices sunt ut jaciam, sors mea pluris æstimanda est. Ponatur itaque pro ejus valore y. Iam quoniam ex 36 jactibus reperiuntur 5 in 2 tesseris, qui collusori meo senarium dare lususque victorem reddere possunt; & 31 jactus, quibus diversum eveniat, id est, qui meas jaciendi vices promovent: habebo, priusquam jacit, 5 casus ad obtinendum 0, & 31 casus ad obtinendum y. id quod per 3tiam Propositionem valet $\frac{31y}{36}$. Posuimus autem casum meum à principio esse $\infty\, x$. Quocirca erit $\frac{31y}{36} \infty\, x$, adeoque $y \infty \frac{36x}{31}$. Deinde positum fuit, vicibus meis venientibus, sortem meam valere y. Ego verò jacturus, habeo 6 casus ad obtinendum a, quandoquidem 6 jactus reperiuntur 7 punctorum, qui me victorem reddunt; habeoque 30 casus, quibus vices collusoris mei revertuntur, id est, ut mihi obtineam x. id quod per 3tiam Propositionem valet $\frac{6a + 30x}{36}$. Hoc autem cum sit $\infty\, y$, erit, invento, ut ante, $\frac{36x}{31} \infty\, y$, $\frac{30x + 6a}{36} \infty \frac{36x}{31}$. Unde invenitur $x \infty \frac{31a}{61}$, valor meæ sortis. Et per consequens collusoris mei erit $\frac{30a}{61}$; ita ut ratio sortis meæ ad illius sortem sit, ut 31 ad 30.

Coronidis loco subjungantur sequentia Problemata.

A & B unà ludunt duabus tesseris, hâc conditione, ut A vincat, si senarium jaciat, at B si septenarium jaciat. A primò unum jactum instituet; deinde B duos jactus consequenter; tum rursus A duos jactus, atque sic deinceps, donec hic vel ille victor evadat. Quæritur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B? Resp. ut 10355 ad 12276. *Probl. 1.*

Probl. 2. Tres collusores A, B & C assumentes 12 calculos, quorum 4 albi & 8 nigri existunt, ludunt hâc conditione: ut, qui primus ipsorum velatis oculis album calculum elegerit, vincat; & ut prima electio sit penes A, secunda penes B, & tertia penes C, & tum sequens rursus penes A, atque sic deinceps alternatim. Quæritur, quænam futura sit ratio illorum sortium?

Probl. 3. A certat cum B quòd ipse ex 40 chartis lusoriis, id est, 10 cujusque speciei, 4 chartas extracturus sit; ita ut ex unaquaque specie habeat unam. Et invenitur ratio sortis A ad sortem B ut 1000 ad 8139.

Probl. 4. Assumptis, ut ante, 12 calculis, 4 albis & 8 nigris, certat A cum B, quòd velatis oculis 7 calculos ex iis exempturus sit, inter quos 3 albi erunt. Quæritur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B.

Probl. 5. A & B assumentes singuli 12 nummos ludunt tribus tesseris hâc conditione: ut, si 11 puncta jaciantur, A tradat nummum ipsi B; at si 14 puncta jaciantur, B tradat nummum ipsi A; & ut ille ludum victurus sit, qui primùm omnes habuerit nummos. Et invenitur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B, ut 244140625 ad 282429536481.

F I N I S.

Errata quæ irrepsêre Benevolus Lector sic corrigat.

Pág. 10. lin. 11 omissa sunt hæc verba : *& triplo plures aurei quàm solidi.* P. 13. l. penult. lege *& 6 poma.* P. 16 in fine Prop. 26 lege 75 2^{da} *mola*, & supra hosce numeros scribe *modii*. Pag. 23 in margine lege *ad* 22 *Prop.* P. 26 in fine Prop. 39 lege *C.* 3520. P. 34 ad sinistram in margine lege *flor.* 17017016 (3). P. 45 & 46 in 2 fig. loco superioris literæ D scribe B. P. 50. l. 12 lege *& ED, DF.* P. 52. l. 3 lege *sub AC, AB.* P. 53. l. 13 lege *& FE.* ibid. loco literæ E, quæ prope I reperitur, scribe F. Ibid. l. 14 lege *AGB* &c. P. 55. l. 4 lege *CK*, 26 (I). P. 74. l. 11 lege *Prop.* 11^{ma}. P. 79. l. 4 lege *Vnde LB erit* 16. P. 100. l. 9 lege ABD 27. P. 108 in sinistra duarum superiorum figurarum literæ M & N sunt una in alterius locum collocandæ. P. 145 tolle superiùs *Simplicium Problematum.* P. 151. l. 3 lege *quàm est Crux.* P. 153. l. 7 lege *versùs D.* P. 200. l. ult. scribe in margine 3. Pag. 204. l. 1. Pag. 206. l. 9. Pag. 208. l. penult. P. 211. l. 1. Pag. 213. l. 6. Pag. 215. l. ult. Pag. 218. l. 1. Pag. 220. l. 17. & Pag. 314. l. 14 lege *in rectam lineam.* Pag. 204. l. 9. Pag. 207. l. 1. Pag. 209. l. 13. Pag. 211. l. antep. Pag. 214. l. 1. Pag. 216. l. 13. Pag. 218. l. penult. Pag. 221. l. 5 *lege in circuli circumferentiam.* P. 208. l. 3 lege *sunt.* P. 213. in fig. ad dextram loco superioris literæ C scribe G. P. 220. l. penult. pro BD scribe BG. Pag. 221 in fig. inferiori, quæ est ad sinistram, omissa est lit. I. P. 227. l. 6 lege *Prop.* 33. P. 228. l. penult. lege *in circumferentiam.* P. 245. l. 18 lege *inventum.* P. 265. l. 11 lege *datam AB.* P. 295. l. 27 lege *descriptio.* P. 300. l. 30 lege *in lapideu.* ib. l. antep. lege, *requisitis.* P. 313. l. ult. dele *m.* P. 316. l. 25 lege *secans EM.* P. 404. l. 5 lege *Sectione* 25. P. 479. infra lin. 25 lege $\frac{254c}{a}$, & dele lineam subductam. P. 488 in fine lege ▭ BHC.